УДК 57.519

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АФФИННЫХ СИСТЕМ СО СКАЛЯРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ К КВАЗИКАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

С.Б. Ткачев, **А.А. Шевляков**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: aash29@gmail.com

Для аффинных систем со скалярным управлением получены локальные условия, при которых они преобразуются в систему квазиканонического вида. Разработан алгоритм поиска функций, определяющих такое преобразование, и рассмотрены особенности его реализации с использованием систем аналитических вычислений. Приведен пример приложения теории.

Ключевые слова: теория управления, аффинные системы, нелинейные системы, квазиканонический вид.

TRANSFORMATION OF AFFINE SYSTEMS WITH SINGLE INPUT TO QUASI-CANONICAL FORM

S.B. Tkachev, **A.A. Shevlyakov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: aash29@gmail.com

For affine systems with single input, local conditions are obtained, under which they are transformed to a system of quasi-canonical form. An algorithm is developed for searching the functions that define this transformation, and peculiarities of its implementation using the systems of analytical calculations are considered. An example of theory application is given.

Keywords: control theory, affine systems, nonlinear systems, quasi-canonical form.

Введение. Один из подходов к решению задачи управления нелинейной динамической системой основывается на преобразовании системы к специальному виду, для которого метод решения соответствующей задачи управления известен. Примером являются системы канонического вида [1–3], которые с помощью линеаризации обратной связью можно преобразовать в линейную систему, записанную в канонической форме Бруновского [4].

Условия приводимости к каноническому виду хорошо известны [3], однако не всякую аффинную систему можно к этому виду преобразовать. Поэтому среди аффинных систем выделяют системы, которые преобразуются к квазиканоническому виду [5]. Такие системы содержат подсистему, которая линеаризацией обратной связью преобразуется в каноническую форму Бруновского, и подсистему общего вида.

Основные теоретические положения о преобразовании к квазиканоническому виду в некоторой открытой области аффинных систем со скалярным управлением приведены в работе [5], а с векторным управлением — в [6].

Представляет интерес получение различных локальных условий существования требуемых преобразований, а также условий, при выполнении которых квазиканонический вид имеет специальные свойства.

Проверка условий, при выполнении которых аффинная система преобразуется к квазиканоническому виду, нахождение соответствующей замены переменных, если она существует, а также запись системы в новых переменных требуют выполнения значительных объемов аналитических вычислений.

Компьютерную алгебру начали применять для решения задач нелинейной теории управления в 1990-х гг. [7]. В настоящее время существуют пакеты программ, предназначенные для решения задачи стабилизации положения равновесия путем преобразования к каноническому виду [8]. Однако актуальными остаются разработка алгоритма и создание пакета программ, позволяющих в автоматическом или полуавтоматическом режимах проверить условия существования и выполнить преобразование аффинной системы к квазиканическому виду.

В рамках проводимого исследования использованы системы Maple и MATLAB, выбор которых обусловлен распространенностью системы MATLAB и обширными возможностями Maple для проведения символьных вычислений.

Квазиканонический вид аффинной системы. Рассмотрим аффинную систему со скалярным управлением

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^1$; $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\mathrm{т}}$, $A(0) = 0$; $B(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^{\mathrm{т}}$; $a_i(x)$, $b_i(x) \in C^\infty(\Omega)$; Ω — открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$.

Пусть система (1) в области Ω преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2, \ \ldots, \ \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ &\dot{z}_r = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ &\dot{\eta} = q(z, \eta) + p(z, \eta)u, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_r)^{\mathrm{т}}$, $z \in \mathbb{R}^r$; $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-r})^{\mathrm{т}}$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$; $q(z, \eta) = (q_1(z, \eta), \ldots, q_{n-r}(z, \eta))^{\mathrm{т}}$; $p(z, \eta) = (p_1(z, \eta), \ldots, p_{n-r}(z, \eta))^{\mathrm{т}}$.

Указанный вид при $r < n$ называют квазиканоническим видом [5], а при $r = n$ — каноническим видом [1] системы (1). Число r называют индексом приводимости.

