

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ЗВЕНЬЕВ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ МАНИПУЛЯТОРОВ БЕЗ ОБРАЩЕНИЯ ИХ МАТРИЦ МАСС

Г.А. Геворкян

hrgevorkian@mail.ru

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван, Республика Армения

Аннотация

В современной научной литературе большое внимание уделяется оптимальному моделированию упругих динамических систем. Актуальность исследований связана с необходимостью непрерывной корректировки движения исполнительных органов высокоточных роботов-манипуляторов и механизмов-автоматов в режиме реального времени с учетом податливостей составляющих звеньев этих систем. Сформулированный обобщенный метод Ньютона — Эйлера стал надежной платформой к последующему построению прогрессивных модификаций динамического анализа для широкого класса эластодинамических систем. Цель работы — совершенствование существующих расчетных алгоритмов для ускорения вычислительного процесса динамического анализа упругих манипуляторов. В связи с этим на основе символично-итеративного исчисления сформулирована и решена смешанная задача динамики упругих манипуляторов без обращения их матриц масс; разработана новая модификация метода Ньютона, предназначенного для численного интегрирования уравнений движения упругих манипуляторов в форме Ньютона — Эйлера; выполнена оценка эффективности предлагаемого метода динамического анализа упругих манипуляторов на примере динамического расчета упругого пространственного пятизвенного манипулятора за счет сравнения быстродействия вычислительных процессов, осуществляемых при неизменной точности моделирования задачи. Предложен прогрессивный метод динамического моделирования манипуляторов с упругими звеньями без использования процедуры обращения их матриц масс

Ключевые слова

Упругие динамические системы, символическое исчисление, обобщенный метод Ньютона — Эйлера, смешанная задача динамики, численное интегрирование, матрица итераций, метод Ньютона

Поступила 10.03.2021

Принята 11.10.2021

© Автор(ы), 2022

Введение. В последние годы прошлого столетия в публикациях появилось обобщение классического метода Ньютона — Эйлера [1, 2] на случай упругодеформируемых звеньев кинематической цепи многозвенных динамических систем. Эту новую модификацию метода Ньютона — Эйлера стало принято называть обобщенным методом Ньютона — Эйлера [3]. Вслед за этим была опубликована работа [4], в которой на основе сформулированного обобщенного метода Ньютона — Эйлера и нововведенных элементов символьного исчисления введен алгоритм численного решения первой задачи динамики (Inverse Dynamic Problem) упругих манипуляторов.

Дальнейшее развитие обобщенного метода Ньютона — Эйлера привело к построению алгоритмов численного решения второй и смешанной задач динамики (Direct and Mixt Dynamic Problems) упругих манипуляторов, которые нашли отражение в работах [5, 6]. Кроме того, обобщенный метод Ньютона — Эйлера в контексте решения смешанной задачи динамики использован в [7] применительно к классу упругих древовидных динамических систем (Arborescent Dynamic Systems). Впоследствии было показано [8], что применение обобщенного метода Ньютона — Эйлера позволяет существенно сократить машинное время численного решения задач управления упругих манипуляторов по сравнению с методами, использующими процедуру обращения их матриц масс.

На примере исследования особенностей символьного построения первой и второй задач динамики манипуляторов с абсолютно жесткими звеньями в [9] раскрыты методологическая и формальная стороны метода Ньютона — Эйлера, откуда неопровержимо следовало существование элементарной расчетной единицы кинематической цепи. Таким образом, ввиду изложенного формально-методологического осмысления проблематика оптимизации методов динамического анализа может вполне однозначно сводиться к выбору тех методов, которые используют наипростейшие виды структурных единиц кинематической цепи [10–17]. В то же время метод Ньютона — Эйлера в динамике упругих манипуляторов не утратил актуальности и в настоящее время [18–20].

В предлагаемой работе подведен итог исследованиям в области моделирования манипуляторов с упругими звеньями без обращения их матриц масс. После подробного изложения основополагающих уравнений упругих манипуляторов, алгоритма численного решения смешанной задачи динамики и метода численного интегрирования уравнений движения упругих манипуляторов в форме Ньютона — Эйлера приведена чис-

ленная реализация первой (обратной) задачи динамики на примере исследования пространственного пятизвенного манипулятора.

Обобщенная динамическая модель упругих манипуляторов. Рассмотрим манипулятор произвольной кинематической цепи (рис. 1), состоящий из n линейно-деформируемых звеньев всевозможной геометрической конфигурации C_1, C_2, \dots, C_n , которые связаны между собой n вращательными или поступательными соединительными узлами (кинематическими парами), идентифицируемыми логической переменной [2, 3]:

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{вращательная кинематическая пара } j \\ 1 & \text{поступательная кинематическая пара } j \end{cases}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

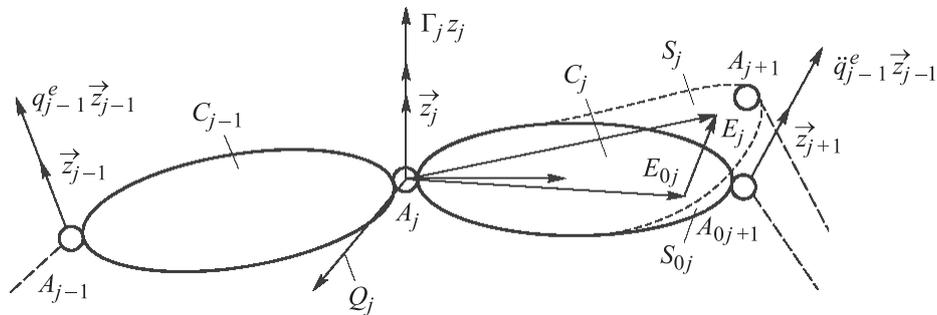


Рис. 1. Кинематическая цепь с упругодеформируемым звеном

Согласно теории деформируемого тела, малые линейные и угловые деформации упругого звена C_j определяются перемещениями некоторой точки $E_{0j} \in C_j$ из недеформированной конфигурации S_{0j} в деформированную S_j (см. рис. 1) и исчисляются в жестко связанной со звеном C_j подвижной системе отсчета Q_j на основе разложений [2, 3]:

$${}^j \vec{u}_j(E_j, t) = \sum_{i=1}^{N_j} {}^j \vec{\Phi}_{dj,i}(E_{0j}) q_{j,i}^e(t); \tag{1}$$

$${}^j \vec{\varphi}_j(E_j, t) = \sum_{i=1}^{N_j} {}^j \vec{\Phi}_{rj,i}(E_{0j}) q_{j,i}^e(t), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Здесь ${}^j \vec{\Phi}_{dj,i}$, ${}^j \vec{\Phi}_{rj,i}$, $i = 1, \dots, N_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$ — координатные функции Рэлея — Ритца, N_j — число интерполяционных вектор-полиномов упругого звена C_j , подчиняющихся векторному равенству [2, 3]

$${}^j \vec{\Phi}_{rj,i}(E_{0j}) = (1/2) \text{rot } {}^j \vec{\Phi}_{dj,i}(E_{0j}), \quad i = 1, \dots, N_j, \quad j = \{1, \dots, n\},$$

