УДК 539.3 DOI: 10.18698/1812-3368-2022-1-88-106

ОЦЕНКИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Е.В. Ненахов[1] newnew94@mail.ru
Э.М. Карташов[2] kartashov@mitht.ru

[1] МАИ, Москва, Российская Федерация
[2] РТУ МИРЭА, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены математические модели теории теплового удара в терминах динамической термоупругости. Описаны определяющие соотношения для краевых задач на базе уравнений гиперболического типа (идея локальной неравновесности процесса переноса теплоты), которые лежат в основе исследуемых моделей. Представлены граничные условия первого, второго и третьего рода в обобщенном виде для соответствующих типов теплового воздействия на границу поверхности твердого тела. Предложен новый подход к исследованию термической реакции твердого тела при интенсивном нагреве (охлаждении) его поверхности по операционным решениям соответствующих динамических задач. Приведены важные в практическом смысле инженерные расчетные соотношения для верхней оценки термического напряжения через скачки напряжений на фронте термоупругой волны. Последнее позволяет достаточно оперативно и качественно оценить степень опасности кратковременных динамических напряжений, при этом совершенно нет необходимости разрабатывать сложный программный комплекс для проведения численных экспериментов на основе точных аналитических решений задачи по выявлению кинетики изменения температурных напряжений с установлением точек максимума и минимума для сравнения напряжений с пределом прочности материала по справочным данным параметров, входящих в полученные оценки

Ключевые слова

Тепловой удар, динамическая термоупругость, операционные решения, верхняя оценка, температурные напряжения

Поступила 27.05.2021
Принята 23.06.2021

Введение. Современные конструкционные материалы, представляющие собой совокупность микро- или наноструктурных материалов, называют структурно-чувствительными материалами. Создание таких материалов на основе нанотехнологий — важное направление развития современного материаловедения. Эти материалы обладают уникальными физико-механическими свойствами, позволяющими эффективно использовать их в конструкциях, подверженных высокоинтенсивным внешним воздействиям [1–3]. Важным этапом в создании и использовании таких материалов является построение соответствующих математических моделей, позволяющих описать их поведение в широком диапазоне изменения внешних воздействий. Общая методология построения и исследования моделей далека от завершения и требует дальнейшего развития.

Излагаемый подход касается теории теплового удара в терминах динамической термоупругости. Указанная проблема — одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Последнее стимулирует разработку соответствующих модельных представлений для описания термической реакции конструкционных материалов в условиях интенсивного нагрева или охлаждения. Обзор исследований этой проблемы на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости приведен в [4]; систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, — в [2, 5–9].

Определяющие соотношения динамической термоупругости. Пусть D — конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль к S; $T(M, t)$ — распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 — начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ik}(M, t)$, $\varepsilon_{ik}(M, t)$, $U_i(M, t)$ $(i, k = x, y, z)$ — компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t), \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)\left[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)\right], \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + \left[\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_T\,(T(M, t) - T_0)\right]\delta_{ij}. \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность; $\mu = G$, G — модуль сдвига; $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ — изотермический коэффициент Ламе; ν — коэффициент Пуассона, при этом $2G(1+\nu) = E$, E — модуль Юнга; α_T — коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} — символ Кронекера; $\overline{e}(M,t) = U_{ii}(M,t) = \varepsilon_{ii}(M,t)$ — объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\overline{\sigma}(M,t) = \sigma_{nn}(M,t)\,(n = x, y, z)$ соотношением

$$\overline{e}(M,t) = \frac{1-2\nu}{E}\overline{\sigma}(M,t) + 3\alpha_T\left[T(M,t) - T_0\right]. \qquad (4)$$

Входящая в (3) температурная функция $T(M,t)$ находится из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности при соответствующих краевых условиях [10]. Соотношения (1)–(3) — общие соотношения динамической термоупругости, связывающие напряжения, деформации, перемещения и температуру. При переходе к конкретным случаям (1)–(3) необходимо преобразовать в так называемые уравнения совместности либо в напряжениях, либо в перемещениях, и для этих уравнений записывать соответствующую задачу динамической термоупругости. С использованием методов тензорной алгебры в [11] предложено уравнение совместности в напряжениях для динамических задач, обобщающее уравнение Бельтрами — Митчелла для динамических случаев:

$$(1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(M,t) + \sigma_{i,j}(M,t) + \alpha_T E\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}\Delta T(M,t)\sigma_{ij} + \left(T(M,t) - T_0\right)\right] =$$
$$= \frac{(1+\nu)\rho}{2G}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[2\sigma_{ij}(M,t) - \frac{\nu}{1-\nu^2}\sigma(M,t)\delta_{ij} + \right.$$
$$\left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu}\alpha_T\left(T(M,t) - T_0\right)\sigma_{ij}\right]\left(M \in D;\ t > 0;\ i, j = 1, 2, 3\right). \qquad (5)$$

