УДК 517.911 DOI: 10.18698/1812-3368-2022-6-60-76

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА СТРУКТУРУ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В.Н. Орлов orlovvn@mgsu.ru
М.В. Гасанов gasanovmv@mgsu.ru

НИУ МГСУ, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Авторами настоящей работы доказана теорема существования и единственности решения, построено аналитическое приближенное решение в комплексной области для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, решением которых являются разрывные функции. Решение перечисленных математических задач основано на классическом подходе. Поскольку существующие методы позволяют получать подвижные особые точки только приближенно, необходимо исследовать влияние возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения в комплексной области. Доказана теорема, позволяющая определить априорные оценки погрешности аналитического приближенного решения. В ходе исследования применен классический подход в оценке, дана иллюстрация приложения рядов с дробными отрицательными степенями. Приведены результаты численного эксперимента, подтверждающие достоверность полученного теоретического положения. Представлена технология оптимизации априорных оценок аналитического приближенного решения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки с использованием апостериорных оценок. Результаты позволяют расширить классы нелинейных дифференциальных уравнений, применяемых в качестве основы для математических моделей процессов и явлений в различных областях деятельности человека. В частности, рассматриваемый класс уравнений

Ключевые слова

Нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка, подвижные особые точки, волны, априорная оценка, задача Коши, возмущение подвижной особой точки

может быть применен при исследовании волновых процессов в эластичных балках, что подтверждается теоретическими данными

Поступила 26.01.2022
Принята 27.09.2022

Введение. Результаты исследования волновых процессов на основе нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка приведены в [1]. При этом оказались разрешимы лишь частные случаи, которые представлены в виде численного решения или асимптотического поведения решения. Частные случаи исследуемых задач опирались на нелинейные уравнения Риккати и Кортевега — де Фриза, решением которых являются разрывные функции ввиду наличия подвижных особенностей. Однако в [1] этот факт не был учтен. Существует два метода решения нелинейных дифференциальных уравнений. Первый основан на преобразовании Шварца и ему подобных [2–6], а также теории групп Ли [7, 8], позволяющей в частных случаях разрешить нелинейное дифференциальное уравнение в квадратурах. Второй — это аналитический приближенный метод, предложенный авторами настоящей работы. Он связан с поиском решения в двух различных областях (в области аналитичности и окрестности подвижных особых точек), а затем с дальнейшим исследованием аналитических приближенных решений в каждой области [9–11]. Напомним, что в [12] теоретически и математически доказано, что линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений приводит к существенным погрешностям в вычислениях. Если учесть, что существующие классические численные методы также не применимы к этой категории уравнений, то получаем подтверждение актуальности разработки и развития аналитических приближенных методов решения. Нелинейные дифференциальные уравнения третьего порядка связаны в [13] с исследованием волновых процессов в эластичных балках, но при этом игнорируется наличие подвижных особых точек. Сложность решения нелинейных дифференциальных уравнений, существование подвижных особых точек и принадлежности такой категории уравнений классу в общем случае неразрешимых в квадратурах, стало основой работы [14], в которой сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения, получена структура аналитического приближенного решения для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в комплексной области. Перечисленные задачи входят в авторский метод аналитического приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений, в общем случае неразрешимых в квадратурах. В настоящей работе представлено решение следующей задачи авторского метода: исследование влияния возмущения подвижной особой точки на аналитическое приближенное решение в комплексной области для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Доказана теорема, позволяющая получить априорную оценку погрешности. Подобные задачи решены при исследовании решений иных классов нелинейных дифференциальных уравнений [15–18]. Следует отметить приложения нелинейных дифференциальных уравнений для описания строительных конструкций [11], в которых факт наличия подвижных особых точек определенным образом связан с разрушением конструкции.

Методы и результаты исследования. Здесь продолжено исследование результатов, приведенных в [14], дано решение задачи влияния возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения, основанное на классическом подходе в оценке и применении рядов с дробными степенями (как отрицательными, так и положительными). Получена априорная оценка погрешности приближенного решения, предложен вариант ее оптимизации с использованием апостериорной оценки.

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^7 + r(z), \tag{1}$$

$$y(z_0) = y_0,$$
$$y'(z_0) = y_1, \tag{2}$$
$$y''(z_0) = y_2.$$

Основываясь на результатах из [14], в случае возмущения подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ для аналитического приближенного решения имеем следующую структуру:

$$\tilde{y}_N(z) = (\tilde{z}^* - z)^{-1/2} \sum_0^N \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{n/2}, \tag{3}$$

где $\tilde{z}^*$ — возмущенное значение подвижной особой точки; $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов.

Сформулируем теорему, позволяющую оценить влияние возмущения подвижной точки на структуру аналитического приближенного решения (3) задачи Коши (1), (2).