и образующих в точке A_{0j+1} , $j \in \{1, \dots, n\}$, обобщенную матрицу форм [2, 3]

$${}^j\Phi_j = \begin{bmatrix} {}^j\Phi_{dj} \\ {}^j\Phi_{rj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j\bar{\Phi}_{dj,1}(A_{0j+1}), {}^j\bar{\Phi}_{dj,2}(A_{0j+1}), \dots, {}^j\bar{\Phi}_{dj,N_j}(A_{0j+1}) \\ {}^j\bar{\Phi}_{rj,1}(A_{0j+1}), {}^j\bar{\Phi}_{rj,2}(A_{0j+1}), \dots, {}^j\bar{\Phi}_{rj,N_j}(A_{0j+1}) \end{bmatrix},$$

$$j \in \{1, \dots, n\}.$$

Динамическую модель упругих манипуляторов описывают системой нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений, включающих в себя систему нелинейных дифференциальных уравнений динамического равновесия упругого звена C_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ (рис. 2, а) [2, 3]:

$$\begin{bmatrix} {}^jJ_{rrj} & {}^jJ_{rej} \\ {}^jJ_{erj} & {}^jJ_{eej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j\vec{V}_j \\ \vec{q}_j^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j\vec{C}_j^r \\ {}^j\vec{C}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j\vec{F}_j - {}^{j+1}T_j^T {}^{j+1}\vec{F}_{j+1} \\ -{}^j\Phi_j^T {}^jR_{j+1}^T {}^{j+1}\vec{F}_{j+1} \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

где ${}^jJ_{rrj}$, ${}^jJ_{rej}$, ${}^jJ_{erj}$, ${}^jJ_{eej}$ — блочные матрицы инерции жесткой–жесткой, жесткой–упругой, упругой–жесткой и упругой–упругой совокупностей соответственно, которые полагаются известными; ${}^{j+1}R_j$, ${}^{j+1}T_j$ — шести-мерные матрицы поворота и преобразования (размерность 6×6); ${}^j\vec{C}_j^r$, ${}^j\vec{C}_j^e$ — векторы, содержащие центробежные и гироскопические члены жесткой и упругой совокупностей, также полагаемые известными. Векторы ${}^j\vec{V}_j$, ${}^j\vec{F}_j$ размерностью 6×1 в системе (2) объединяют ускорения звеньев, внутренние и приводные усилия в кинематических парах. Первый вектор ${}^j\vec{V}_j$ выражают через трехмерные векторы линейных и угловых ускорений (рис. 2, б): ${}^j\vec{V}_j = [{}^j\vec{v}_j^T, {}^j\vec{\omega}_j^T]^T$. Второй вектор ${}^j\vec{F}_j$ внутренних и приводных сил задают равенством ${}^j\vec{F}_j = [{}^j\vec{f}_j^T, {}^j\vec{n}_j^T]^T + \Delta_j(\Gamma_j, \vec{q}_j^r) {}^j\vec{a}_j$, Δ_j — некоторая диссипативная функция; ${}^j\vec{a}_j$ — трехмерный единичный вектор, направленный вдоль оси движения j -й кинематической пары, ${}^j\vec{a}_j = \{[\sigma_j {}^j\vec{a}_j]^T, [\bar{\sigma}_j {}^j\vec{a}_j]^T\}^T$.

Следует отметить, что вектор \vec{q}_j^e в (2) включает в себя ускорения упругих переменных деформируемого звена C_j , размерность которого совпадает с числом «упругих» степеней свободы N_j этого звена

$$\vec{q}_j^e = \left[\ddot{q}_{j,1}^e, \ddot{q}_{j,2}^e, \dots, \ddot{q}_{j,N_j}^e \right]^T.$$

Векторные алгебраические уравнения, выражающие кинематические зависимости скоростей (линейных и угловых) от ускорений (линейных и угловых) точек A_j и A_{j-1} упругого звена C_j (см. рис. 2, б):

$$\begin{aligned}
 {}^j\vec{V}_j &= {}^jT_{j-1} {}^{j-1}\vec{V}_{j-1} + {}^jT_{j-1} {}^{j-1}\Phi_{j-1} \vec{q}_{j-1}^e + \dot{q}_j^r {}^j\vec{a}_j, \quad j=1, \dots, n; \\
 {}^j\vec{V}_j &= {}^jT_{j-1} {}^{j-1}\vec{V}_{j-1} + {}^jT_{j-1} {}^{j-1}\Phi_{j-1} \vec{q}_{j-1}^e + \ddot{q}_j^r {}^j\vec{a}_j + {}^j\vec{h}_j, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

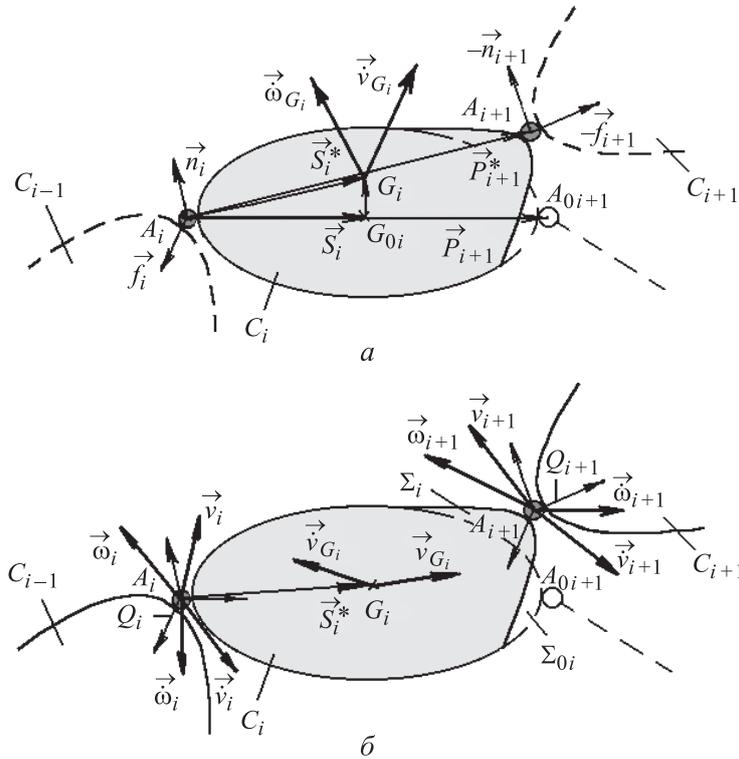


Рис. 2. Схемы динамических (а) и кинематических (б) характеристик упругого звена

Во втором уравнении системы (3) вектор ${}^j\vec{h}_j$ включает в себя нелинейные кинематические члены, образуемые жесткой–жесткой и жесткой–упругой совокупностями деформируемого звена C_j .

