МЕХАНИКА

УДК 517.9.532

М. И. Степанова, А. Н. Темнов

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

Поставлена и частично исследована задача о малых движениях несжимаемой жидкости, вытекающей из бака произвольной формы через плоскую поверхность слива, решение которой может быть использовано при анализе эффекта перераспределения топлива в целях получения максимального прироста энерговооруженности ракет-носителей пакетной схемы.

E-mail: s_masyanya@mail.ru; temnov@m1.sm.bmstu.ru

Ключевые слова: уравнение Лапласа, уравнение Бернулли, невозмущенное движение жидкости, закон баланса энергии, операторы в гильбертовом пространстве, задача Коши, эволюционная задача.

Постановка задачи. Задача о малых колебаниях несжимаемой идеальной жидкости, частично заполняющей неподвижный бак произвольной формы, рассматривалась в ряде работ, например [1–3]. В настоящей работе рассмотрена задача о малых колебаниях несжимаемой жидкости, частично заполняющей бак произвольной формы, вытекающей через плоское дно. Рассматриваемая задача может быть описана уравнениями гидродинамики, линеаризованными вблизи невозмущенного состояния.

За невозмущенное состояние примем установившееся движение вязкой жидкости, характеризуемое средней постоянной скоростью опускания V_0 невозмущенной свободной поверхности Γ_0 и средней постоянной скоростью вытекания жидкости V_Σ^0. Введем неподвижную систему координат $OX_1X_2X_3$ с началом на поверхности вытекания жидкости и обозначим через $p_0(x,t)$, $\vec{V}_0(x)$ давление и скорость в невозмущенном движении ($x = (x_1, x_2, x_3)$), через τ и S — область, занимаемую жидкостью, и смачиваемую твердую поверхность бака, рассматриваемую как кусочно-гладкую границу области τ. Полагаем также, что в невозмущенном движении свободная поверхность Γ_0 и поверхность вытекания жидкости Σ перпендикулярны вектору $\vec{f}_0$ интенсивности внешнего поля массовых сил.

Поверхность вытекания жидкости (для краткости далее поверхность слива Σ) — это поверхность перфорированной пластины заборного устройства. Установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в области τ может быть представлено системой уравнений [4]

$$\vec{V}_0 \cdot \nabla \vec{V}_0 - \nu \Delta \vec{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 + \vec{f}_0, \qquad \nabla \cdot \vec{V}_0 = 0 \tag{1}$$

и соответствующими граничными условиями. В системе (1) ∇, Δ, ν — операторы Гамильтона, Лапласа и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно.

Будем считать решение задачи (1) известным и предположим, что в невозмущенном движении поле скоростей $V_0(x)$ на поверхностях Γ_0 и Σ удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant n_0 \leqslant V_0(x_1, x_2) \leqslant N_0; \quad 0 \leqslant n_\Sigma \leqslant V_\Sigma(x_1, x_2) \leqslant N_\Sigma \tag{2}$$

и можно ввести величины, осредненные по площади поперечного сечения бака, для которых выполняются уравнения расхода

$$\tilde{V}_0 S_0 = \tilde{V}_\Sigma^0 S_\Sigma, \tag{3}$$

равенство давлений на свободной поверхности жидкости

$$p_0(x_3, t) = p_a = \text{ const},$$

основной закон гидростатики

$$p_0(x_3, t) = p_a - \rho g(x_3 - H(t)) \tag{4}$$

и уравнение Бернулли для перепада давления на пластине заборного устройства (ЗУ)

$$p_1^0(0, t) - p_2^0(-\delta), t) = -g\rho\delta + \rho\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}. \tag{5}$$

В уравнениях (2)–(4) обозначено:

$$\tilde{V}_0 = \frac{1}{S_\Gamma}\int\limits_{S_\Gamma} \vec{V}_0(x_1, x_2)\cdot\vec{n}_0\,ds, \quad \tilde{V}_\Sigma = \frac{1}{S_\Sigma}\int\limits_{S_\Sigma} \vec{V}_\Sigma^0(x_1, x_2)\cdot\vec{n}_\Sigma\,ds \tag{6}$$