Теорема. *В случае $\tilde{z}^*$-подвижной особой точки задачи (1), (2) и выполнения условий:*

1) $r(z) \in C^1$ *в области* $\left|\tilde{z}^* - z\right| < \rho_1$, *где* $0 < \rho_1 = \text{const}$;

2) $\exists M_i : \dfrac{\left|r^{(n)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!} \le M_i, \; M_i = \text{const}$;

3) $\left|\tilde{z}^*\right| \le \left|z^*\right|$;

4) $\left|\tilde{z}^* - z^*\right| \le \Delta\tilde{z}^*$, *известная оценка погрешности;*

5) $\Delta\tilde{z}^* < \dfrac{1}{4(M+\Delta M+1)^4}$,

для аналитического приближенного решения $\tilde{y}_N(z)$ *(3), задачи Коши (1), (2) в области* $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ *справедлива оценка погрешности* $\Delta\tilde{y}_N = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$, *где*

$$\Delta_0 \le \frac{\sqrt[6]{15}}{2\sqrt[6]{8}} \frac{\Delta\tilde{z}^*}{\alpha^{3/2}};$$

$$\Delta_1 \le \frac{16M(M+1)^6 \Delta\tilde{z}^* \alpha^{1/2}}{1-2^6(M+1)^{12}\alpha^3}(1+2^2(M+1)^6\alpha + 2^4(M+1)^6\alpha^2) +$$

$$+\frac{8M(M+1)^{12}\Delta\tilde{z}^*\alpha^2}{1-2^3(M+1)^{12}\alpha^3}(1+2(M+1)^6\alpha+2^2(M+1)^6\alpha^2);$$

$$\Delta_2 \le \frac{2^{9/2}(\Delta M+1)(M+\Delta M+1)^6\alpha^{3/2}}{1-2^3(M+1)^{12}\alpha^3}\times$$

$$\times\ (1+2(M+\Delta M+1)^6\alpha+2^2(M+\Delta M+1)^6\alpha^2)(1+2^{3/2}(M+\Delta M+1)^6\alpha^{3/2});$$

$$\Delta_3 \le \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1-(M+1)^6\alpha^{3/2}}\times$$

$$\times\alpha^{N/2}\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\alpha^{1/2}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\alpha}{(N+2)N(N-2)}\right).$$

Для $N+1=3k$:

$$\Delta_3 \le \frac{8M(M+1)^{2N}}{1-(M+1)^6\alpha^{3/2}}\times$$

$$\times\alpha^{N/2}\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\alpha^{1/2}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\alpha}{(N+2)N(N-2)}\right).$$

Для $N+1=3k+1$:

$$\Delta_3 \le \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1-(M+1)^6\alpha^{3/2}}\times$$

$$\times\alpha^{N/2}\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\alpha^{1/2}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\alpha}{(N+2)N(N-2)}\right).$$

Для $N+1=3k+2$:

$$F_1=\{z:\left|\tilde{z}^*-z\right|<\rho_1\},$$

$$F_2=\left\{z:\left|\tilde{z}^*-z\right|<\frac{1}{4(M+1)^4}\right\},\ F_3=\left\{z:\left|\tilde{z}^*-z\right|<\frac{1}{4(M+\Delta M+1)^4}\right\}.$$

Здесь ρ_1 *— величина из теоремы,*

$$M=\max\left\{\sup_n\left\{\frac{\left|r^{(n)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!}\right\},\ \left|y_0\right|,\ \left|y_1\right|,\ \left|y_2\right|\right\},\quad \Delta M=\Delta\tilde{z}^*\left(\max_{n,\,G}\left|\frac{r^{(n)}(z)}{n!}\right|\right),$$

$$G=\{z:\left|\tilde{z}^*-z\right|\le\Delta\tilde{z}^*\},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\alpha=\begin{cases}\left|\tilde{z}^*-z\right|, & \left|\tilde{z}^*-z\right|>\Delta\tilde{z}^*,\\ \Delta\tilde{z}^*, & \left|\tilde{z}^*-z\right|\le\Delta\tilde{z}^*.\end{cases}$$

Доказательство теоремы. Применим классический подход:

$$\Delta\tilde{y}_N(z)=\left|y(z)-\tilde{y}_N(z)\right|\le\left|y(z)-\tilde{y}(z)\right|+\left|\tilde{y}(z)-\tilde{y}_N(z)\right|.$$

Оценим первое слагаемое полученного выражения:

$$\left|y(z)-\tilde{y}(z)\right|=\left|\sum_0^\infty C_n(z^*-z)^{(n-1)/2}-\sum_0^\infty \tilde{C}_n(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|\le$$

$$\le\left|\sum_0^\infty C_n(z^*-z)^{(n-1)/2}-\sum_0^\infty \tilde{C}_n(z^*-z)^{(n-1)/2}\right|+$$

$$+\left|\sum_0^\infty \tilde{C}_n(z^*-z)^{(n-1)/2}-\sum_0^\infty \tilde{C}_n(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|\le$$

$$\le\sum_0^\infty\left|C_n-\tilde{C}_n\right|\left|z^*-z\right|^{(n-1)/2}+\sum_0^\infty\left|\tilde{C}_n\right|\left|(z^*-z)^{(n-1)/2}-(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|=$$

$$=\sum_0^\infty\left|C_n-\tilde{C}_n\right|\left|z^*-z\right|^{(n-1)/2}+\sum_0^\infty\left|\tilde{C}_n\right|\left|(\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*)^{(n-1)/2}-(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|.$$