Система (2) квазиканонического вида регулярна в точке (z^0, η^0), если коэффициент при управлении $g(z, \eta)$ не обращается в точке (z^0, η^0) в нуль.

Говоря о том, что в области Ω стационарная аффинная система преобразуется к стационарной системе того или иного вида, предполагают [3], что существует диффеоморфизм $\Psi : \Omega \to \Psi(\Omega)$, который переводит траектории одной системы в траектории другой системы, соответствующие тем же управлениям.

Пусть замена переменных $(z, \eta) = \Psi(x)$, задающая преобразование системы (1) к квазиканоническому виду (2), выбрана так, что $\Psi(0) = (0, 0)$. Тогда точка $(z, \eta) = (0, 0)$ будет положением равновесия системы (2). Если система (2) является минимально фазовой [9, 10], а ее квазиканонический вид регулярен в этой точке, то управление

$$u = \left(-f(z,\eta) + \sum_{i=1}^{r} c_i z_i \right) \Big/ g(z,\eta) \tag{3}$$

обеспечивает локальную стабилизацию положения равновесия $(z, \eta) = (0, 0)$.

Удобным для анализа свойств аффинных систем является аппарат дифференциальной геометрии. В рамках дифференциально-геометрического подхода системе (1) на области Ω можно взаимно-однозначно сопоставить гладкие векторные поля

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Напомним, что для гладкой функции $\varphi(x)$ определена производная этой функции по векторному полю [3]. Например, производная функции φ по векторному полю A, записанная в координатах x, имеет вид $A\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}$.

Если в замене переменных $(z, \eta) = \Psi(x)$ координатные функции $\eta_1 = \eta_1(x), \ldots, \eta_{n-r} = \eta_{n-r}(x)$ выбраны таким образом, что

$$B\eta_i(x) = 0, \; i = \overline{1, n-r}, \tag{5}$$

то система (2) в переменных z, η примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \ldots, \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r &= f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z,\eta), \end{aligned} \tag{6}$$

который будем называть специальным квазиканоническим видом. Такой вид более удобен для анализа свойств системы.

Условия существования квазиканонического вида. Следуя работам [5, 6], приведем результаты, относящиеся к преобразованию аффинных систем (1) к квазиканоническому виду (2).

Напомним, что коммутатором гладких векторных полей X и Y называют [11] векторное поле $[X, Y]$, координаты которого можно вычислить через координаты $X(x)$ и $Y(x)$ векторных полей X и Y по формуле

$$[X, Y](x) = \frac{\partial Y(x)}{\partial x} X(x) - \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(x).$$

Зададим последовательность коммутаторов векторных полей A и B: $\mathrm{ad}_A^0 B = B$, $\mathrm{ad}_A^1 B = [A, B]$, $\mathrm{ad}_A^{k+1} B = [A, \mathrm{ad}_A^k B]$, $k \geq 1$.

Теорема 1. [5] *Для того чтобы в некоторой области Ω для аффинной системы* (1) *существовали переменные, в которых она имеет квазиканонический вид* (2)*, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющая в Ω системе уравнений*

$$\mathrm{ad}_A^k B\varphi(x) = 0, \ \overline{k = 0, r-2}, \tag{7}$$

и существовали функции $\eta_j = \eta_j(x) \in C^\infty(\Omega)$, $j = \overline{1, n-r}$, которые вместе с функциями

$$z_i = A^{i-1}\varphi(x), \ i = \overline{1, r}, \tag{8}$$

задают в Ω гладкую невырожденную замену переменных $(z, \eta) = \varphi(x)$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительные координатные функции $\eta_j = \eta_j(x)$, $j = \overline{1, n-r}$, удовлетворяют в области Ω соотношениям (5). Тогда в Ω аффинная система (1) заменой переменных $(z, \eta) = \varphi(x)$ преобразуется к специальному квазиканоническому виду (6).