Уравнение (5) справедливо в любой ортогональной системе координат, однако наиболее удобное приложение (5) для частных случаев реализуется в декартовой системе координат для тел канонической формы (бесконечная пластина; пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью; и др.) В тех случаях, когда необходимо учесть влияние кривизны поверхности твердого тела на температуру и напряжение (тела цилиндрической или шаровой формы; упругое полупространство с внутренней цилиндрической или сферической полостью; круговые диски и т. д.) задача ставится в перемещениях. Подставляя правые части (3) в (1) и используя (2), (4), получаем три уравнения

$$\Delta U_i(M,t)+\frac{1}{(1-2\nu)}\frac{\partial e(M,t)}{\partial i}-(\rho/G)\frac{\partial^2 U_i(M,t)}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{2(1+\nu)\alpha_T}{(1-2\nu)}\frac{\partial\left[T(M,t)-T_0\right]}{\partial i}\ (i=x,\ y,\ z), \tag{6}$$

которые формально можно записать в виде векторного равенства

$$\Delta\vec{U}(M,t)+\frac{1}{(1-2\nu)}\mathrm{grad}\left[\mathrm{div}\,\vec{U}(M,t)\right]-(\rho/G)\frac{\partial^2\vec{U}(M,t)}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_T\mathrm{grad}\left[T(M,t)-T_0\right]. \tag{7}$$

Важным аспектом в (1)–(3) при исследовании проблемы теплового удара является выбор классической феноменологии распространения теплоты в области D (в твердом теле). В рамках переноса теплоты по закону Фурье $\vec{q}(M,t)=-\lambda\mathrm{grad}\,T(M,t)$, приводящего к моделям нестационарной теплопроводности для уравнений параболического типа [10], термонапряженное состояние области D при $t>0$ может возникать при следующих наиболее распространенных на практике режимах теплового воздействия на границу S, создающих термический удар:

– температурный нагрев $T(M,t)=T_{\text{c}}(t)$, $M\in S$, $t>0$ $\left(T_{\text{c}}(t)>T_0,\ t\geq 0\right)$;

– тепловой нагрев $\partial T(M,t)/\partial n=-(1/\lambda_T)q_0(t)$, $M\in S$, $t>0$ (λ_T — теплопроводность материала; $q_0(t)$ — тепловой поток);

– нагрев средой $\partial T(M,t)/\partial n=-h\left[T(M,t)-T_{\text{c}}(t)\right]$, $M\in S$, $t>0$ (h — относительный коэффициент теплообмена; $T_{\text{c}}(t)$ — температура окружающей среды, $T_{\text{c}}(t)>T_0$, $t\geq 0$);

– действие внутренних источников теплоты.

В равной мере могут быть описаны и случаи охлаждения границы твердого тела (области D).

За последние годы усилился интерес к обобщенной термомеханике [1], в основе которой лежит идея локальной неравновесности процесса переноса теплоты. Последнее закладывается в обобщенный закон Максвелла — Каттанео — Лыкова — Вернотта $\vec{q}=(M,t)=-\lambda\mathrm{grad}\,T(M,t)-$ $-\tau_r\,\partial\vec{q}(M,t)/\partial t$, где τ_r — мера инерции теплового потока, связанная со скоростью распространения теплоты соотношением $\upsilon_T=\sqrt{a/\tau_r}$ (a — температуропроводность). Обобщенный закон переноса приводит к математическим моделям гиперболического типа с граничными условиями, записанными в иной (обобщенной) форме. Это соответствует вопросам корректности постановки краевых задач нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа, рассмотренных в [11]. Так, в случае теплового нагрева следует записать

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\right|_{M\in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau = -\frac{1}{\lambda_T}q_0(t) \quad (t>0), \tag{8}$$

в случае нагрева средой —

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \left.\frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\right|_{M\in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau = -h\left[T(M,t)\big|_{M\in S} - T_{\text{c}}(t)\right] \quad (t>0), \tag{9}$$

в случае температурного нагрева —

$$T(M,t)\big|_{M\in S} = T_{\text{c}}(t) \quad (t>0). \tag{10}$$

Можно выделить широкий класс задач [12], в которых сочетание теплофизических свойств материалов, геометрических размеров конструкций и интересующая исследователя тепловая реакция тела касается тонкого поверхностного слоя, называемого термическим. Даже в условиях высоких скоростей поверхностного нагрева или охлаждения с удалением от граничной поверхности в глубь тела температуры снижаются. С увеличением глубины снижение происходит так интенсивно, что температурное состояние твердого тела оказывается существенным лишь в термическом слое, в котором и сосредоточено основное количество теплоты, поглощенное за близкое к началу нагрева время. Поскольку толщина поверхностного слоя мала по сравнению с размерами тела, твердое тело можно моделировать полуограниченной областью, например упругим полупространством $z \ge 0$. Последнее позволяет получать более наглядные и удобные с позиции практического использования аналитические решения задач нестационарной теплопроводности и термомеханики. В качестве применения соотношения (5) рассмотрим последовательно несколько моделей термической реакции области $z \ge 0$, $t \ge 0$ на нагрев (охлаждение), которые представляют значительный интерес для многих приложений, отмеченных в [12]. В первом случае рассмотрим интенсивный нагрев (охлаждение) поверхности области: поверхностный диэлектрический нагрев; расчет термических напряжений в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории автоматических систем регулирования температуры;

при исследовании области звуковых частот металлов при высоких или очень низких значениях температуры поверхности; многочисленные случаи резкой смены температуры поверхности космических, авиационных объектов, а также объектов машиностроения и др.