Для второго слагаемого:

$$\left|\tilde{y}(z)-\tilde{y}_N(z)\right|=\left|\sum_0^\infty \tilde{C}_n(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}-\sum_0^N \tilde{C}_n(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|=$$

$$=\left|\sum_{N+1}^\infty \tilde{C}_n(\tilde{z}^*-z)^{(n-1)/2}\right|\le\sum_{N+1}^\infty\left|\tilde{C}_n\right|\left|\tilde{z}^*-z\right|^{(n-1)/2}.$$

Тогда для $\Delta\tilde{y}_N(z)$:

$$\Delta\tilde{y}_N(z) \le \sum_0^\infty \left|C_n - \tilde{C}_n\right| \left|\tilde{z}^* - z\right|^{n-1/2} + \sum_0^\infty \left|\tilde{C}_n\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{n-1/2} - (\tilde{z}^* - z)^{n-1/2}\right| +$$
$$+ \sum_{N+1}^\infty \left|\tilde{C}_n\right| \left|\tilde{z}^* - z\right|^{n-1/2}.$$

С учетом коэффициентов C_n [14]:

$$C_0 = \tilde{C}_0 = \pm\sqrt[6]{\frac{15}{8}}, C_1 = C_2 = \ldots = C_6 = \tilde{C}_1 = \ldots = \tilde{C}_6 = 0$$

имеем $\Delta\tilde{C}_0 = \Delta\tilde{C}_1 = \ldots = \Delta\tilde{C}_6 = 0.$

Далее переходим к оценке $\Delta\tilde{y}_N(z)$:

$$\Delta\tilde{y}_N(z) \le \left|\tilde{C}_0\right| \left|\frac{1}{((\tilde{z}^* - z) + \Delta\tilde{z}^*)^{1/2}} - \frac{1}{(\tilde{z}^* - z)^{1/2}}\right| +$$
$$+ \sum_7^\infty \left|\tilde{C}_n\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2}\right| + \sum_7^\infty \left|\Delta\tilde{C}_n\right| \left|z^* - z\right|^{(n-1)/2} +$$
$$+ \sum_{N+1}^\infty \left|\tilde{C}_n\right| \left|\tilde{z}^* - z\right|^{(n-1)/2} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

При детальном рассмотрении Δ_0 получаем

$$\Delta_0 = \left|\tilde{C}_0\right| \left|\frac{1}{((\tilde{z}^* - z) + \Delta\tilde{z}^*)^{1/2}} - \frac{1}{(\tilde{z}^* - z)^{1/2}}\right| =$$
$$= \sqrt[6]{\frac{15}{8}} \left|\frac{(\tilde{z}^* - z)^{1/2} - ((\tilde{z}^* - z) + \Delta\tilde{z}^*)^{1/2}}{((\tilde{z}^* - z) + \Delta\tilde{z}^*)^{1/2} (\tilde{z}^* - z)^{1/2}}\right| \le \frac{\sqrt[6]{15}}{2\sqrt[6]{8}} \frac{\Delta\tilde{z}^*}{\alpha^{3/2}},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \left|\tilde{z}^* - z\right|, & \left|\tilde{z}^* - z\right| > \Delta\tilde{z}^*, \\ \Delta\tilde{z}^*, & \left|\tilde{z}^* - z\right| \le \Delta\tilde{z}^*. \end{cases}$$

При оценке Δ_1 учтем целые и дробные степени:

$$\Delta_1 = \sum_7^\infty \left|\tilde{C}_n\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(n-1)/2}\right| =$$
$$= \sum_4^\infty \left|\tilde{C}_{2n}\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(2n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(2n-1)/2}\right| +$$
$$+ \sum_4^\infty \left|\tilde{C}_{2n-1}\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{n-1} - (\tilde{z}^* - z)^{n-1}\right| = \Delta_{11} + \Delta_{12}.$$

Оценка выражения Δ_{11} требует учета оценок для коэффициентов C_n [14]:

$$\left|C_{3k}\right| \le \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)},$$

$$\left|C_{3k+1}\right| \le \frac{8M(M+1)^{6k}}{3k(3k-2)(3k-4)},$$

$$\left|C_{3k+2}\right| \le \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)}.$$

Таким образом, для Δ_{11} получаем

$$\Delta_{11} = \sum_4^{\infty} \left|\tilde{C}_{2n}\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(2n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(2n-1)/2}\right| =$$

$$= \sum_1^{\infty} \left|\tilde{C}_{6n-2}\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(6n-3)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(6n-3)/2}\right| +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \left|\tilde{C}_{6n}\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(6n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(6n-1)/2}\right| +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \left|\tilde{C}_{6n+2}\right| \left|(\tilde{z}^* - z + \Delta\tilde{z}^*)^{(6n-1)/2} - (\tilde{z}^* - z)^{(6n-1)/2}\right| \le$$