Формулировка и численное решение смешанной задачи динамики упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона — Эйлера. Разобьем множество звеньев кинематической цепи $\{M\} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ на два подмножества $\{M_1\} = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_l\}$ и $\{M_2\} = \{C''_1, C''_2, \dots, C''_m\}$, $l + m = n$, по признаку (см. рис. 1):

$$\chi_j = \begin{cases} 0 & \text{в кинематической паре } j \text{ задано приводное усилие } \Gamma_j \\ 1 & \text{в кинематической паре } j \text{ задано обобщенное ускорение } \ddot{q}_j^r \end{cases},$$

$$j \in \{1, \dots, n\}.$$

Тогда смешанная задача динамики упругих манипуляторов формулируется следующим образом. Предположим, что заданы законы изменения приводных усилий $\Gamma_i, i=1, \dots, l$, и обобщенных ускорений $\ddot{q}_k^r, k=1, \dots, m$, принадлежащих подмножествам $\{M_1\}$ и $\{M_2\}$. Требуется определить законы изменения приводных усилий $\Gamma_k, k=1, \dots, m$, и обобщенных ускорений $\ddot{q}_i^r, i=1, \dots, l$, принадлежащих подмножествам $\{M_2\}$ и $\{M_1\}$.

Алгоритм решения смешанной задачи динамики упругих манипуляторов без обращения их матриц масс составлен с использованием элементов символьно-итеративного исчисления, успешно применяющегося при анализе упругих манипуляторов [4]. Он включает в себя три последовательно проводимых для каждого момента времени $t \in [0, T]$ рекурсивных цикла [5].

Первый (восходящий) рекурсивный цикл — кинематический расчет манипулятора на основе заданных геометрических и инерционных характеристик составляющих звеньев

$${}^j\vec{V}_j = {}^jT_{j-1} {}^{j-1}\vec{V}_{j-1} + {}^jR_{j-1} {}^{j-1}\Phi_{j-1} \vec{q}_{j-1}^e + \dot{q}_j^r {}^j\vec{a}_j, \quad j=1, \dots, n,$$

подчинив его инициализациям ${}^0\vec{V}_0 = \vec{0}_6, \quad \vec{q}_0^e = \vec{0}_{N_0}$.

Второй (нисходящий) рекурсивный цикл предусматривает определение символьно-итеративных величин (матриц, векторов и скаляров), роль которых сводится к обеспечению линейности вычислительного процесса искомых динамических параметров в зависимости от размерности систем [5]. Вторая рекурсия после проведения инициализации

$$\begin{aligned} {}^nJ_{rrn}^* &= {}^nJ_{rrn}; \quad {}^nJ_{ren}^* = {}^nJ_{ren}; \quad {}^nJ_{ern}^* = {}^nJ_{ern}; \quad {}^nJ_{een}^* = {}^nJ_{een}; \\ {}^n\vec{C}_n^{r*} &= {}^n\vec{C}_n^r + {}^n\vec{F}_{nt}; \quad {}^n\vec{C}_n^{e*} = {}^n\vec{C}_n^e + {}^n\Phi_n^T {}^n\vec{F}_{nt} \end{aligned}$$

предусматривает определение по следующему циклу вспомогательных инерционных параметров ${}^jJ_{rrj}^*, {}^jJ_{rej}^*, {}^jJ_{erj}^*, {}^jJ_{eej}^*, {}^j\vec{C}_j^{r*}$ и ${}^j\vec{C}_j^{e*}, j=(n-1), \dots, 1$:

$$K_j = {}^jJ_{rrj}^* - {}^jJ_{rej}^* {}^jJ_{eej}^{*-1} {}^jJ_{erj}^*; \quad {}^j\vec{m}_j = -{}^jJ_{rej}^* {}^jJ_{eej}^{*-1} {}^j\vec{C}_j^{e*} + {}^j\vec{C}_j^{r*}.$$

Если $\chi_j = 0$ или $j \neq 1$, то

$$\{G_j = K_j {}^jT_{j-1}; \quad H_j = K_j {}^jR_{j-1} {}^{j-1}\Phi_{j-1}; \quad {}^j\vec{p}_j = K_j {}^j\vec{h}_j + {}^j\vec{m}_j\}.$$

Если $\chi_j = 0$, то $Z_j = 1 / ({}^j\vec{a}_j^T K_j {}^j\vec{a}_j)$. Если $j \neq 1$ и $\chi_j = 0$, то

$$\left\{ U_j = Z_j K_j {}^j \vec{a}_j {}^j \vec{a}_j^T K_j; \tilde{G}_j = G_j - U_j {}^j T_{j-1}; \right. \\ \left. \tilde{H}_j = H_j - U_j {}^j R_{j-1} {}^{j-1} \Phi_{j-1}; {}^j \tilde{p}_j = {}^j \vec{p}_j + K_j {}^j \vec{a}_j (\tau_j - {}^j \vec{a}_j^T {}^j \vec{p}_j) Z_j \right\}.$$

Если $j \neq 1$ и $\chi_j = 1$, то $\{\tilde{G}_j = G_j; \tilde{H}_j = H_j; {}^j \tilde{p}_j = {}^j \vec{p}_j + K_j {}^j \vec{a}_j \ddot{q}_j^r\}$.