Локальные условия существования квазиканонического вида. Локальные условия, при которых аффинная система преобразуется к квазиканоническому виду, задает следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы в некоторой окрестности точки x^0 для аффинной системы* (1) *существовали переменные, в которых она имеет квазиканонический вид* (2)*, необходимо и достаточно, чтобы существовала гладкая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая в окрестности точки x^0 системе уравнений* (7)*, и ранг матрицы Якоби отображения*

$$z_i = A^{i-1}\varphi(x), \ i = \overline{1, r}, \tag{9}$$

в точке x^0 был равен r.

Если система в некоторой окрестности точки x^0 преобразуется к квазиканоническому виду (2), то согласно теореме 1 в этой окрестности определена функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая системе уравнений (7), причем соотношения (9) задают в этой окрестности невырожденную замену по части переменных z. Следовательно, ранг матрицы Якоби отображения (9) в точке x^0 был равен r.

Пусть в некоторой окрестности точки x^0 существует гладкая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая в этой окрестности системе уравнений (7), а ранг матрицы Якоби отображения (9) в точке x^0 был равен r. Дополним множество функций (9) $n-r$ гладкими в окрестности точки x^0 функциями $\eta_j = \eta_j(x)$, $j=\overline{1,n-r}$, так, чтобы ранг матрицы Якоби построенного отображения $(z,\eta)=\Psi(x)$ в точке x^0 был равен n. Такие функции всегда существуют. Тогда в некоторой окрестности точки x^0 отображение $(z,\eta)=\Psi(x)$ будет задавать гладкую невырожденную замену переменных и в силу теоремы 1 в некоторой окрестности точки x^0 в этих переменных система (1) имеет квазиканонический вид (2).

Следствие 2. Если $B(x^0)\neq 0$, выполнены условия теоремы 2 и в окрестности точки x^0 гладкие функции $\eta_j=\eta_j(x)$, $j=\overline{1,n-r}$, выбраны так, что выполнены условия (5) и ранг матрицы Якоби построенного отображения $(z,\eta)=\Psi(x)$ в точке x^0 равен n, то аффинная система (1) в окрестности этой точки преобразуется к специальному квазиканоническому виду (6).

Обозначим через $U^k(x)$ столбец координат векторного поля $(-1)^k\mathrm{ad}_A^k B$. Матрицу $U(x)=(U^0(x),\ldots,U^{n-1}(x))$ называют [1] матрицей управляемости системы (1).

Пусть [5, 6]

$$\gamma(x)=BA^{r-1}\varphi(x)=(-1)^{r-1}\mathrm{ad}_A^{r-1}B\varphi(x), \tag{10}$$

где функция $\varphi(x)$ есть решение системы (7). Поскольку

$$\dot z_r = A^r\varphi(x)|_{x=\varphi^{-1}(z,\eta)} + uBA^{r-1}\varphi(x)|_{x=\varphi^{-1}(z,\eta)}, \tag{11}$$

то функция $\gamma(x)$ есть коэффициент при управлении в системе квазиканонического вида, записанный в переменных x.

Теорема 3. [9] *Пусть $U_r(x)$ — матрица, состоящая из первых r столбцов матрицы управляемости $U(x)$, $\varphi'(x)$ — матрица Якоби замены по части переменных $z_i=A^i\varphi(x)$, $i=\overline{1,r}$, где $\varphi(x)$ — решение системы* (7) *линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Тогда*

$$|\det(\varphi'(x)U_r(x))| = |\gamma(x)|^r. \tag{12}$$

Следующая теорема содержит локальные условия существования преобразования аффинной системы (1) к квазиканоническому виду (2), который обобщает известные результаты для систем, эквивалентных каноническому виду [3].

Теорема 4. *Если при некотором* r, $2 \le r < n$, *для аффинной системы* (1) *существует такое решение* $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ *системы линейных однородных уравнений в частных производных* (7), *для которых соответствующая функция* $\gamma(x) = BA^{r-1}\varphi(x)$ *в точке* x^0 *пространства состояний системы удовлетворяет условию*

$$\gamma(x^0) \neq 0, \tag{13}$$

то в некоторой окрестности точки x^0 :

— подматрица $U_r(x)$ *матрицы управляемости системы* (1) *имеет ранг* r;

— матрица Якоби $\varphi'(x)$ *функций* $z_i = A^{i-1}\varphi(x)$, $i = \overline{1,r}$, *имеет ранг* r;

— аффинная система (1) *преобразуется к регулярному квазиканоническому виду* (2).