$$\le \sum_1^{\infty} \frac{8M(M+1)^{12n-6} 2^{6n-4}}{(6n-3)(6n-5)(6n-7)} \frac{\Delta\tilde{z}^*(6n-3)\left|\tilde{z}^* - z\right|^{6n-4}}{2\left|\tilde{z}^* - z\right|^{(6n-3)/2}} +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{8M(M+1)^{12n} 2^{6n-2}}{(6n-1)(6n-3)(6n-5)} \frac{\Delta\tilde{z}^*(6n-1)\left|\tilde{z}^* - z\right|^{6n-2}}{2\left|\tilde{z}^* - z\right|^{(6n-1)/2}} +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{8M(M+1)^{12n} 2^{6n}}{(6n+1)(6n-1)(6n-3)} \frac{\Delta\tilde{z}^*(6n+1)\left|\tilde{z}^* - z\right|^{6n}}{2\left|\tilde{z}^* - z\right|^{(6n+1)/2}} \le$$

$$\le \frac{2^2 \cdot 4M(M+1)^6 \Delta\tilde{z}^* \left|\tilde{z}^* - z\right|^{1/2}}{1 - 2^6(M+1)^{12}\left|\tilde{z}^* - z\right|^3} +$$

$$+ \frac{2^4 \cdot 4M(M+1)^{12} \Delta\tilde{z}^* \left|\tilde{z}^* - z\right|^{3/2}}{1 - 2^6(M+1)^{12}\left|\tilde{z}^* - z\right|^3} + \frac{2^6 \cdot 4M(M+1)^{12} \Delta\tilde{z}^* \left|\tilde{z}^* - z\right|^{5/2}}{1 - 2^6(M+1)^{12}\left|\tilde{z}^* - z\right|^3} =$$

$$= \frac{16M(M+1)^6 \Delta\tilde{z}^* \alpha^{1/2}}{1 - 2^6(M+1)^{12}\alpha^3}(1 + 2^2(M+1)^6\alpha + 2^4(M+1)^6\alpha^2).$$

Полученная для Δ_{11} оценка справедлива в области

$$F_2 = \left\{ z : \left| \tilde{z}^* - z \right| < \frac{1}{4(M+1)^4} \right\}.$$

Аналогично получаем оценку для Δ_{12}, справедливую в области F_2:

$$\Delta_{12} \le \frac{8M(M+1)^{12} \Delta\tilde{z}^* \alpha^2}{1 - 2^3 (M+1)^{12} \alpha^3} (1 + 2(M+1)^6 \alpha + 2^2 (M+1)^6 \alpha^2).$$

Здесь

$$\alpha = \begin{cases} \left| \tilde{z}^* - z \right|, & \left| \tilde{z}^* - z \right| > \Delta\tilde{z}^*, \\ \Delta\tilde{z}^*, & \left| \tilde{z}^* - z \right| \le \Delta\tilde{z}^*. \end{cases}$$

Для оценки Δ_2 предварительно удостоверимся в справедливости оценок $\Delta\tilde{C}_{3n}, \Delta\tilde{C}_{3n+1}, \Delta\tilde{C}_{3n+2}$:

$$\Delta\tilde{C}_{3n} \le \frac{8\Delta M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{(3n-1)(3n-3)(3n-5)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+1} \le \frac{8\Delta M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{3n(3n-2)(3n-4)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+2} \le \frac{8\Delta M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{(3n+1)(3n-1)(3n-3)},$$

где

$$M = \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{\left| r^{(n)}(\tilde{z}^*) \right|}{n!} \right\}, \left| y_0 \right|, \left| y_1 \right|, \left| y_2 \right| \right\},$$

$$\Delta M = \left(\max_{n,\, G} \left\{ \frac{\left| r^{(n+1)}(\tilde{z}^*) \right|}{n!} \right\} \right) \Delta\tilde{z}^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

При доказательстве оценок $\Delta\tilde{C}_{3n}$, $\Delta\tilde{C}_{3n+1}$, $\Delta\tilde{C}_{3n+2}$ используем рекуррентные соотношения, приведенные в [14]:

1) $-(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8\left(C_n^{****} + A_{\frac{n-7}{2}} \right)$ при $n = 2k+1,\ k = 3, 4, \ldots;$

2) $-(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8C_n^{****}$ при $n = 2k, k = 0, 1, \ldots$ и при $n = 1, 3, 5,$

а также вспомогательные соотношения

$$C_n^{****}=\sum_{i=0}^{n}C_iC_j^{***},\quad C_n^{***}=\sum_{i=0}^{n}C_i^{*}C_j^{**},\quad C_n^{**}=\sum_{i=0}^{n}C_i^{*}C_j^{*},\quad C_n^{*}=\sum_{i=0}^{n}C_iC_{n-i}.$$

Проиллюстрируем доказательство оценки $\Delta\tilde{C}_{3n+3}$:

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3}=\left|\tilde{C}_{3n+3}-C_{3n+3}\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}\left(\left(\tilde{C}_{3n+3}^{****}+A_{\frac{3n-4}{2}}\right)-\left(C_{3n+3}^{****}+A_{\frac{3n-4}{2}}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}\left(\sum_{i=0}^{3n+3}\tilde{C}_i\tilde{C}_{3n+3-i}^{***}-\sum_{i=0}^{3n+3}C_iC_{3n+3-i}^{***}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}\left(\sum_{i=0}^{3n+3}\tilde{C}_i\sum_{j=0}^{3n+3}\tilde{C}_j^{*}\tilde{C}_{n-i-j}^{**}-\sum_{i=0}^{3n+3}C_i\sum_{j=0}^{3n+3}C_j^{*}C_{3n+3-i-j}^{**}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}\right.\times$$

$$\times\left(\left(\sum_{i=0}^{3n+3}\tilde{C}_i\left(\sum_{j=0}^{3n+3-i}\tilde{C}_j^{*}\left(\sum_{l=0}^{3n+3-i-j}\tilde{C}_l^{*}\left(\sum_{m}^{3n+3-i-j-m}\tilde{C}_m\tilde{C}_{3n+3-i-j-l-m}\right)\right)\right)\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\sum_{i=0}^{3n+3}C_i\left(\sum_{j=0}^{3n+3-i}C_j^{*}\left(\sum_{l=0}^{3n+3-i-j}C_l^{*}\left(\sum_{m=0}^{3n+3-i-j-l}C_mC_{3n+3-i-j-l-m}\right)\right)\right)\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}\left(\left(\sum_{i=0}^{3n+3}\tilde{C}_i\left(\sum_{j=0}^{3n+3-i}\left(\sum_{k=0}^{j}\tilde{C}_k\tilde{C}_{j-k}\right)\left(\sum_{l=0}^{n-i-j}\left(\sum_{p=0}^{l}\tilde{C}_p\tilde{C}_{l-p}\right)\times\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\left(\sum_{m=0}^{3n+3-i-j-l}\tilde{C}_m\tilde{C}_{3n+3-i-j-l-m}\right)\right)\right)\right)-\left(\sum_{i=0}^{3n+3}C_i\left(\sum_{j=0}^{3n+3-i}\left(\sum_{k=0}^{j}C_kC_{j-k}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\sum_{l=0}^{3n+3-i-j}\left(\sum_{p=0}^{l}C_pC_{l-p}\right)\left(\sum_{m=0}^{3n+3-i-j-l}C_mC_{3n+3-i-j-l-m}\right)\right)\right)\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{8}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}\left(\left(\sum_{i=0}^{3n+3}\tilde{C}_i\left(\sum_{j=0}^{3n+3-i}\left(\sum_{k=0}^{j}\tilde{C}_k\tilde{C}_{j-k}\right)\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\left(\sum_{l=0}^{n-i-j}\left(\sum_{p=0}^{l}\tilde{C}_p\tilde{C}_{l-p}\right)\left(\sum_{m=0}^{3n+3-i-j-l}\tilde{C}_m\tilde{C}_{3n+3-i-j-l-m}\right)\right)\right)\right)\right)-$$

$$-\sum_{i=0}^{3n+3}\left(\tilde{C}_i-\Delta\tilde{C}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{3n+3-i}\left(\sum_{k=0}^{j}\left(\tilde{C}_k-\Delta\tilde{C}_k\right)\left(\tilde{C}_{j-k}-\Delta\tilde{C}_{j-k}\right)\right)\times\right.$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{3n+3-i-j}\left(\sum_{p=0}^{l}\left(\tilde{C}_p-\Delta\tilde{C}_p\right)\left(\tilde{C}_{l-p}-\Delta\tilde{C}_{l-p}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{m=0}^{3n+3-i-j-l}\left(\tilde{C}_m-\Delta\tilde{C}_m\right)\left(\tilde{C}_{3n+3-i-j-l-m}-\Delta\tilde{C}_{3n+3-i-j-l-m}\right)\right)\right)\right)\Bigg|.$$

Расписывая выражение во втором слагаемом, часть которого исключается с первым слагаемым в последнем выражении, выполняя несколько преобразований с учетом предполагаемых оценок $\Delta\tilde{C}_n$, окончательно получаем оценку $\Delta\tilde{C}_{3n+3}$:

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3}\le\frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{6n+6}}{(3n+2)\cdot 3n(3n-2)}.$$

Аналогично убеждаемся в справедливости оценок $\Delta\tilde{C}_{3n+1}$ и $\Delta\tilde{C}_{3n+2}$.

Следовательно, для Δ_2 с учетом целых и дробных степеней будем иметь

$$\Delta_2=\sum_{7}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_n\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(n-1)/2}=$$

$$=\sum_{4}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_{2n}\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(2n-1)/2}+\sum_{4}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_{2n-1}\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{n-1}=\Delta_{21}+\Delta_{22}.$$

Рассмотрим случай дробных степеней Δ_{21}:

$$\Delta_{21}=\sum_{4}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_{2n}\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(2n-1)/2}\le\sum_{1}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_{6n-2}\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(6n-3)/2}+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_{6n}\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(6n-1)/2}+\sum_{1}^{\infty}\left|\Delta\tilde{C}_{6n+2}\right|\left|\tilde{z}^*-z+\Delta\tilde{z}^*\right|^{(6n+1)/2}\le$$

$$\le\sum_{1}^{\infty}\frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12n-6}2^{(3n-3)/2}}{(6n-3)(6n-5)(6n-7)}\left|\tilde{z}^*-z\right|^{3n-3/2}+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12n}2^{(3n-1)/2}}{(6n-1)(6n-3)(6n-5)}\left|\tilde{z}^*-z\right|^{(3n-1)/2}+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12n-6}2^{(3n+1)/2}}{(6n+1)(6n-1)(6n-3)}\left|\tilde{z}^*-z\right|^{(3n+1)/2}\le$$