Во втором случае рассмотрим нагрев (охлаждение) границы области постоянным тепловым потоком. Последнее встречается при генерировании теплоты в результате пропускания электрического тока через плоский нагревательный элемент; при выделении теплоты вследствие трения; в условиях высокочастотного индукционного нагрева; в ранних фазах нагрева печи или помещения; при нагреве земной поверхности в ясный безветренный день (знание термонапряженного состояния внутри Земли существенно для понимания геофизических явлений, например магнитного поля Земли, пластических свойств вещества Земли, а также для выяснения происхождения и причин вулканизма и тектонических перемещений); при изучении нагрева тела сантиметровыми волнами и др.

В третьем случае тепловой поток с поверхности области является линейной функцией разности температуры этой поверхности и окружающей ее среды. Последнее имеет место при излучении черного тела; при теплопередаче через тонкую пленку на поверхности тела; при исследовании утечки теплоты в подводных кабелях; индукционном нагреве поверхности металлов; определении потерь теплоты через газовую оболочку (или жидкую среду), окружающую твердое тело; в многочисленных технологических процессах, требующих предварительной тепловой обработки изделия в тепловой камере, и др.

В этих условиях при одномерном движении имеем: $U_x = U_y = 0$; $U_z = U_z(z,t)$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z,t)$; $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$; напряжения $\sigma_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z,t)$ для $i = j$ $(i, j = x, y, z)$; температурная функция $T = T(z,t)$; уравнение (5) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial t^2} \quad (z > 0,\ t > 0), \tag{11}$$

где $\upsilon_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (3), (4) имеют вид

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}(z,t) - \frac{E\alpha_T\left[T_i(z,t) - T_0\right]}{1-\nu}, \tag{12}$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z,t)=\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\sigma_{zz}(z,t)+\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T\left[T_i(z,t)-T_0\right]\quad(i=1,\,2,\,3). \quad (13)$$

Далее рассмотрим основные математические модели теплового удара в рамках обобщенной термомеханики по условиям нагрева (8)–(10). К уравнению (11) добавим начальные и граничные условия:

$$\sigma_{zz}(z,t)\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial\sigma_{zz}(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0\ \ (z\ge 0), \quad (14)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)\big|_{z=0}=\sigma_{zz}(z,t)\big|_{z=\infty}=0\ \ (t>0). \quad (15)$$

Предполагаем, что граничная поверхность области $z\ge 0,\ t\ge 0$ находится в условиях либо температурного нагрева (10) температуры $\varphi_1(t)$, либо теплового нагрева (8) потоком теплоты $\varphi_2(t)$, либо нагрева средой (9) температурой $\varphi_3(t)$. При этих условиях температурная функция $T_i(z,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}-\tau_r\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}\quad(z>0,\ t>0), \quad (16)$$

$$T_i(z,t)\big|_{t=0}=T_0,\ \left.\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0\ \ (z\ge 0), \quad (17)$$

$$\beta_1\frac{1}{\tau_r}\int_0^t\left.\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau+\beta_2 h\left[T_i(z,t)\big|_{z=0}-\varphi_i(t)\right]=$$

$$=-\beta_3\left(1/\lambda_T\right)\varphi_i(t)\ \ (t>0), \quad (18)$$

где $\beta_1=\beta_3=0,\ \beta_2=1$ при $i=1$ (температурный нагрев); $\beta_1=\beta_3=1,\ \beta_2=0$ при $i=2$ (тепловой нагрев); $\beta_1=\beta_2=1,\ \beta_3=0$ при $i=3$ (нагрев средой).

Решение задачи (11)–(18) запишем в безразмерных переменных:

$$\xi=\frac{z}{\sqrt{a\tau_r}};\ \tau=\frac{t}{\tau_r};\ \mathrm{Bi}=h\sqrt{a\tau_r};\ \beta=\upsilon_p/\upsilon_T;\ S_T=\alpha_T(3\lambda+2\mu)=\frac{\alpha_T E}{1-2\nu};$$

$$W_i(\xi,\tau)=\frac{T_i(z,t)-T_0}{T_{\text{с}}-T_0},\ \ i=1,\ 3;$$

$$\varphi_i(\tau)=\frac{\varphi_i(t)-T_0}{T_{\text{с}}-T_0},\ \ i=1,\ 3; \quad (19)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)=\frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S_T(T_{\text{с}}-T_0)},\ \ i=1,\ 3;$$

$$W_2(\xi,\tau)=\frac{T_2(z,t)-T_0}{q_0\sqrt{a\tau_r}/\lambda_T};$$
$$\varphi_2(\tau)=\frac{\varphi_2(t)}{q_0/\lambda_T}; \qquad (19)$$
$$\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)=\frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S_T q_0\sqrt{a\tau_r}/\lambda_T}.$$

Для сохранения размерности в (19) введено несколько параметров. Для нахождения искомого решения введем преобразование Лапласа:

$$\bar{W}_i(\xi,p)=\int_0^\infty \exp(-p\tau)W_i(\xi,\tau)\,d\tau;$$
$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi,p)=\int_0^\infty \exp(-p\tau)\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)\,d\tau. \qquad (20)$$