— постоянная скорость опускания невозмущенной свободной поверхности и скорость слива; $n_0, N_0, n_\Sigma, N_\Sigma$ — значения минимальной и максимальной скоростей невозмушенного движения на поверхностях Γ_0 и Σ соответственно, причем вследствие сохранения расхода всегда выполняются соотношения

$$\min(n_0, n_\Sigma) = n_0, \quad \max(N_0, N_\Sigma) = N_\Sigma;$$

p_a — давление наддува бака ($p_a =$ const); $p_1^0(0, t)$, V_1 и $p_2^0(-\delta, t)$, V_2 — соответственно давление и скорость жидкости перед поверхностью слива и за ней; $\vec{n}_0, \vec{n}_\Sigma$ — внешние нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости Γ_0 и поверхности слива Σ.

Учитывая суммарные потери кинетической энергии жидкости при протекании через ЗУ и считая, что δ — толщина пластины — гораздо меньше характерного размера бака, запишем уравнение Бернулли при невозмущенном движении в виде

$$p_1^0(0,t) - p_2^0(0,t) = \xi\rho\frac{(V_\Sigma^0)^2}{2} \quad \text{при} \quad x_3 = 0, \tag{7}$$

где ξ — коэффициент сопротивления ЗУ.

Введение коэффициента ξ и поверхности слива позволяет при изучении возмущенного движения воспользоваться моделью идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение всюду, кроме поверхности Σ.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к невозмущенному состоянию. Предположим, что в возмущенном движении поле смещений, поле скоростей и поле давлений частиц жидкости приобретают малые отклонения $\vec{w}(x,t)$, $\vec{V}(x,t)$ и $p(x,t)$ от их невозмущенных значений. Векторные и скалярное поля $\vec{w}(x,t)$, $\vec{V}(x,t)$ и $p(x,t)$ будем считать величинами первого порядка малости. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, имеем $\vec{V}(x,t) = dw(x,t)/dt$. Тогда основное уравнение гидростатики и перепад давления на ЗУ в возмущенном движении принимают вид

$$p_0(x_3,t) + p(x,t) = p_a - \rho g(x_3 - H); \tag{8}$$

$$p_1^0(0,t) + p(x,t) - p_2^0(0,t) = \xi\rho\frac{(V_\Sigma^0 + V_\Sigma)^2}{2} \ \text{при} \ x_3 = 0. \tag{9}$$

Уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости при малых колебаниях запишем в виде

$$x_3 = H(t) + f(x_1,x_2,t), \quad H(t) = H_0 - V_0 t, \tag{10}$$

где $f(x_1,x_2,t) := w_\Gamma(x_1,x_2,H,t)$ — проекции вектора смещений частиц свободной поверхности жидкости на ось OX_3; H_0 — глубина жидкости в начальный момент времени.

Линеаризуя условия (8) и (9), для малых отклонений получаем

$$p = g\rho\vec{w}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma - f_\Gamma\rho \quad \text{при} \ x_3 = H(t); \tag{11}$$

$$p = \gamma\rho\vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma - f_\Sigma\rho \quad \text{при} \ x_3 = 0. \tag{12}$$

Здесь $\gamma = \xi\tilde{V}_\Sigma^0$ — обобщенный коэффициент сопротивления поверхности слива; $f_\Gamma(t)$ и $f_\Sigma(t)$ — заданные поля внешних воздействий на поверхностях Γ_0 и Σ в возмущенном движении.

Очевидно, что если пренебречь влиянием вязкости, рассматриваемые движения жидкости можно описать линеаризованным уравнением Эйлера

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \nabla\vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla\vec{V}_0)\vec{e}_3 = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\vec{e}_3, \tag{13}$$

которое необходимо дополнить уравнением неразрывности $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, условием непротекания через смачиваемую поверхность S в виде $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ и начальными условиями

$$\vec{w}(x,0) = \vec{w}^0(x); \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(x,0) = \vec{V}^0(x). \tag{14}$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объему, занимаемому жидкостью, с учетом соотношений (8), (14) и (15) для любого момента времени t, включая $t = 0$, получим

$$\int_{\Gamma_0} \vec{V} \cdot \vec{n}_\Gamma ds = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma ds, \tag{15}$$

т.е. дополнительное интегральное условие, которому должны подчиняться поле скоростей и поле смещений в рассматриваемой задаче.