$$\le \frac{2^{3/2}\cdot 8\Delta M(M+\Delta M+1)^6\left|\tilde{z}^*-z\right|^{3/2}}{1-2^3(M+1)^{12}\left|\tilde{z}^*-z\right|^3}+$$

$$+\frac{2^{5/2}\cdot 8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12}\left|\tilde{z}^*-z\right|^{5/2}}{1-2^3(M+1)^{12}\left|\tilde{z}^*-z\right|^3}+\frac{2^{7/2}\cdot 8\Delta M(M+\Delta M+1)^6\left|\tilde{z}^*-z\right|^{7/2}}{1-2^3(M+1)^{12}\left|\tilde{z}^*-z\right|^3}=$$

$$=\frac{2^{9/2}\cdot 8\Delta M(M+\Delta M+1)^6\alpha^{3/2}}{1-2^3(M+1)^{12}\alpha^3}\left(1+2(M+\Delta M+1)^6\alpha+2^2(M+\Delta M+1)^6\alpha^2\right).$$

Аналогичная ситуация и для случая целых степеней Δ_{22}:

$$\Delta_{22}\le\frac{2^6\Delta M(M+\Delta M+1)^{12}\alpha^3}{1-2^3(M+1)^{12}\alpha^3}\left(1+2(M+\Delta M+1)^6\alpha+2^2(M+\Delta M+1)^6\alpha^2\right).$$

В результате для Δ_2 получаем выражение

$$\Delta_2\le\frac{2^{9/2}\cdot 8\Delta M(M+\Delta M+1)^6\alpha^{3/2}}{1-2^3(M+1)^{12}\alpha^3}\times$$

$$\times\left(1+2(M+\Delta M+1)^6\alpha+2^2(M+\Delta M+1)^6\alpha^2\right)\left(1+2^{3/2}(M+\Delta M+1)^6\alpha^{3/2}\right).$$

Полученная оценка справедлива в области

$$F_3=\left\{z:\left|\tilde{z}^*-z\right|<\frac{1}{4(M+\Delta M+1)^4}\right\},$$

где

$$\alpha=\begin{cases}\left|\tilde{z}^*-z\right|, & \left|\tilde{z}^*-z\right|>\Delta\tilde{z}^*,\\ \Delta\tilde{z}^*, & \left|\tilde{z}^*-z\right|\le\Delta\tilde{z}^*.\end{cases}$$

При доказательстве оценок для Δ_3, используя результат из [14], имеем:

$$\Delta_3\le\frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1-(M+1)^6\alpha^{3/2}}\times$$

$$\times\alpha^{N/2}\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\alpha^{1/2}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\alpha}{(N+2)N(N-2)}\right)$$

в случае $N+1=3k$,

$$\Delta_3\le\frac{8M(M+1)^{2N}}{1-(M+1)^6\alpha^{3/2}}\times$$

$$\times\alpha^{N/2}\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\alpha^{1/2}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\alpha}{(N+2)N(N-2)}\right)$$

в случае $N+1=3k+1$,

$$\Delta_3 \le \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1-(M+1)^6\alpha^{3/2}}\times$$
$$\times\alpha^{N/2}\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\alpha^{1/2}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\alpha}{(N+2)N(N-2)}\right)$$

в случае $N+1=3k+2$, где

$$\alpha=\begin{cases}\left|\tilde{z}^*-z\right|, & \left|\tilde{z}^*-z\right|>\Delta\tilde{z}^*,\\ \Delta\tilde{z}^*, & \left|\tilde{z}^*-z\right|\le\Delta\tilde{z}^*;\end{cases}$$

$$M=\max\left\{\sup_n\left\{\frac{\left|r^{(n)}(\tilde{z}^*)\right|}{n!}\right\},\ \left|y_0\right|,\ \left|y_1\right|,\ \left|y_2\right|\right\}.$$

Оценка для Δ_3 получена в области $F_2=\left\{z:\left|\tilde{z}^*-z\right|<\dfrac{1}{4(M+1)^4}\right\}$, следовательно, теорема будет справедлива в области F.

Обсуждение результатов. Рассмотрим численный эксперимент, выполненный в MATLAB, для задачи Коши (1), (2) ($r(z)\equiv 0$, $y(0)=1/4$, $y'(0)=i$, $y''(0)=1$) с приближенным значением подвижной особой точки $\tilde{z}^*=2{,}65271, \Delta\tilde{z}^*=0{,}0003$. Отметим, что эта задача не разрешима в квадратурах, что исключает сравнения с точным решением. Рассматривается структура приближенного решения (3) $\tilde{y}_9$. Результаты расчетов для задачи Коши (1), (2) приведены ниже:

z_1	$\tilde{y}_9(z_1)$	Δ	Δ_1
2,652	8,04372 – 8,63187*i*	0,007	0,0005

Здесь z_1 — значение, попадающее в область по условию теоремы, что подтверждается значением $\rho=0{,}015625$; $\tilde{y}_9(z_1)$ — аналитическое приближенное решение (3); Δ — априорная оценка погрешности, полученная по теореме; Δ_1 — апостериорная оценка. Для $\Delta_1=0{,}0005$ в структуре приближенного решения (3) требуется $N=14$. Поскольку слагаемые с 10 по 14 не превышают $\varepsilon=0{,}0005$, то можно утверждать, что аналитическое приближенное решение $\tilde{y}_9(z_1)$ имеет точность $\varepsilon=0{,}0005$.