Пусть $\gamma(x^0) \neq 0$. Рассмотрим произведение матрицы Якоби $\varphi'(x)$ на подматрицу $U_r(x)$ матрицы управляемости. По теореме 3 имеем $|\varphi'(x)U_r(x)| = |\gamma^r(x)|$. Поскольку $\gamma(x^0) \neq 0$, то определитель матрицы $\Psi'(x)U_r(x)$ отличен от нуля в точке x^0 и в силу непрерывности его элементов также отличен от нуля в некоторой окрестности точки x^0. Следовательно, в этой окрестности матрица $\varphi'(x)U_r(x)$ имеет ранг, равный r, и ранг каждого сомножителя не меньше r. Поскольку матрица U_r содержит ровно r столбцов, а матрица Якоби $\Psi'(x)$ r строк, то в рассматриваемой окрестности ранги этих матриц постоянны и равны r.

Поскольку ранг матрицы Якоби $\varphi'(x)$ равен r в точке x^0, то по теореме об обратной функции [11] функциональные соотношения (8) в некоторой окрестности O точки $z^0 = \varphi(x^0)$ разрешимы относительно r переменных из числа $x_1, \ldots, x_n$. Не нарушая общности, примем, что это $x_1, \ldots, x_r$:

$$x_j = x_j(z_1, \ldots, z_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \quad j = \overline{1,r}. \tag{14}$$

Положим

$$\eta_k = x_{r+k},\ k = \overline{1, n-r}. \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) в некоторой окрестности точки x^0 задают гладкую обратимую невырожденную замену переменных, и в новых переменных z, η аффинная система (1) запишется в квазиканоническом виде (2).

Поскольку согласно (11) функция $\gamma(x)$ определяет коэффициент при управлении в полученной системе квазиканонического вида, то в некоторой окрестности точки x^0 квазиканонический вид будет регулярным.

Замечание 1. Если для системы (1) в окрестности точки x^0 существует регулярный квазиканонический вид, то $B(x^0) \neq 0$.

Замечание 2. Если условия теоремы (4) выполнены при $r = n$, то аффинная система (1) преобразуется в некоторой окрестности точки x^0 к регулярному каноническому виду [1, 3].

Замечание 3. Любая аффинная система может рассматриваться как система, записанная в квазиканоническом виде с индексом приводимости $r = 1$, если в качестве координатной функции z_1 выбрать любую координатную функцию x_i, такую что соответствующее ей уравнение аффинной системы (1) содержит в правой части управление. При этом такой квазиканонический вид не обязательно будет регулярным в фиксированной точке x^0.

Индекс приводимости не может быть больше n, поэтому для каждой аффинной системы (1) в окрестности точки x^0 существует максимальный индекс приводимости к квазиканоническому виду $r_{\max}$, $1 \leq r_{\max} \leq n$, и для преобразования системы к квазиканоническому виду можно выбрать любое r, $1 \leq r \leq r_{\max}$.

При фиксированном r для системы (1) эквивалентная ей система квазиканонического вида (2) не единственна. По крайней мере, имеется некоторая свобода выбора замены по части переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Если $B(x^0) \neq 0$, то в окрестности точки x^0 для системы (1) существует эквивалентная система регулярного квазиканонического вида с индексом приводимости $r = 1$. Перейдем к определению максимального значения индекса $\hat{r}$ приводимости системы (1) к регулярному квазиканоническому виду, $1 \leq \hat{r} \leq r_{\max}$.