Операционное решение задачи (11)–(18) в координатах (ξ,τ) имеет вид

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi,p)=\bar{f}_i(p)\left\{\exp\left[-\xi\sqrt{p(p+1)}\right]-\exp\left[-(\xi/\beta)p\right]\right\}, \qquad (21)$$

где

$$\bar{f}_i(p)=\begin{cases}\dfrac{\gamma_1 p\bar{\varphi}_1(p)}{p+\gamma_2}, & i=1;\\ \dfrac{\gamma_1\sqrt{p(p+1)}\bar{\varphi}_2(p)}{p+\gamma_2}, & i=2;\\ \dfrac{\gamma_1 \mathrm{Bi}\, p\sqrt{p+1}\bar{\varphi}_3(p)}{\left(\sqrt{p}+\mathrm{Bi}\sqrt{p+1}\right)(p+\gamma_2)}, & i=3,\end{cases} \qquad (22)$$

$$\gamma_1=\frac{1}{\beta^2-1};\ \gamma_2=\frac{\beta^2}{\beta^2-1}. \qquad (23)$$

Оценки температурных напряжений по операционному решению задачи для локально-неравновесного теплопереноса. Остановимся на общепринятом подходе исследования проблемы теплового удара. Операционное решение задачи переводится в пространство оригиналов [1, 4, 13–15], что связано с длительными вычислительными процедурами. По найденным оригиналам проводят численные эксперименты по кинетике изменения температурных напряжений, устанавливают их максимальное значение и при необходимости сравнивают с пределом прочности по справочным данным для конкретных материалов. Тем самым устанавливают степень их опасности.

Однако в дополнение к рассмотренному подходу можно указать следующий весьма эффективный способ быстрой оценки величины термических напряжений, практически не применявшийся ранее в термомеханике и составляющий главную цель настоящей работы. Как следует из операционного решения динамической задачи, наличие в (21) слагаемого $\bar{f}_i(p)\exp\left[-(\xi/\beta)p\right]$ показывает, что можно предложить расчетную инженерную формулу для верхней оценки величины температурных напряжений через скачок напряжений в (21) на фронте термоупругой волны. Для этого используем теорему запаздывания [10] в виде

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \begin{cases} 0, t < t_0, \\ f(t-t_0), t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке t_0 происходит скачок функции $f(t)$, величина которого рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \to t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{p \to \infty} p\bar{f}(p). \tag{24}$$

Сначала находим величину скачка для напряжений в координатах (ξ, τ), затем перейдем к исходным напряжениям $\sigma_{zz}(z,t)$ в исходной области $z > 0$, $t > 0$, используя формулы перехода (19). Окончательно получаем искомые соотношения:

$$|\Delta_i| = |\sigma_{zz}(z,t)|_{\max} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha_T E}{(1-2\nu)\left|(\upsilon_p/\upsilon_T)^2 - 1\right|} \lim\limits_{t\to 0}\left[\varphi_1(t) - T_0\right], \quad i=1; \\ \dfrac{\alpha_T E\sqrt{a\tau_r}}{(1-2\nu)\left|(\upsilon_p/\upsilon_T)^2 - 1\right|} \lim\limits_{t\to 0}\varphi_2(t), \quad i=2; \\ \dfrac{\alpha_T E}{(1-2\nu)\left[1+1/\left(h\sqrt{a\tau_r}\right)\right]\left|(\upsilon_p/\upsilon_T)^2\right|} \lim\limits_{t\to 0}\left[\varphi_3(t) - T_0\right], \quad i=3. \end{cases} \tag{25}$$

Соотношения (25) содержат граничные функции $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, что позволяет рассмотреть в (18) широкий спектр тепловых нагрузок (импульсные, пульсирующие, периодические, апериодические, кусочно-постоянные и др.). В частности, для наиболее часто встречаемых на практике случаев теплового удара [1] $\varphi_i(t) = T_c$ $(i = 1, 3)$, $\varphi_2(2) = (1/\lambda_T) q_0$ $(t > 0)$ расчетные формулы (25) дают важные оценки для величины температурных напряжений

$$\left|\sigma_{zz}(z,t)\right|_{\max} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_T E (T_c - T_0)}{(1-2\nu)\left|(\upsilon_p/\upsilon_T)^2 - 1\right|}, & i = 1; \\ \dfrac{\alpha_T E q_0 \sqrt{a\tau_r}/\lambda_T}{(1-2\nu)\left|(\upsilon_p/\upsilon_T)^2 - 1\right|}, & i = 2; \\ \dfrac{\alpha_T E (T_c - T_0)}{(1-2\nu)\left[1 + 1/\left(h\sqrt{a\tau_r}\right)\right]\left|(\upsilon_p/\upsilon_T)^2 - 1\right|}, & i = 3, \end{cases} \qquad (26)$$

зависящие от нескольких физико-механических и теплофизических параметров материала, в том числе от соотношения скоростей распространения звука и теплоты в среде. Оценки (25), (26) справедливы как при интенсивном нагреве, когда в фиксированном сечении $z = \text{const}$ $(\xi = \text{const})$ возникают напряжения сжатия, так и при охлаждении, когда возникают более опасные напряжения растяжения.