Заключение. Предложено развитие метода аналитического приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками на класс уравнений, имеющий приложение при исследовании волновых процессов в эластичных балках. Приведено

решение одной из задач метода. Доказано влияние возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения в комплексной области; определена априорная оценка погрешности аналитического приближенного решения, связанная с возмущением подвижной особой точки. Получена формула для расчета области, где справедливы результаты исследования. Теоретические результаты протестированы с использованием численного эксперимента. Представлена оптимизация априорных оценок с помощью апостериорных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чугайнова А.П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза — Бюргерса. *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова*, 2013, т. 281, с. 204–212.

[2] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1425, art. 012107. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012107

[3] Chichurin A. Computer algorithm for solving of the Chazy equation of the third order with six singular points. *Miskolc Math. Notes*, 2017, vol. 18, no. 2, pp. 701–715. DOI: https://doi.org/10.18514/MMN.2017.2232

[4] Filipuk G., Chichurin A. The properties of certain linear and nonlinear differential equations. In: Singh V., Gao D., Fischer A. (eds). *Advances in Mathematical Methods and High Performance Computing. Advances in Mechanics and Mathematics*, vol. 41. Cham, Springer, 2019, pp. 193–200.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-02487-1_11

[5] Асташова И.В., Соколов Д.А. О периодических решениях одной нелинейной спектральной задачи четвертого порядка. *Матер. Воронежской весенней мат. шк. «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Ч. 3. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, М., ВИНИТИ РАН, 2021, т. 192, с. 20–25.
DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-20-25

[6] Перов А.И., Каверина В.К. Нелинейные дифференциальные уравнения высших порядков. *Междунар. науч.-исслед. журн.*, 2016, № 6-5, с. 99–102.
DOI: https://doi.org/10.18454/IRJ.2016.48.139

[7] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Phys. Scr.*, 2009, no. T136, art. 014016.
DOI: https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/T136/014016

[8] Gazizov R.K., Lukashchuk S.Yu. Higher-order symmetries of a time-fractional anomalous diffusion equation. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 3, art. 216.
DOI: https://doi.org/10.3390/math9030216

[9] Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020, т. 24, № 1, с. 174–186. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

[10] Orlov V.N., Zheglova Yu.G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations. *Int. J. Model. Simul. Sci. Comput.*, 2020, vol. 11, no. 3, art. 2050026. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793962320500269

[11] Orlov V.N., Kovalchuk O.A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction. *J. Phys.: Conf. Ser.,* 2020, vol. 1425, art. 012127. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012127

[12] Федотова И.А. Математическая модель работы нелинейного стержневого элемента конструкции. *Изв. Петербургского ун-та путей сообщения*, 2004, № 1, с. 7–12.

[13] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation. *Comput. Math. with Appl.,* 2008, vol. 56, iss. 10, pp. 2507–2514.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.05.021

[14] Orlov V.N., Gasanov M.V. Investigation of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 1030, art. 012081. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/1030/1/012081

[15] Леонтьева Т.Ю. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния,* 2017, № 1, с. 69–78.

[16] Леонтьева Т.Ю. Об одном обобщении точных критериев существования подвижных особых точек одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *Научные ведомости БГУ. Сер. Математика. Физика*, 2017, № 13, с. 51–57.

[17] Леонтьева Т.Ю. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области. *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2015, № 2, с. 109–118.

[18] Пчелова А.З. Границы области применения приближенного решения в окрестности возмущенной подвижной особой точки одного дифференциального уравнения в комплексной области. *Вест. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика*, 2014, № 4, с. 170–179.

Орлов Виктор Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики НИУ МГСУ (Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26).

Гасанов Магомедюсуф Владимирович — преподаватель кафедры высшей математики НИУ МГСУ (Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Орлов В.Н., Гасанов М.В. Влияние возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в комплексной области. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 6 (105), с. 60–76. DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-60-76

THE INFLUENCE OF A PERTURBATION OF A MOVING SINGULAR POINT ON THE STRUCTURE OF AN ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF A CLASS OF THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A COMPLEX DOMAIN

V.N. Orlov orlovvn@mgsu.ru
M.V. Gasanov gasanovmv@mgsu.ru

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

Abstract

The authors prove the theorem of existence and uniqueness of the solution, construct an analytical approximate solution in the complex domain for one class of nonlinear differential equations of the third order, the solution of which are discontinuous functions. The solution of the listed mathematical problems is based on the classical approach. Since the existing methods allow obtaining moving singular points only approximately, it is necessary to investigate the effect of a perturbation of a moving singular point on the structure of an analytical approximate solution in the complex domain. Since the existing methods allow obtaining moving singular points only approximately, it is necessary to investigate the effect of a perturbation of a moving singular point on the structure of an analytical approximate solution in the complex domain. A theorem that allows us to determine a priori estimates of the error of the analytical approximate solution is proved. The study applies the classical approach to estimation and illustrates the application of series with fractional negative powers. The article presents the results of numerical experiment confirming the validity of the obtained theoretical position. The technique of optimization of a priori estimates of analytical approximate solution in the vicinity of perturbed value of moving singular point using a posteriori estimates is presented. The results allow expanding the classes of nonlinear differential equations used as a basis for mathematical models of processes and phenomena in various fields of human activity. In particular, the class of equations under consideration can be applied in the study of wave processes in elastic beams, which is confirmed by theoretical data