Вычисление

$${}^{j-1} J_{rrj-1}^* = {}^{j-1} J_{rrj-1} + {}^j T_{j-1}^T \tilde{G}_j; {}^{j-1} J_{rej-1}^* = {}^{j-1} J_{rej-1} + {}^j T_{j-1}^T \tilde{H}_j; \\ {}^{j-1} J_{erj-1}^* = {}^{j-1} J_{erj-1}^T; {}^{j-1} J_{eej-1}^* = {}^{j-1} J_{eej-1} + {}^{j-1} \Phi_{j-1}^T {}^j R_{j-1}^T {}^j \tilde{p}_j; \\ {}^{j-1} \vec{C}_{j-1}^{r*} = {}^{j-1} \vec{C}_{j-1}^r + {}^j T_{j-1}^T {}^j \tilde{p}_j; {}^{j-1} \vec{C}_{j-1}^{e*} = {}^{j-1} \vec{C}_{j-1}^e + {}^{j-1} \Phi_{j-1}^T {}^j R_{j-1}^T {}^j \tilde{p}_j.$$

Третий (восходящий) рекурсивный цикл [5] позволяет определить для подмножества $\{M_1\}$ обобщенные ускорения

$$\ddot{q}_j^r = Z_j \left[\tau_j - {}^j \vec{a}_j^T \left(G_j {}^{j-1} \vec{V}_{j-1} + H_j \ddot{q}_{j-1}^e + {}^j \vec{p}_j \right) \right], \text{ если } \chi_j = 0, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4)$$

для $\{M\}$ — ускорения звеньев и ускорения варьируемых параметров упругих перемещений, если потребуется, то и внутренние усилия в парах:

$${}^j \vec{V}_j = {}^j T_{j-1} {}^{j-1} \vec{V}_{j-1} + {}^j R_{j-1} {}^{j-1} \Phi_{j-1} \ddot{q}_{j-1}^e + \ddot{q}_j^r {}^j \vec{a}_j + {}^j \vec{h}_j, \quad j = 1, \dots, n; \\ \ddot{q}_j^e = -{}^j J_{eej}^{*-1} ({}^j J_{erj}^* {}^j \vec{V}_j + {}^j \vec{C}_j^{e*}), \quad j = 1, \dots, n; \quad (5) \\ {}^j \vec{F}_j = K_j {}^j \vec{V}_j + {}^j \vec{m}_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

с учетом в (4) и (5) инициализаций ${}^0 \vec{V}_0 = [{}^0 \vec{g}^T, \vec{0}_3^T]^T$ и $\ddot{q}_0^e = \vec{0}_{N_0}$. Для подмножества $\{M_2\}$ приводные усилия имеют вид

$$\Gamma_j = {}^j \vec{a}_j^T (K_j {}^j \vec{V}_j + {}^j \vec{m}_j) + F_{sj} \text{sign}(\dot{q}_j^r) + F_{vj} \dot{q}_j^r, \text{ если } \chi_j = 1, j \in \{1, \dots, n\},$$

где F_{sj} , F_{vj} — коэффициенты сухого и вязкого трения в парах.

Вследствие рассмотренного расчетного алгоритма численного решения смешанной задачи динамики упругих манипуляторов проиллюстрируем функционирование (см. рис. 2, а) структурной единицы кинематической цепи, соответствующей методу Ньютона — Эйлера [9].

Алгоритм численного решения смешанной задачи динамики упругих манипуляторов на основе обобщенного метода Ньютона — Эйлера предполагает схематическую иллюстрацию преобразования кинематических и динамических характеристик на уровне структурной единицы кинематической цепи. Образованный таким образом «удельный» преобразователь скоростей, ускорений и усилий называют кинестатическим элементом [9, 11]. Условная схема такого преобразователя приведена на рис. 3.

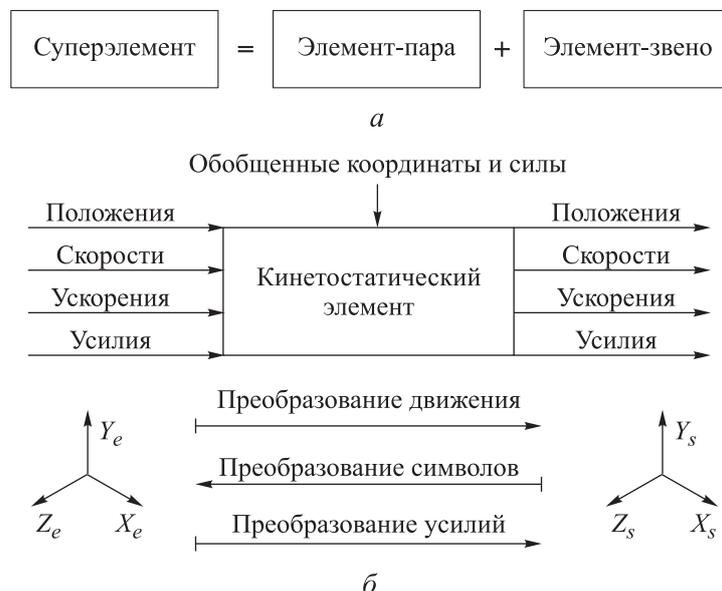


Рис. 3. Схемы образования (а) и функционирования (б) суперэлемента

Метод численного интегрирования нелинейных уравнений движения. Метод основан на общей схеме численного интегрирования Ньюмарка:

$$\begin{aligned} \vec{x}_j(t + \Delta t) &= \vec{x}_j(t) + \vec{\dot{x}}_j(t)\Delta t + [(0,5 - \beta)\vec{\ddot{x}}_j(t) + \beta\vec{\ddot{x}}_j(t + \Delta t)]\Delta t^2; \\ \vec{\dot{x}}_j(t + \Delta t) &= \vec{\dot{x}}_j(t) + [(1,0 - \gamma)\vec{\ddot{x}}_j(t) + \gamma\vec{\ddot{x}}_j(t + \Delta t)]\Delta t, \end{aligned} \quad (6)$$

$$j = 1, \dots, n; \quad t \in [0, T - \Delta t],$$

где $\vec{x}_j = [q_j^r, (\bar{q}_j^e)^T]^T$; β, γ — постоянные ($0 \leq \beta \leq 0,5, 0 \leq \gamma \leq 1$). В случае когда $\beta = \gamma = 0$, система уравнений (6) вырождается в явную схему интегрирования Ньюмарка, использование которой зачастую сопряжено с необходимостью выбора чрезвычайно малого шага интегрирования Δt [5, 10]. В случае $\beta \neq 0$ или $\gamma \neq 0$ речь идет о неявной схеме численного интегрирования Ньюмарка (6) системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Решение системы линеаризованных уравнений движения упругих манипуляторов осуществляется с использованием метода Ньютона [5]. Точное вычисление якобиана (матрицы итераций) в расчетной формуле метода Ньютона ускоряет процесс сходимости, но предполагает громоздкий расчет тангенциальных матриц жесткости и демпфирования, особенно при большом общем числе степеней свободы рассматриваемых систем. В то же время ассимиляция якобиана с матрицей масс манипулято-

ра, которая оправдана для жестких систем, вызывает серьезные сомнения при наличии в кинематической цепи упругих звеньев [10, 11]. В связи с этим особый практический интерес представляет компромиссный подход к преодолению указанных трудностей вычислительного характера, заключающийся в замещении точного выражения матрицы итерации ее редуцированным аналогом (рис. 4) [5].