Локальные условия существования регулярного квазиканонического вида задает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть в некоторой окрестности точки x^0 размерность инволютивного замыкания $\overline{F}_{r-1}$ распределения*

$$F_{r-1} = \mathrm{span}(B, \mathrm{ad}_A B, \ldots, \mathrm{ad}_A^{r-2} B),$$

$r \geq 2$, *постоянна и равна* m, $r - 1 \leq m < n$, *и для векторного поля* $\mathrm{ad}_A^{r-1} B$ *имеет место* $\mathrm{ad}_A^{r-1} B(x^0) \notin \overline{F}_{r-1}(x^0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 аффинная система (1) *преобразуется к регулярному квазиканоническому виду* (2) *с индексом приводимости r.*

Поскольку инволютивное замыкание $\overline{F}_{r-1}$ распределения F_{r-1} по условию теоремы регулярно ($\dim \overline{F}_{r-1} = m$) и инволютивно в некоторой окрестности точки x^0, то у этого распределения существует

$k = n - m$ функционально независимых в окрестности точки x_0 первых интегралов [3, 11].

Среди них существует интеграл $\varphi(x)$, такой что $\mathrm{ad}_A^{r-1} B\varphi(x^0) \neq 0$. Действительно, если для всех первых интегралов распределения $\overline{F}_{r-1}$ имеет место $\mathrm{ad}_A^{r-1} B\varphi(x^0) = 0$, то в точке x^0 $\mathrm{ad}_A^{r-1} B(x^0) \in \overline{F}_{r-1}(x_0)$, что противоречит последнему условию теоремы.

Указанная функция $\varphi(x)$ является решением системы уравнений (7). Поскольку при этом

$$\gamma(x^0) = (-1)^{r-1} \mathrm{ad}_A^{r-1} B\varphi(x^0) = BA^{r-1}\varphi(x^0) \neq 0,$$

то в силу теоремы 4 в некоторой окрестности точки x^0 система (1) преобразуется к квазиканоническому виду с индексом приводимости r.

Следствие 3. Пусть $\hat{r} < n$ — максимальное число, для которого в окрестности точки x^0 выполнены условия теоремы 5. Тогда $\hat{r}$ — максимальный индекс приводимости системы (1) к регулярному квазиканоническому виду (2).

Алгоритм преобразования к регулярному квазиканоническому виду. Приведем основные этапы исследования проблемы преобразования системы (1) в окрестности заданной точки x^0 к регулярному квазиканоническому виду (2) с использованием системы компьютерной алгебры.

Проверяем условие $B(x^0) \neq 0$. Если это условие выполнено, то аффинную систему (1), как отмечалось выше, можно рассматривать как систему, записанную в регулярном квазиканоническом виде с индексом приводимости $r = 1$. Если условие не выполнено, прекращаем поиск.

Переходим к поиску индекса приводимости $r > 1$. Если указанное неравенство выполнено, то распределение $F_1 = \mathrm{span}(B)$ регулярно в некоторой окрестности точки x^0 и инволютивно, так как $[B, B] = 0$.

Далее для $k = 2, 3, \ldots$ последовательно вычисляем векторное поле $\mathrm{ad}_A^{k-1} B$, проверяем регулярность распределения

$$F_k = \mathrm{span}(B, \mathrm{ad}_A B, \ldots, \mathrm{ad}_A^{k-1} B)$$

в окрестности точки x^0, определяем размерность его инволютивного замыкания $\overline{F}_k$ и регулярность. Процесс останавливается, как только либо распределение F_k не будет регулярным в окрестности точки x^0, либо инволютивное замыкание $\overline{F}_k$ не будет регулярным, либо размерность $\overline{F}_k$ станет равной n — размерности системы (1).

Пусть остановка произошла при $k = k_{\max}$. Возвращаемся к анализу распределения $\overline{F}_{k_{\max}-1}$. Это распределение инволютивно и регулярно.

Проверяем условие $\mathrm{ad}_A^{k_{\max}-1} B(x_0) \notin \overline{F}_{k_{\max}-1}$. Если это условие выполнено, то найден максимальный индекс $\hat{r} = k_{\max}$ приводимости к регулярному квазиканоническому виду. Если это условие не выполнено, переходим к рассмотрению распределения $\overline{F}_{k_{\max}-2}$.