Оценки температурных напряжений для области с движущейся во времени границей в рамках феноменологии Фурье. К числу наиболее сложных проблем теории теплового удара относится изучение термической реакции области, граница которой перемещается во времени, на нагрев или охлаждение. Это представляет особый интерес для теории роста кристаллов; теории плотин; механики почв; термики нефтяных пластов; теории фильтрации; в электродинамических задачах; в теории прочности при условиях теплового удара и т. д. Сложность нахождения аналитического решения динамической задачи для указанной области определяется тем, что в рассматриваемом случае непосредственно неприменимы классические аналитические методы математической физики, так как в рамках этих методов не удается согласовать решение основных уравнений задачи с движением границы области. Необходимо применять специальные методы или модифицировать известные подходы [10].

Рассмотрим соотношения (11), (14), (15) для $\sigma_{zz}(z,t)$ в области $z > l + \upsilon t$, $t > 0$ $(\upsilon = \text{const})$, где температурная функция $T_i(z,t)$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяет условиям температурного нагрева $(i = 1)$, теплового нагрева $(i = 2)$, нагрева средой $(i = 3)$:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2},\ z > l + \upsilon t,\ t > 0, \tag{27}$$

$$T_i\left(z,t\right)\big|_{t=0} = T_0,\ z \ge l, \tag{28}$$

$$\beta_1 \frac{\partial T_i\left(z,t\right)}{\partial z}\bigg|_{z=l+\upsilon t} + \beta_2 h\left[T_i\left(z,t\right)\big|_{z=l+\upsilon t} - \varphi_i\left(t\right)\right] =$$

$$= -\beta_3\left(1/\lambda_T\right)\varphi_i\left(t\right),\ t > 0, \tag{29}$$

$$\left|T_i\left(z,t\right)\right| < \infty,\ z \ge l + \upsilon t,\ t \ge 0, \tag{30}$$

где $\beta_1 = \beta_3 = 0$ для $i = 1$; $\beta_1 = \beta_3 = 1$, $\beta_2 = 0$ для $i = 2$; $\beta_2 = -1$, $\beta_3 = 0$ для $i = 3$.

Введем безразмерные переменные:

$$z' = z/l;\ \tau = at/l^2;\ P_e = \upsilon l/a;\ \mathrm{Bi} = hl;\ \alpha_0 = \upsilon_p l/a;$$
$$S_T = \alpha_T\left(3\lambda + 2\mu\right) = \alpha_T E/\left(1 - 2\nu\right);$$

$$\begin{aligned}
&W_i\left(z',\tau\right) = \frac{T_i\left(z,t\right) - T_0}{T_\text{c} - T_0},\ i = 1,3;\\
&\varphi_i\left(\tau\right) = \frac{\varphi_i\left(t\right) - T_0}{T_\text{c} - T_0},\ i = 1,3;\\
&\sigma_{z'z'}\left(z',\tau\right) = \frac{\sigma_{zz}\left(z,t\right)}{S_T\left(T_\text{c} - T_0\right)},\ i = 1,3;\\
&W_2\left(z',t\right) = \frac{T_2\left(z,t\right) - T_0}{q_0 l/\lambda_T};\\
&\varphi_2\left(\tau\right) = \frac{\varphi_2\left(t\right)}{q_0/\lambda_T};\\
&\sigma_{z'z'}\left(z',\tau\right) = \frac{\sigma_{zz}\left(z,t\right)}{S_T q_0 l/\lambda_T}
\end{aligned} \tag{31}$$

и далее подвижную систему координат $\xi = z' - \left(1 + P_e\tau\right),\ \tau > 0,$ полагая $\sigma_{\xi\xi}\left(\xi,\tau\right) = \sigma_{z'z'}\left(z',\tau\right),\ \theta_i\left(\xi,\tau\right) = W_i\left(z,\tau\right)$. Исходная задача преобразуется следующим образом:

$$\left(\alpha_0^2 - P_e{}^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{\xi\xi}}{\partial\xi^2} + 2P_e\frac{\partial^2\sigma_{\xi\xi}}{\partial\xi\partial\tau} - \frac{\partial^2\sigma_{\xi\xi}}{\partial\tau^2} = F_i\left(\xi,\tau\right),\ \xi > 0,\ \tau > 0, \tag{32}$$

$$\sigma_{\xi\xi}\big|_{\tau=0} = \left(\partial\sigma_{\xi\xi}/\partial\tau\right)\big|_{\tau=0} = 0,\ \xi \ge 0, \tag{33}$$

$$\sigma_{\xi\xi}\big|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}\big|_{\xi=\infty} = 0, \;\; \tau \ge 0, \tag{34}$$

$$F_i(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\tau} + P_e^2\theta_i\right) - 2P_e\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\tau} + \frac{P_e^2}{2}\theta_i\right), \tag{35}$$

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_i}{\partial\xi^2} + P_e\frac{\partial\theta_i}{\partial\xi}, \; \xi > 0, \; \tau > 0, \tag{36}$$

$$\theta_i(\xi,\tau)\big|_{\tau=0} = 0, \; \xi \ge 0, \tag{37}$$

$$\beta_1\frac{\partial\theta_i(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} + \beta_2\mathrm{Bi}\left[\theta_i(\xi,\tau)\big|_{\xi=0} - \varphi_i(\tau)\right] = -\beta_3\varphi_i(\tau), \; \tau > 0, \tag{38}$$

$$\left|\theta_i(\xi,\tau)\right| < \infty, \; \xi \ge 0, \; \tau \ge 0. \tag{39}$$