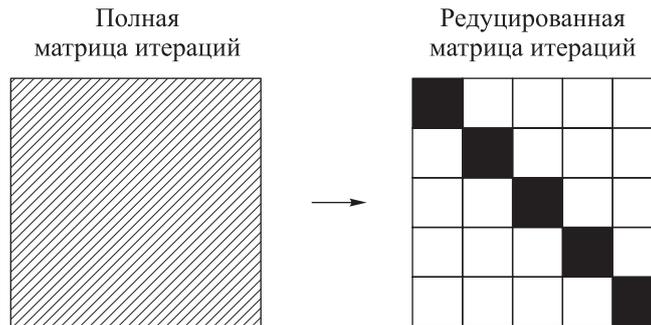


Рис. 4. Структурное изображение матриц итерации

Численное моделирование упругого пространственного манипулятора без обращения его матрицы масс. Рассмотрим численную реализацию смешанной задачи динамики упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона — Эйлера на примере численного решения обратной задачи динамики упругого пространственного пятизвенного манипулятора без участия сил сопротивления (рис. 5). Симуляция манипулятора предполагается в интервале $[0, T]$ между начальным (рис. 5, а) и конечным (рис. 5, б) его положениями при отсутствии гравитации ($g = 0$). Звенья C_1 и C_4 манипулятора полагаются жесткими, звенья C_2 и C_3 — упругими, а опорная стойка C_0 — неподвижной и недеформируемой. Звенья C_2 и C_3 предполагаются балками с равномерно распределенными по всей длине упругостями. В точке, совпадающей с центром тяжести звена C_4 , устанавливают груз массой $m^* = 200$ кг, который подлежит транспортировке в процессе движения манипулятора [16, 17].

Длины звеньев заданного манипулятора (см. рис. 5): $L_1 = 0,3$ м, $L_2 = 4,0$ м, $L_3 = 5,0$ м, $L_4 = 0,5$ м при плотности $\rho = \rho_i = 2699$ кг/м³, $i = 1, \dots, 4$. Жесткие звенья C_1 и C_4 полагают сплошными, круглого поперечного сечения с радиусом $r = r_1 = r_4 = 0,5$ м. Упругие звенья C_2 и C_3 — полые, кольцевого поперечного сечения с радиусами внешних и внутренних окружностей $r_2^e = r_3^e = 0,5$ м и $r_2^i = r_3^i = 0,04$ м, их модули Юнга $E = E_2 = E_3 = 6,895 \cdot 10^{10}$ Н/м².

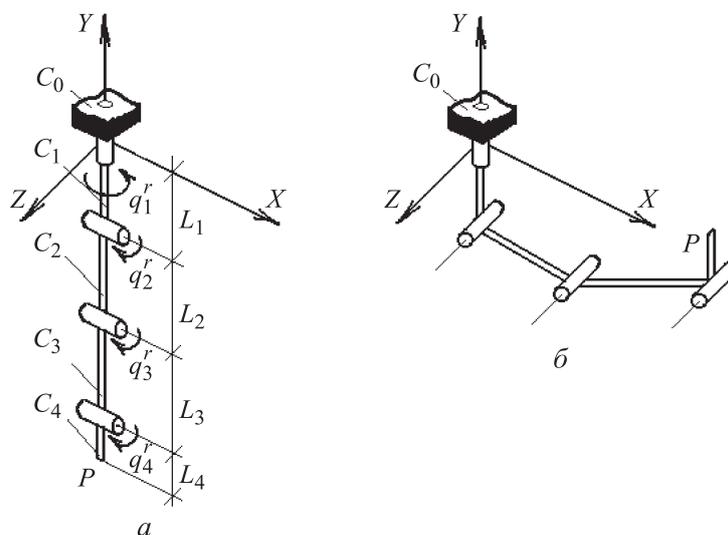


Рис. 5. Схемы предельных положений упругого манипулятора

Обратная задача динамики упругого пространственного манипулятора формулируется следующим образом. Предполагается, что заданы законы изменения обобщенных ускорений \ddot{q}_k^r , $k=1, \dots, 4$, требуется определить законы изменения обобщенных сил Γ_k , $k=1, \dots, 4$. Сопряжения звеньев предполагают идеальными, вследствие чего приводные усилия в кинематических парах отождествляются с обобщенными силами.

Задача предусматривает определение образующегося вследствие упругих деформаций отклонения точки P исполнительного органа манипулятора (см. рис. 5) от фиктивного положения, занимаемого той же точкой в предположении абсолютной жесткости звеньев. Это отклонение в проекциях на оси неподвижной системы координат XYZ выражается через упругие перемещения звеньев C_2 и C_3 геометрическими соотношениями [16]:

$$\Delta X_P = [u_2^y \cos(q_2^r + \pi/2) + u_3^y \cos(q_2^r + q_3^r + \pi/2)] \cos(q_1^r) + (u_2^z + u_3^z) \sin(q_1^r);$$

$$\Delta Y_P = u_2^y \sin(q_2^r + \pi/2) + u_3^y \sin(q_2^r + q_3^r + \pi/2);$$

$$\Delta Z_P = [u_2^y \cos(q_2^r + \pi/2) + u_3^y \cos(q_2^r + q_3^r + \pi/2)] \sin(q_1^r) - (u_2^z + u_3^z) \cos(q_1^r).$$

Обратная задача динамики упругого пространственного пятизвенного манипулятора формулируется при законах движения звеньев

$$q_1^r = q_4^r = \begin{cases} \pi / (2T_s) [t - T_s / (2\pi) \sin(2\pi t / T_s)], & 0 \leq t \leq T_s \\ \pi / 2, & T_s < t \leq T \end{cases}; \quad (7)$$

$$q_2^r = q_3^r = \begin{cases} \pi / (4T_s) [t - T_s / (2\pi) \sin(2\pi t / T_s)], & 0 \leq t \leq T_s \\ \pi / 4, & T_s < t \leq T \end{cases}. \quad (8)$$

Здесь $T_s = 15$ с, $T_s = 25$ с — пределы конечных промежутков.