Keywords

Nonlinear third-order differential equation, moving singular points, waves, a priori estimation, Cauchy problem, perturbation of a moving singular point

Received 26.01.2022
Accepted 27.09.2022

REFERENCES

[1] Chugaynova A.P. Nonstationary solutions of a generalized Korteweg — de Vries — Burgers equation. *Proc. Steklov Inst. Math*., 2013, vol. 281, no. 1, pp. 204–212.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543813040172

[2] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models. *J. Phys.: Conf. Ser*., 2020, vol. 1425, art. 012107. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012107

[3] Chichurin A. Computer algorithm for solving of the Chazy equation of the third order with six singular points. *Miskolc Math. Notes*, 2017, vol. 18, no. 2, pp. 701–715.
DOI: https://doi.org/10.18514/MMN.2017.2232

[4] Filipuk G., Chichurin A. The properties of certain linear and nonlinear differential equations. In: Singh V., Gao D., Fischer A. (eds). *Advances in Mathematical Methods and High Performance Computing. Advances in Mechanics and Mathematics*, vol. 41. Cham, Springer, 2019, pp. 193–200.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-02487-1_11

[5] Astashova I.V., Sokolov D.A. Periodic solutions of a fourth-order nonlinear spectral problem. *Itogi nauki i tekh. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.,* M., VINITI RAS, 2021, vol. 192, pp. 20–25 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-20-25

[6] Perov A.I., Kaverina V.K. Non-linear differential equations of higher order. *Mezhdunar. nauch.-issled. zhurn*. [International Research Journal], 2016, no. 6-5, pp. 99–102 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18454/IRJ.2016.48.139

[7] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Phys. Scr*., 2009, no. T136, art. 014016.
DOI: https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/T136/014016

[8] Gazizov R.K., Lukashchuk S.Yu. Higher-order symmetries of a time-fractional anomalous diffusion equation. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 3, art. 216.
DOI: https://doi.org/10.3390/math9030216

[9] Orlov V.N., Leontyeva T.Yu. On extension of the domain for analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in a complex domain. *Vestn. Sam. gos. tekh. univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 174–186 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

[10] Orlov V.N., Zheglova Yu.G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations. *Int. J. Model. Simul. Sci. Comput*., 2020, vol. 11, no. 3, art. 2050026. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793962320500269

[11] Orlov V.N., Kovalchuk O.A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction. *J. Phys.: Conf. Ser*., 2020, vol. 1425, art. 012127. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012127

[12] Fedotova I.A. Mathematic working model of nonlinear rod element of construction. *Izv. Peterburgskogo univ. putey soobshcheniya* [Proceedings of Petersburg Transport University], 2004, no. 1, pp. 7–12 (in Russ.).

[13] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation. *Comput. Math. with Appl.,* 2008, vol. 56, iss. 10, pp. 2507–2514.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.05.021

[14] Orlov V.N., Gasanov M.V. Investigation of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*., 2020, vol. 1030, art. 012081.
DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/1030/1/012081

[15] Leontyeva T.Yu. The exact criteria for the existence of movable singular points of solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations of second order. *Vest. Chuvash. gos. ped. univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekhanika predelnogo sostoyaniya* [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State], 2017, no. 1, pp. 69–78 (in Russ.).

[16] Leontyeva T.Yu. The exact criteria for the existence of movable singular points of solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations of second order in the complex region. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gos. univ. Ser. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics], 2017, no. 13, pp. 51–57 (in Russ.).

[17] Leontyeva T.Yu. Influence of perturbation of moving singular point on the approximate solution of a nonlinear second order differential equation in the complex region. *Vest. Chuvash. gos. ped. univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekhanika predelnogo sostoyaniya* [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Ser. Mechanics of Limit State], 2015, no. 2, pp. 109–118 (in Russ.).

[18] Pchelova A.Z. The application area borders of approximate solution in the neighborhood of the approximate value of moving singularity for one differential equation in the complex domain. *Vestn. Voronezh. gos. univ. Ser. Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Ser.: Physics. Mathematics], 2014, no. 4, pp. 170–179 (in Russ.).

Orlov V.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (Yaroslavskoe shosse 26, Moscow, 129337 Russian Federation).

Gasanov M.V. — Teacher, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (Yaroslavskoe shosse 26, Moscow, 129337 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Orlov V.N., Gasanov M.V. The influence of a perturbation of a moving singular point on the structure of an analytical approximate solution of a class of third-order nonlinear differential equations in a complex domain. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 6 (105), pp. 60–76 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-60-76