Отметим, что из физических соображений $\alpha_0 > P_e$. В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi,p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau)\,\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)\,d\tau, \quad \bar{\theta}_i(\xi,p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau)\,\theta_i(\xi,\tau)\,d\tau$$

операционное решение задачи (32)–(39) имеет вид

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi,p) = \frac{\bar{\varphi}_i(p)}{\alpha_0^2 - P_e^2}\left\{\exp\left[-\bar{\gamma}(p)\xi\right] - \exp\left[-\frac{\xi}{(\alpha_0 - P_e)}p\right]\right\}\frac{\bar{\Psi}^*(p)}{\bar{\Psi}_i(p)}, \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered}
\bar{\gamma}(p) = P_e/2 + \sqrt{p + P_e^2/4}, \\
\bar{\Psi}^*(p) = \frac{p\left(p + P_e^2\right) + 2P_e\left(p + P_e^2/2\right)\bar{\gamma}(p)}{\left[\bar{\gamma}(p) - p/(\alpha_0 - P_e)\right]\left[\bar{\gamma}(p) + p/(\alpha_0 + P_e)\right]}, \\
\bar{\Psi}_i(p) = \begin{cases} 1, \; i = 1, \\ \bar{\gamma}(p), \; i = 2, \\ \dfrac{\mathrm{Bi} + \bar{\gamma}(p)}{\mathrm{Bi}}, \; i = 3. \end{cases}
\end{gathered} \tag{41}$$

Из (40), (41) следует, что переход к оригиналам требует длительной вычислительной процедуры, однако есть более оперативный способ оценки температурных напряжений, если применить теорему запаздывания к слагаемому

$$\bar{\theta}_i^*(p) = \frac{\bar{\varphi}_i(p)}{\alpha_0^2 - P_e^2} \frac{\bar{\Psi}^*(p)}{\bar{\Psi}_i(p)} \exp\left[-\frac{\xi}{(\alpha_0 - P_e)} p\right] \quad (42)$$

и рассчитать скачок напряжения на фронте термоупругой волны

$$|\Delta_i| = \lim_{\tau \to \xi(\alpha_0 - P_e)^{-1} + 0} \theta_i^*\left[\tau - \xi(\alpha_0 - P_e)^{-1}\right] = \lim_{\tau \to 0+} \theta_i^*(\tau) = \lim_{p \to \infty} p\bar{\theta}_i^*(p). \quad (43)$$

Проведя вычисления и возвращаясь к переменным $(z,\, t)$ по формулам перехода (31), находим следующие расчетные соотношения в качестве оценок максимума исходных температурных напряжений:

$$|\sigma_{zz}(z,t)|_{\max} \approx \begin{cases} \dfrac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \lim\limits_{t \to 0} \left[\varphi_1(t) - T_0\right], & i = 1; \\ \dfrac{2\alpha_T E\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}(1-2\nu)} \lim\limits_{t \to 0} \sqrt{t}\varphi_2(t), & i = 2; \\ \dfrac{2h\alpha_T E\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}(1-2\nu)} \lim\limits_{t \to 0} \sqrt{t}\left[\varphi_3(t) - T_0\right], & i = 3. \end{cases} \quad (44)$$

Оценки (44) дают важную практическую информацию для ряда частных случаев теплового удара. Например, в случае резкого температурного нагрева $\varphi_1(t) = T_с,\ t > 0,$ из (44) находим

$$|\sigma_{zz}(z,t)|_{\max} \simeq \frac{\alpha_T E(T_с - T_0)}{(1-2\nu)}. \quad (45)$$

В случае теплового нагрева в режиме с обострением, когда тепловой поток задается соотношением $\varphi_2(t) = q_0/t^{\alpha},\ t > 0,$ из (44) определяем

$$|\sigma_{zz}(z,t)|_{\max} \simeq \begin{cases} 0, \alpha < 1/2, \\ \dfrac{2\alpha_T E q_0\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}(1-2\nu)}, & \alpha = 1/2, \\ \infty, \alpha > 1/2. \end{cases} \quad (46)$$

Что касается нагрева средой температуры $\varphi_3(t) = T_с > T_0,\ t > 0,$ то из (44) следует, что для этого режима скачок напряжения отсутствует, и, как показано в [1], напряжение $\sigma_{zz}(z,t)$ в фиксированном сечении возрастает от нуля до некоторого отрицательного значения в момент, близкий к $1/\alpha_0,$ имеет максимум, затем плавно без скачка переходит в область положительных (растягивающих) значений, достигает максимума и затем быстро убывает до нуля.