Одно- и двукратным дифференцированием выражений (7) и (8) по времени получают аналитические выражения для обобщенных скоростей и обобщенных ускорений исследуемого манипулятора.

Начальные условия задачи в обобщенных координатах и скоростях определяют значениями обобщенных координат (7) и (8), а также их первых обыкновенных производных по времени в момент времени $t = 0$, которые соответствуют начальному положению пространственного пятизвенного манипулятора (см. рис. 5, а). Начальные условия в упругих переменных и в их скоростях принимают нулевыми ($i = 2, 3$):

$$\begin{aligned} \bar{q}_i^{e,y}(0) &= \bar{\dot{q}}_i^{e,y} = 0; \\ \bar{q}_i^{e,z}(0) &= \bar{\dot{q}}_i^{e,z} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения движения рассматриваемого упругого пространственного манипулятора могут быть выведены в явном виде путем несложных преобразований обобщенного формализма Ньютона — Эйлера: вследствие подстановки вторых дифференциальных уравнений системы (3) в систему матричных дифференциальных уравнений динамического равновесия звеньев (2), последующего объединения полученных уравнений и исключения в них внутренних усилий. В результате образуется система нелинейных дифференциальных уравнений движения упругого пятизвенного манипулятора, которая в блочно-матричной форме записывается как

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & 0 \\ M_{er} & M_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\ddot{Q}}^r \\ \bar{\ddot{Q}}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma} + \bar{E}_r \\ \bar{E}_e \end{bmatrix},$$

где $\bar{\ddot{Q}}^r = [\bar{\ddot{q}}_1^r, \bar{\ddot{q}}_2^r, \bar{\ddot{q}}_3^r, \bar{\ddot{q}}_4^r]^T$, $\bar{\ddot{Q}}^e = [0, \bar{\ddot{q}}_2^{eT}, \bar{\ddot{q}}_3^{eT}, 0]^T$, $\bar{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4]^T$, причем блоки M_{rr} , M_{er} , M_{ee} матрицы масс и силы \bar{E}_r , \bar{E}_e , содержащие нелинейные члены сцепления жесткой и упругой совокупностей звеньев, выражаются через инерционные блоки и кориолисовы силы в исходной системе дифференциальных уравнений (2), их выражения приведены в [20].

Моделирование упругостей второго и третьего звеньев осуществляется в два этапа. На первом этапе указанным звеньям присваивают одну изгибную степень свободы, координатные функции Рэлея — Ритца в минимизирующих формах (1) принимают равными ($i = 2, 3$):

$$\begin{aligned} {}^i\Phi_{di,1}^y(x) &= {}^i\Phi_{di,1}^z(x) = 3(x/L_i)^2 - 2(x/L_i)^3; \\ {}^i\Phi_{ri,1}^z(x) &= -{}^i\Phi_{ri,1}^y(x) = 3x / (L_i^2(1 - x/L_i)), \end{aligned} \quad (9)$$

удовлетворяя геометрическим граничным условиям

$$\begin{aligned} {}^i\Phi_{di,1}^y(0) &= {}^i\Phi_{di,1}^z(0) = 0; \\ {}^i\Phi_{ri,1}^y(0) &= {}^i\Phi_{ri,1}^z(0) = 0; \\ {}^i\Phi_{ri,1}^y(L_i) &= {}^i\Phi_{ri,1}^z(L_i) = 0; \\ {}^i\Phi_{di,1}^y(L_i) &= {}^i\Phi_{di,1}^z(L_i) = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

На втором этапе моделирования деформируемым звеньям сообщают две изгибные степени свободы, их также подчиняют аппроксимации кинематически допустимыми координатными функциями Рэля — Ритца (9) ($i = 2, 3$):

$$\begin{aligned} {}^i\Phi_{di,2}^y(x) &= {}^i\Phi_{di,2}^z(x) = -8(x/L_i)^4 + 14(x/L_i)^3 - 5(x/L_i)^2; \\ {}^i\Phi_{ri,2}^z(x) &= -{}^i\Phi_{ri,2}^y(x) = -16(x/L_i)^3 + 21(x/L_i)^2 - 5x/L_i, \end{aligned} \quad (11)$$

удовлетворяющими граничным условиям (10) и

$$\begin{aligned} {}^i\Phi_{di,2}^y(0) &= {}^i\Phi_{di,2}^z(0) = 0; \\ {}^i\Phi_{ri,2}^y(0) &= {}^i\Phi_{ri,2}^z(0) = 0; \\ {}^i\Phi_{di,2}^y(L_i/2) &= {}^i\Phi_{di,2}^z(L_i/2) = 0; \\ {}^i\Phi_{ri,2}^y(L_i) &= {}^i\Phi_{ri,2}^z(L_i) = 0; \\ {}^i\Phi_{di,2}^y(L_i) &= {}^i\Phi_{di,2}^z(L_i) = 1. \end{aligned}$$

На первом этапе численную реализацию динамического анализа исследуемого манипулятора проводят с использованием явной схемы численного интегрирования Ньюмарка. Первичное тестирование показывает, что результаты моделирования распределенных упругостей на основе аппроксимаций (9) визуально не отличаются от результатов воспроизведения упругостей звеньев манипулятора, полученных в силу уточненных приближений (9) и (11).

Вторичную симуляцию проводят при поддержке метода предиктора-корректора на основе неявной схемы численного интегрирования Ньюмарка с аппроксимацией в виде редуцированной матрицы итераций.

Результаты численного воспроизведения функции упругого отклонения точки P манипулятора (см. рис. 5), полученные с использованием яв-

ной и неявной схем численного интегрирования, по точности приближения практически не отличаются друг от друга. Расчетное время вычислительного процесса в обоих случаях существенно различается (50 и 6 с соответственно). Результаты вычисления упругого отклонения точки P в проекциях на оси координат X , Y и Z при шаге интегрирования $\Delta t = 0,1$ с приведены на рис. 6.