Проверка будет продолжаться до тех пор, пока не найдется такой первый индекс $k_{\max} - 1 \geq m \geq 2$, что будет выполнено условие $\operatorname{ad}_A^{m-1} B(x_0) \notin \overline{F}_{m-1}$. Тогда $\hat{r} = m$. Если же и при $m = 2$ указанное неравенство не выполняется, то система приводится к регулярному квазиканоническому виду с $\hat{r} = 1$.

Проверка регулярности или инволютивности заданного распределения сводится к исследованию ранга соответствующей ему функциональной матрицы, по столбцам которой записаны координаты векторных полей, порождающих это распределение, и может выполняться с использованием алгоритма, предложенного в [2].

Решая методами компьютерной алгебры соответствующую систему уравнений в частных производных, для найденного индекса приводимости $\hat{r}$ находим такой первый интеграл $\varphi(x)$ распределения $\overline{F}_{\hat{r}-1}$, который удовлетворяет условию $\operatorname{ad}_A^{\hat{r}-1}\varphi(x^0) \neq 0$.

Если в аналитическом виде его получить не удается, то аналитически преобразовать систему (1) к регулярному квазиканоническому виду с указанным индексом невозможно.

Пусть удалось найти $\varphi(x)$ в аналитическом виде. Тогда для выбранной функции $\varphi(x)$ с использованием системы компьютерной алгебры вычисляем функции $A^{i-1}\varphi(x)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$.

В режиме диалога задаем функции $\eta_i = \eta_i(x)$, $i = \overline{1, n - \hat{r}}$, такие что ранг матрицы Якоби множества функций $z_i = A^{i-1}\varphi(x)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\eta_j = \eta_j(x)$, $j = \overline{1, n - \hat{r}}$, равен n в точке x_0.

Для получения квазиканонического вида (2), в котором $p(z, \eta) \equiv 0$, функции η_i следует выбрать из числа первых интегралов векторного поля B, но это осуществимо не всегда.

Для сформированной замены переменных $(z, \eta) = \Psi(x)$ ищем обратную замену $x = \Psi^{-1}(z, \eta)$ (если она выражается аналитически) с использованием системы компьютерной алгебры.

В режиме диалога определяем (если это возможно) область, в которой построенная замена переменных $(z, \eta) = \Psi(x)$ является диффеоморфизмом, на основе анализа гладкости прямого и обратного отображений и других их свойств.

Оценкой сверху для искомой области может быть область, в которой не вырождена матрица Якоби отображения $(z, \eta) = \Psi(x)$.

Если прямая и обратная замены получены в аналитическом виде, то с использованием системы компьютерной алгебры получаем квазиканонический вид в переменных z, η.

Замечание 4. Для преобразования системы (1) к регулярному квазиканоническому виду с индексом приводимости $r < \hat{r}$ следует найти первые интегралы распределения $\overline{F}_{r-1}$ и среди них выбрать такой первый интеграл $\varphi(x)$, который удовлетворяет условию $\mathrm{ad}_A^{r-1}\varphi(x^0) \neq 0$. Если такую функцию $\varphi(x)$ удалось найти, далее действуем согласно приведенному выше алгоритму.

Замечание 5. Неоднозначность регулярного квазиканонического вида при фиксированном индексе приводимости $r \leq \hat{r}$ связана в том числе с тем, что могут существовать несколько первых интегралов распределения $\overline{F}_{r-1}$, для которых $\mathrm{ad}_A^{r-1}\varphi(x^0) \neq 0$.

Пример. Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 - 2x_1^3 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - 2x_1x_2 + 2x_1^3, \\ \dot{x}_4 &= x_2 - x_1^2 + x_1 u \end{aligned} \tag{16}$$

в окрестности точки $x^0 = (1, 0, 0, 0)$.

Векторное поле B имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

и не обращается в нуль в точке x^0. Следовательно, распределение F_1 регулярно и инволютивно в окрестности точки x^0.