Далее рассмотрим расчетное соотношение в качестве оценки температурного напряжения для массивного тела с внутренней цилиндрической полостью $r > R,\ t > 0,$ с радиальным потоком теплоты в условиях температурного нагрева поверхности полости температурой $T_c > T_0.$ Температура тела составляет $T(r, t),$ отличные от нуля компоненты тензора напряжения — $\sigma_{rr}(r, t),\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, t),\ \sigma_{zz}(r, t);$ компонента вектора перемещения $U_r(r, t) = U(r, t).$ Для этого случая постановка динамической задачи согласно (6) для свободной от напряжений поверхности полости $\sigma_{rr}(R, t) = 0,\ t > 0,$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial r},\ r > R,\ t > 0, \tag{47}$$

$$U(r, t)\big|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial U(r, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ r \ge R, \tag{48}$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-\nu)R}U\right]_{r=R} = \frac{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)}{(1-\nu)},\ t > 0, \tag{49}$$

$$\left|U(r,t)\right| < \infty,\ r \ge R,\ t > 0, \tag{50}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),\ r > R,\ t > 0, \tag{51}$$

$$T(r, t)\big|_{t=0} = T_0,\ r \ge R, \tag{52}$$

$$T(r, t)\big|_{r=R} = T_c,\ t > 0, \tag{53}$$

$$\left|T(r, t)\right| < \infty,\ t \ge R,\ t \ge 0. \tag{54}$$

Задачи подобного типа имеют важное практическое значение [16, 17]. В безразмерных переменных

$$\begin{gathered}\rho = \frac{\upsilon_p r}{a};\ \tau = \frac{\upsilon_p^2 t}{a};\ \rho_0 = \frac{\upsilon_p R}{a};\\ U^*(\rho, \tau) = \frac{(\lambda + 2\mu)(\upsilon_p/a)U(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)};\\ \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)}\end{gathered} \tag{55}$$

операционное решение задачи (47)–(54) для $\nu = \rho_0/(1 + \rho_0)$ имеет вид

$$\frac{\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = -\bar{\Psi}_1(\rho, p)\exp\left[-(\rho-\rho_0)\sqrt{p}\right] + \\ + \bar{\Psi}_2(\rho, p)\exp\left[-(\rho-\rho_0)p\right], \tag{56}$$

где

$$\bar{\Psi}_1(\rho, p) = \frac{\gamma_\rho + p^{3/2}}{p^{3/2}(p-1)}; \ \ \bar{\Psi}_2(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)\left(\gamma_1 + p^{3/2}\right)}{p^{3/2}(\rho-1)(\gamma_1 + p)}; \\ \gamma_\rho = \frac{1-\rho_0}{\rho}; \ \ \gamma_1 = \frac{1-\rho_0}{\rho_0}. \tag{57}$$

По предложенной выше методике находим верхнюю оценку термического напряжения при температурном нагреве поверхности полости от T_0 до T_c:

$$\left|\sigma_{rr}(r, t)\right|_{\max} \simeq \frac{\sqrt{r/R}E\alpha_T(T_c - T_0)}{1-2\nu}. \tag{58}$$

В практических случаях термического нагружения определяющим является именно начальное время, когда возникающие в твердых телах кратковременные динамические напряжения могут приводить к трещинообразованию в поверхностном и приповерхностных слоях. Последнее можно установить, сравнивая величину (58) с пределом прочности для конкретного материала по справочным данным.

Заключение. Предложены важные в практическом отношении расчетные соотношения в теории теплового удара для верхней оценки величины термических напряжений при различных режимах интенсивного нагрева границы твердого тела по операционным решениям соответствующих задач динамической термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М., URSS, 2012.

[2] Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М., URSS, 2017.

[3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М., ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[4] Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Термическая реакция при тепловом ударе массивного тела с внутренней цилиндрической полостью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 6 (93), с. 60–79.
DOI: http://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-60-79

[5] Новацкий В. Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости. *Механика*, 1966, № 6, с. 101–142.

[6] Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика (обзор). *Математические методы и физико-механические поля*, 1975, № 2, с. 37–42.

[7] Карташов Э.М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений. Т. 25. М., ВИНИТИ, 1988, с. 3–88.

[8] Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 22. М., ВИНИТИ, 1991, с. 55–127.

[9] Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. Киев, Наукова Думка, 1976.

[10] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М., Высш. шк., 2001.

[11] Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности. *Инженерно-физический журнал*, 2014, т. 87, № 5, с. 1072–1087.

[12] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.

[13] Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Динамическая термоупругость в проблеме теплового удара на основе обобщенного уравнения энергии. *Тепловые процессы в технике*, 2018, т. 10, № 7-8, с. 334–344.

[14] Карташов Э.М. Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности. *Тонкие химические технологии*, 2019, т. 14, № 4, с. 77–86. DOI: https://doi.org/10.32362/2410-6593-2019-14-4-77-86

[15] Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости. *Российский технологический журнал*, 2020, т. 8, № 2, с. 85–108. DOI: https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108

[16] Аттетков А.В., Волков И.К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической полостью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 1999, № 1 (34), с. 49–56.

[17] Аттетков А.В., Беляков Н.С., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле твердого тела с цилиндрическим каналом в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2006, № 1 (62), с. 31–40.