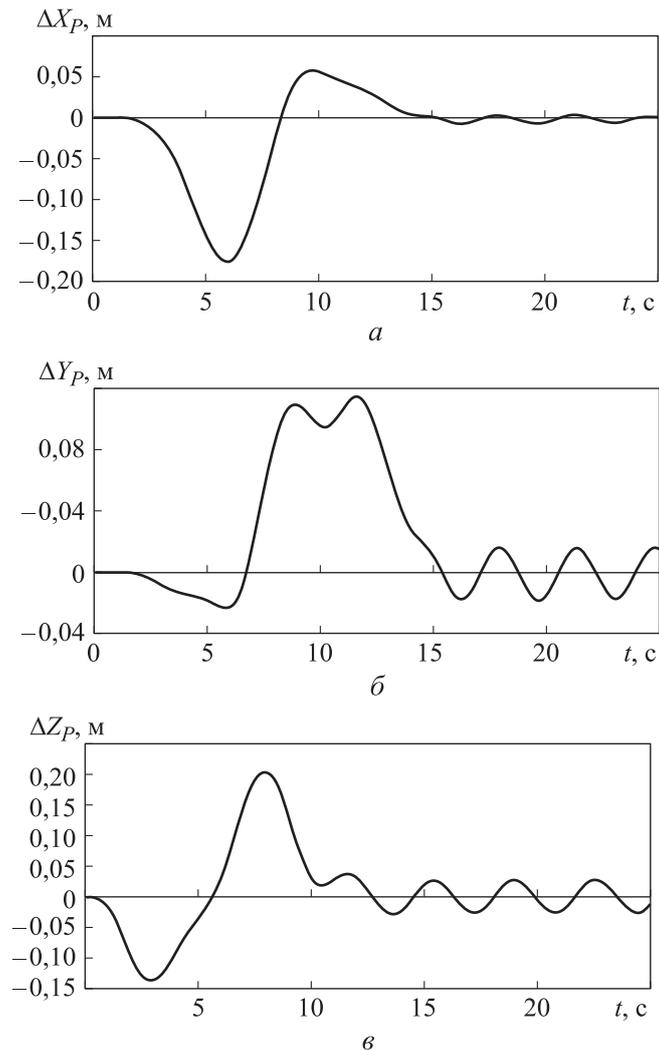


Рис. 6. Упругое отклонение рабочего органа манипулятора в проекциях на оси координат X (а), Y (б), Z (в)

Сопоставление результатов численного решения задачи с соответствующими показателями из работы [16], в которой использована процедура обращения матрицы масс, позволяет убедиться в достаточно высокой точности моделирования вычислительного процесса задачи.

Полученные результаты сопоставлены с соответствующими показателями, установленными на том же примере из работы [17], в которой применена рекурсивная методика, основанная на расчетной стратегии без обращения матрицы масс. При неизменной точности моделирования предлагаемая вычислительная методика обеспечивает решение примера с минимальным расчетным временем $T_c = 6$ с, тогда как наименьшее хронометрическое показание, приведенное в [17], составляет $T_c = 127$ с.

Заключение. Приведен алгоритм численного решения смешанной задачи динамики упругих манипуляторов, составленный на основе обобщенного метода Ньютона — Эйлера и итерационно-символьного исчисления без обращения матрицы масс. Изложена модификация метода Ньютона численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений движения упругих манипуляторов, адаптированная к представлению уравнений движения в форме Ньютона — Эйлера. Представлен пример численной реализации алгоритма, подтверждающий значительный выигрыш расчетного времени при неизменной точности моделирования по отношению к методам, использующим процедуру обращения матрицы масс. Преимущество расчетного метода установлено и по отношению к некоторым рекурсивным методам без обращения матрицы масс.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления манипуляционных роботов. М., Наука, 1978.
- [2] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *J. Dyn. Sys., Meas., Control.*, 1980, vol. 102, iss. 2, pp. 69–76.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3149599>
- [3] Boyer F., Coiffet P. Generalization of Newton — Euler model for flexible manipulators. *Int. J. Robot. Syst.*, 1996, vol. 13, iss. 1, pp. 11–24.
DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199601\)13:1<11::AID-ROB2>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199601)13:1<11::AID-ROB2>3.0.CO;2-Y)
- [4] Boyer F., Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics. *Int. J. Rob. Res.*, 1998, vol. 17, no. 3, pp. 282–293.
DOI: <https://doi.org/10.1177/027836499801700305>
- [5] Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н. и др. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона — Эйлера. *Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н.*, 2004, т. 57, № 1, с. 3–10.
- [6] Геворкян Г.А. Динамический анализ пространственных упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона — Эйлера. *Сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф.* Ереван, ГИУА, 2010, с. 126–128.

- [7] Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А. и др. Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей. *Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н.*, 2006, т. 59, № 1, С. 3–9.
- [8] Геворкян Г.А. Приложение обобщенного метода Ньютона — Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов. *Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н.*, 2010, т. 63, № 2, с. 133–138.
- [9] Геворкян Г.А. Принцип формальной и методологической оптимизации динамического анализа многозвенных систем. *Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н.*, 2017, т. 70, № 4, с. 401–410.
- [10] Verlinden O. Simulation du comportement dynamique de systemes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe. These de doctorat de la Faculte Polytechnique de Mons, 1994.
- [11] Verlinden O., Dehombreux P., Conti C., et al. A new formulation for the direct dynamic simulation of flexible mechanisms based on the Newton — Euler inverse method. *Int. J. Numer. Methods*, 1994, vol. 37, iss. 19, pp. 3363–3387.
DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620371910>
- [12] Dombre E., Khalil W. Modélisation et commande des robots. Edition Hermès, 1988.
- [13] Dombre E., Khalil W. Modélisation, identification et commande des robots. Edition Hermès, 1999.
- [14] Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *Int. J. Rob. Res.*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–30.
DOI: <https://doi.org/10.1177/027836498300200102>
- [15] Fisette P., Samin J.C. Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicit Newton — Euler recursive scheme. *Arch. Appl. Mech.*, 1996, vol. 66, no. 3, pp. 187–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00795220>
- [16] Avello A., De Jalon J.G., Bayo E. Dynamics of flexible multibody systems using Cartesian coordinates and large displacement theory. *Int. J. Numer. Methods Eng. Special Issue: Adaptive Meshing*, 1991, vol. 32, iss. 8, pp. 1543–1563.
DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620320804>
- [17] Kim S.-S., Haug E.J. A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part I: open-loop systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1988, vol. 71, iss. 3, pp. 293–314. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90037-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90037-0)
- [18] Jing Xie. Dynamic modeling and control of flexible manipulators: a review. *MECS*, 2017, pp. 270–275. DOI: <https://dx.doi.org/10.2991/mecs-17.2017.50>
- [19] Bascetta L., Ferretti G., Scaglioni B. Closed form Newton — Euler dynamic model of flexible manipulators. *Robotica*, 2017, vol. 35, iss. 5, pp. 1006–1030.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263574715000934>
- [20] Геворкян Г.А. Моделирование упругих древовидных динамических систем при наличии внешних голономных связей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 2 (89), с. 4–24.
DOI: <http://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-4-24>