Перейдем к анализу распределения $F_2 = \mathrm{span}(B, \mathrm{ad}_A B)$. Найдем векторное поле

$$\mathrm{ad}_A B = -\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_2 - x_1^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x_4}. \tag{17}$$

Поскольку ранг матрицы

$$(B(x), \mathrm{ad}_A B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2x_1 \\ 0 & 2x_1 \\ x_1 & x_2 - x_1^2 - 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

в окрестности точки x^0 равен двум, распределение F_2 регулярно.

Для анализа инволютивности распределения F_2 вычислим векторное поле $X_1 = [B, \mathrm{ad}_A B] = 2\dfrac{\partial}{\partial x_4}$ и сформируем соответствующую функциональную матрицу

$$(B(x), \mathrm{ad}_A B(x), X_1(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1^2 - 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Поскольку ранг матрицы (19) равен трем, распределение $F_2 = \mathrm{span}(B, \mathrm{ad}_A B)$ не является инволютивным.

Найдем инволютивное замыкание распределения F_2. Для этого вычислим коммутаторы векторных полей, входящих в распределение

$$\operatorname{span}(B, \operatorname{ad}_A B, X_1).$$

Получим $[B, X_1] = 0$ и $[\operatorname{ad}_A B, X_1] = 0$. Таким образом, инволютивное замыкание $\overline{F}_2$ распределения F_2 порождается векторными полями B, $\operatorname{ad}_A B$ и X_1. Ранг матрицы (19), а следовательно, и размерность $\overline{F}_2$ равны трем.

Вычислим векторное поле

$$\operatorname{ad}_A^2 B = \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{20}$$

Можно видеть, что ранг матрицы $(B(x), \operatorname{ad}_A B(x), \operatorname{ad}_A^2 B(x))$ равен трем и поэтому распределение $F_3 = \operatorname{span}(B, \operatorname{ad}_A B, \operatorname{ad}_A^2 B(x))$ регулярно.

Перейдем к построению инволютивного замыкания распределения F_3. Поскольку ранг функциональной матрицы

$$(B(x), \operatorname{ad}_A B(x), X_1(x), \operatorname{ad}_A^2 B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 - x_1^2 - 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

равен четырем, т.е. размерности системы, процесс поиска инволютивного и регулярного распределения, имеющего размерность $r < n$, завершен и искомым распределением является $\overline{F}_2$.

Поскольку ранг матрицы (21) равен четырем и в самой точке x^0, то

$$\operatorname{ad}_A^2 B(x^0) \notin \overline{F}_2(x^0).$$

Следовательно, у системы (16) существует регулярный квазиканонический вид с максимальным индексом приводимости $\hat{r} = 3$. В данном случае $\hat{r} = r_{\max}$.

Составим систему уравнений для нахождения первых интегралов распределения $\overline{F}_2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0, \\ &-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - 2x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + 2x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + (x_2 - x_1^2 - 1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0, \\ &2\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку размерность распределения $\overline{F}_2$ равна трем, то система (22) [11] имеет $4 - 3 = 1$ функционально независимое решение. Найдя его с использованием системы компьютерной алгебры, получим искомый первый интеграл $\varphi(x) = x_1^2 + x_3$. Множество решений системы (22) имеет вид $h(\varphi(x))$, где $h(\cdot)$ — произвольная гладкая функция скалярного аргумента.

Положим $z_1 = \varphi(x)$. Тогда $z_2 = \dot{z}_1 = x_1$, $z_3 = \dot{z}_2 = x_2 - x_1^2$. Поскольку существование регулярного квазиканонического вида уже установлено, проверять ранг матрицы Якоби замены по части переменных z не нужно.

В качестве η выберем x_4. Получим набор функций

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^2 + x_3, \\ z_2 &= x_1, \\ z_3 &= x_2 - x_1^2, \\ \eta &= x_4, \end{aligned} \tag{23}$$

который задает замену переменных в окрестности точки x^0.