Ненахов Евгений Валентинович — старший преподаватель кафедры компьютерной математики МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Карташов Эдуард Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики РТУ МИРЭА (Российская Федерация, 119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Оценки температурных напряжений в моделях динамической термоупругости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 1 (100), с. 88–106.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-88-106

ESTIMATES OF TEMPERATURE STRESSES IN MODELS OF DYNAMIC THERMOELASTICITY

E.V. Nenakhov[1] newnew94@mail.ru
E.M. Kartashov[2] kartashov@mitht.ru

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
[2] Federal State Budget Educational Institution of Higher Education "MIREA–Russian Technological University", Moscow, Russian Federation

Abstract

The study focuses on the mathematical models of the heat shock theory in terms of dynamic thermoelasticity and describes the constitutive relations for boundary value problems based on hyperbolic equations (the idea of local nonequilibrium of the heat transfer process), which underlie the investigated models. Boundary conditions of the first, second, and third kinds are presented in a generalized form for the corresponding types of thermal action on the boundary of a solid surface. Relying on operational solutions of the corresponding dynamic problems, the paper introduces a new approach to the study of the thermal reaction of a solid during intense heating or cooling of its surface. Furthermore, practically important engineering design relations are proposed for the upper estimate of thermal stress through stress jumps at the front of a thermoelastic wave. The latter makes it possible to quickly and qualitatively estimate the degree of danger of short-term dynamic stresses. Meanwhile, there is absolutely no need in a complex software package for numerical experiments based on exact analytical solutions to the problem of identifying the kinetics of changes in temperature stresses and establishing maximum and minimum points for comparing stresses with ultimate strength material on the reference data of the parameters included in the obtained estimates

Keywords

Thermal shock, dynamic thermoelasticity, operational solutions, upper estimate, temperature stresses

Received 27.05.2021
Accepted 23.06.2021

REFERENCES

[1] Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoy termouprugosti [Analytical theory of thermal conductivity and applied thermoelasticity]. Moscow, URSS Publ., 2012.

[2] Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozheniy [Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications]. Moscow, URSS Publ., 2017.

[3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli termomekhaniki [Mathematical models of thermomechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2002.

[4] Kartashov E.M., Nenakhov E.V. Thermal reaction during thermal shock of a massive body with an internal cylindrical cavity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 6 (93), pp. 60–79 (in Russ.).
DOI: http://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-60-79

[5] Novatskiy V. Review of works on dynamic problems of thermoelasticity. *Mekhanika*, 1966, no. 6, pp. 101–142 (in Russ.).

[6] Kolyano Yu.M. Generalized thermomechanics (review). *Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polya*, 1975, no. 2, pp. 37–42 (in Russ.).

[7] Kartashov E.M., Bartenev G.M. Dinamicheskie effekty v tverdykh telakh v usloviyakh vzaimodeystviya s intensivnymi potokami energii. V kn.: Itogi nauki i tekhniki. Ser. Khimiya i tekhnologiya vysokomolekulyarnykh soedineniy. T. 25 [Dynamic effects in solids under conditions of interaction with intense energy fluxes. In: Scientific and Technical Output. Ser. Chemistry and Technology of Macromolecular Compounds. Vol. 25]. Moscow, VINITI Publ., 1988, pp. 3–88 (in Russ.).

[8] Kartashov E.M., Parton V.Z. Dinamicheskaya termouprugost' i problemy termicheskogo udara. V kn.: Itogi nauki i tekhniki. Ser. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. T. 22 [Dynamic thermoelasticity and problems of thermal shock. In: Scientific and Technical Output. Ser. Deformable Solid Mechanics. Vol. 22]. Moscow, VINITI Publ., 1991, pp. 55–127 (in Russ.).

[9] Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. Obobshchennaya termomekhanika [Generalized thermomechanics]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1976.

[10] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001.

[11] Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1116–1125.
DOI: https://doi.org/10.1007/s10891-014-1113-2

[12] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford Univ. Press, 1959.

[13] Kartashov E.M., Nenakhov E.V. Dynamic thermoelasticity in the problem of heat shock based on the general energy equation. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2018, vol. 10, no. 7-8, pp. 334–344 (in Russ.).

[14] Kartashov E.M. Originals of operating images for generalized problems of unsteady heat conductivity. *Tonkie khimicheskie tekhnologii* [Fine Chemical Technologies], 2019, vol. 14, no. 4, pp. 77–86 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.32362/2410-6593-2019-14-4-77-86

[15] Kartashov E.M. Model representations of heat shock in terms of dynamic thermal elasticity. *Rossiyskiy tekhnologicheskiy zhurnal* [Russian Technological Journal], 2020, vol. 8, no. 2, pp. 85–108 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108

[16] Attetkov A.V., Volkov I.K. Formation of temperature fields in the region internally restricted by cylindrical hollow. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 1999, no. 1 (34), pp. 49–56 (in Russ.).

[17] Attetkov A.V., Belyakov N.S., Volkov I.K. Influence of boundary mobility on temperature field of solid body with cylindrical channel under non-stationary conditions of heat exchange with environment. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2006, no. 1 (62), pp. 31–40 (in Russ.).

Nenakhov E.V. — Senior Lecturer, Department of Computational Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Kartashov E.M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “MIREA–Russian Technological University” (Vernadskogo prospekt 78, Moscow, 119454 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Nenakhov E.V., Kartashov E.M. Estimates of temperature stresses in models of dynamic thermoelasticity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 1 (100), pp. 88–106 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-88-106