Геворкян Грант Араратович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Республики Армения (Республика Армения, 0019, Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, д. 24).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Геворкян Г.А. Моделирование динамики упругих звеньев исполнительных механизмов манипуляторов без обращения их матриц масс. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 1 (100), с. 4–21.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-4-21>

**DYNAMIC MODELING OF FLEXIBLE MANIPULATORS
WITHOUT THEIR MASS MATRICES INVERSION**

H.A. Gevorkian

hrgevorkian@mail.ru

**Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences
of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia**

Abstract

In recent scientific literature, much attention is paid to the optimal modeling of elastic dynamical systems. The relevance of these studies is dictated by the ever-increasing demand in the control theory of high-precision robotic manipulators and automatic mechanisms, which consists in the need for continuous adjustment of the movement of their executive bodies in real time, with account for the flexibility of the constituent links of these systems. The generalized Newton — Euler method formulated in this regard served as a reliable platform for a subsequent progressive modification of dynamic analysis for a wide class of elastodynamic systems. The purpose of the study is to improve the existing computational algorithms to accelerate the computational process of dynamic analysis of flexible manipulators. In this regard, relying on symbolic-iterative calculus, we formulated and solved the mixed dynamic problem of the manipulators without inverting their mass matrices. Furthermore, we modified the Newton — Raphson method, intended for a numerical integration of the Newton — Euler equations of motion. Finally, we dynamically calculated the spatial five-elastic link manipulator by comparing the speed of computational processes carried out at constant accuracy

Keywords

Elastic dynamical systems, symbolic calculus, generalized Newton — Euler method, mixed dynamic problem, numerical integration, iteration matrix, Newton method

of the problem modeling, and assessed the efficiency of the method of dynamic analysis of the manipulators. In this study, we introduce an advanced method of dynamic modeling of flexible manipulators without the well-known procedure of their mass matrices inversion

Received 10.03.2021

Accepted 11.10.2021

© Author(s), 2022

REFERENCES

- [1] Medvedev V.S., Leskov A.G., Yushchenko A.S. *Sistemy upravleniya manipulyatsionnykh robotov* [Control system of a robot manipulator]. Moscow, Nauka Publ., 1978.
- [2] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *J. Dyn. Sys., Meas., Control.*, 1980, vol. 102, iss. 2, pp. 69–76.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3149599>
- [3] Boyer F., Coiffet P. Generalization of Newton — Euler model for flexible manipulators. *Int. J. Robot. Syst.*, 1996, vol. 13, iss. 1, pp. 11–24.
DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199601\)13:1<11::AID-ROB2>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199601)13:1<11::AID-ROB2>3.0.CO;2-Y)
- [4] Boyer F., Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics. *Int. J. Rob. Res.*, 1998, vol. 17, no. 3, pp. 282–293.
DOI: <https://doi.org/10.1177/027836499801700305>
- [5] Sarkisyan Yu.L., Stepanyan K.G., Azuz N., et al. Dynamic analysis of a flexible manipulator by Newton — Euler general method. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. T.N.*, 2004, vol. 57, no. 1, pp. 3–10 (in Russ.).
- [6] Gevorkian H.A. [Dynamic analysis of spatial flexible manipulators by Newton — Euler general method]. *Sb. tr. Mezhdunar. nauch.-tekh. konf.* [Proc. Int. Sci.-Tech. Conf.]. Erevan, GIUA Publ., 2010, pp. 126–128 (in Russ.).
- [7] Sarkisyan Yu.L., Stepanyan K.G., Gevorkian H.A., et al. Dynamic analysis of flexible tree-like systems without external links. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. T.N.*, 2006, vol. 59, no. 1, pp. 3–9 (in Russ.).
- [8] Gevorkian H.A. Application of Newton — Euler general method to the problems of optimum control on flexible mechanics. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. T.N.*, 2010, vol. 63, no. 2, pp. 133–138 (in Russ.).
- [9] Gevorkian H.A. Principles of formal and methodological optimization of multistage systems dynamic analysis. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. T.N.*, 2017, vol. 70, no. 4, pp. 401–410 (in Russ.).
- [10] Verlinden O. Simulation du comportement dynamique de systemes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe. These de doctorat de la Faculte Polytechnique de Mons, 1994.
- [11] Verlinden O., Dehombreux P., Conti C., et al. A new formulation for the direct dynamic simulation of flexible mechanisms based on the Newton — Euler inverse method. *Int. J. Numer. Methods*, 1994, vol. 37, iss. 19, pp. 3363–3387.
DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620371910>

- [12] Dombre E., Khalil W. *Modélisation et commande des robots*. Edition Hermès, 1988.
- [13] Dombre E., Khalil W. *Modélisation, identification et commande des robots*. Edition Hermès, 1999.
- [14] Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *Int. J. Rob. Res.*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–30.
DOI: <https://doi.org/10.1177/027836498300200102>
- [15] Fisette P., Samin J.C. Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicit Newton — Euler recursive scheme. *Arch. Appl. Mech.*, 1996, vol. 66, no. 3, pp. 187–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00795220>
- [16] Avello A., De Jalon J.G., Bayo E. Dynamics of flexible multibody systems using Cartesian coordinates and large displacement theory. *Int. J. Numer. Methods Eng. Special Issue: Adaptive Meshing*, 1991, vol. 32, iss. 8, pp. 1543–1563.
DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620320804>
- [17] Kim S.S., Haug E.J. A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part I: open-loop systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1988, vol. 71, iss. 3, pp. 293–314. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90037-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90037-0)
- [18] Jing Xie. Dynamic modeling and control of flexible manipulators: a review. *MECS*, 2017, pp. 270–275. DOI: <https://dx.doi.org/10.2991/mecs-17.2017.50>
- [19] Bascetta L., Ferretti G., Scaglioni B. Closed form Newton — Euler dynamic model of flexible manipulators. *Robotica*, 2017, vol. 35, iss. 5, pp. 1006–1030.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263574715000934>
- [20] Gevorkian H.A. Simulation of elastic tree-like dynamic systems in presence of external holonomic constraints. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 2 (89), pp. 4–24 (in Russ.).
DOI: <http://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-4-24>

Gevorkian H.A. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia (Marshala Baghramyana prospekt 24, Yerevan, 0019 Republic of Armenia).

Please cite this article in English as:

Gevorkian H.A. Dynamic modeling of flexible manipulators without their mass matrices inversion. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 1 (100), pp. 4–21 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-4-21>