Обратная к (23) замена имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_2, \\ x_2 &= z_3 + z_2^2, \\ x_3 &= z_1 - z_2^2, \\ x_4 &= \eta. \end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку прямая и обратная замены задаются гладкими в $\mathbb{R}^4$ функциями, а отображение (24) взаимно-однозначно отображает $\mathbb{R}^4$ на $\mathbb{R}^4$, то это отображение является диффеоморфизмом R^4.

Записав систему в переменных (23), получим квазиканонический вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= u, \\ \dot{\eta} &= z_3 + z_2 u. \end{aligned} \tag{25}$$

Он определен всюду в R^4 и является всюду регулярным.

Выбор η, сделанный ранее, не является единственно возможным. Чтобы в последнее уравнение системы (25) не входило управление, требуется выбрать η из числа первых интегралов векторного поля B. Таких функционально независимых первых интегралов три: $p = x_1$, $q = x_3$ и $s = -x_1x_2 + x_4$.

Выбрав $\eta = -x_1x_2 + x_4$, получим невырожденную замену переменных

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^2 + x_3, \\ z_2 &= x_1, \\ z_3 &= x_2 - x_1^2, \\ \eta &= -x_1x_2 + x_4. \end{aligned}$$

Обратная к (26) замена имеет вид

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_2,\\
x_2 &= z_3 + z_2^2,\\
x_3 &= z_1 - z_2^2,\\
x_4 &= \eta + z_2 z_3 + z_2^2.
\end{aligned}
$$

Соответствующее отображение является диффеоморфизмом R^4. В переменных (26) система (16) имеет специальный квазиканонический вид

$$
\begin{aligned}
\dot z_1 &= z_2,\\
\dot z_2 &= z_3,\\
\dot z_3 &= u,\\
\dot\eta &= -z_3^2 - 3z_3 z_2^2 + z_3,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

поскольку в последнее уравнение управление не входит.

Заключение. Получены новые локальные условия существования квазиканонического (в том числе регулярного) вида для аффинных систем со скалярным управлением, а также приведен алгоритм преобразования к регулярному квазиканоническому виду, основанный на использовании систем компьютерной алгебры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-07-00329 и 11-01-733) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.0370).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жевнин А. А., Крищенко А. П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 258, № 4. – С. 805–809.
2. Крищенко А. П. Преобразование многомерных аффинных управляемых систем // Управляемые нелинейные системы. – 1991. – № 2. – С. 5–14.
3. Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.
4. Brunovsky P. A. A classification of linear controllable systems // Kybernetika. – 1970. – Vol. 6. – P. 176–188.
5. Крищенко А. П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1988. – № 512. – С. 69–87.
6. Крищенко А. П., Клинковский М. Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации. // Дифференциальные уравнения. – 1992. – № 1. – Т. 28. – С. 1945–1952.
7. Birk J., Zeitz M. Program for symbolic and rule-based analysis and design of nonlinear systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin. – 1991. – No. 165. P. 115–128.
8. Fischer G. NONLINCON: symbolic analysis and design package for nonlinear control systems // Master's thesis. Eindhoven University of Technology. – 1994. – 176 p. [Электронный ресурс]. URL: http://alexandria.tue.nl/repository/books/639746.pdf (дата обращения: 20.05.2012).

9. I s i d o r i A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. – 587 p.
10. K h a l i l H. K. Nonlinear systems. 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice–Hall, 2002. – 750 p.
11. К а н а т н и к о в А. Н., К р и щ е н к о А. П., Ч е т в е р и к о в В. Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 456 с.
12. Ш е в л я к о в А. А. Вычисление ранга функциональной матрицы // http://technomag.edu.ru Наука и образование: электронное научное издание. – 2011. № 10. [Электронный ресурс]. URL: http://technomag.edu.ru/doc/243762.html (дата обращения: 20.05.2012).

Статья поступила в редакцию 21.06.2012

Сергей Борисович Ткачев — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области математической теории управления.

S.B. Tkachev — D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 60 publications in the field of mathematical control theory.

Андрей Анатольевич Шевляков — аспирант кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор двух научных работ в области теории управления.

A.A. Shevlyakov — post-graduate of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of two publications in the field of control theory.