Постановка краевой задачи для потенциала скоростей. При рассмотрении движений идеальной жидкости удобно ввести понятие потенциала скоростей $\Phi(x,t)$, который при малых движениях связан с полем смещений $\vec{w}(x,t)$ и полем скоростей $\vec{V}(x,t)$ очевидными формулами

$$\vec{w}(x,t) = \int \nabla\Phi(x,t)dt, \quad \vec{V}(x,t) = \nabla\Phi. \tag{16}$$

Подставив выражения (16) в уравнение Эйлера, получим линеаризованный интеграл Коши–Лагранжа, выраженный через потенциал скоростей:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_0(x_1,x_2) \cdot \nabla\Phi + \frac{p}{\rho} + g(x_3 - H(t)) = C(t), \tag{17}$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени. Предполагая возмущенное движение жидкости во всей области Q потенциальным и несжимаемым, сформулируем краевую задачу для определения потенциала $\Phi(x,t)$. Для удобства формулировки задачи переобозначим величины на поверхностях Γ_0 и Σ, присвоив индексы 1, 2 соответственно. Из уравнения (17), используя выражения (11), (12) и (16), уравнение неразрывности, условие непротекания и начальные условия, получаем

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в} \;\; Q; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S; \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_0(H) \cdot \nabla\Phi + g\vec{w} \cdot \vec{n}_1 = f_1(t) + c(t) \quad \text{на} \;\; \Gamma_1; \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_0(0) \cdot \nabla\Phi + \gamma\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_2 = f_2(t) + c(t) \quad \text{на} \;\; \Gamma_2; \tag{20}$$

$$w_i = w_i^0(x_1,x_2), \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} = V_i^0(x_1,x_2), \tag{21}$$

где $w_1 = \int\limits_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, H, t)dt$, $\dot{w}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, t)$ — смещение и скорость частиц жидкости на поверхностях Γ_0 и Σ соответственно; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S.

Замечание. В уравнениях (19), (20) направлению вектора $\vec{V}_0$ к днищу бака отвечает положительное значение $V_0(x_1,x_2)$.

Закон баланса энергии. Пусть существует классическое решение задачи (18)–(21). Умножим динамические граничные условия (19), (20) на $V_{ni} = \frac{\partial \Phi}{\partial n_i}$ $(i = 1, 2)$ и проинтегрируем по поверхностям Γ_0 и Σ. Сложим полученные выражения и учтем кинематические и интегральные соотношения на Γ_0 и Σ. В результате получим

$$\int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right) d\Gamma_0 + \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \right) d\Sigma +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_0} g w_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} d\Gamma_0 + \int\limits_{\Sigma} \gamma V_\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} d\Sigma = \int\limits_{\Gamma_0} f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} d\Gamma_0 + \int\limits_{\Sigma} f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} d\Sigma. \quad (22)$$

Преобразуем первые два слагаемые в (22), воспользовавшись условиями непротекания и гармоничности функции Φ в Q. Умножив преобразованное выражение на плотность жидкости $\rho =$ const, придем к закону изменения энергии

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) + \int\limits_{\Gamma_0} V_0 V_3^2 d\Gamma_0 - \int\limits_{\Sigma} V_\Sigma V_3^2 d\Sigma = -2\Phi^* + N^e, \quad (23)$$

где $T = 0{,}5 \int\limits_\tau \rho (\nabla \Phi)^2 d\tau$, $\Pi = 0{,}5 \int\limits_{\Gamma_0} \rho g w_\Gamma^2 d\Gamma_0$, $\Phi^* = 0{,}5 \int\limits_\Sigma \rho \gamma V_\Sigma^2 d\Sigma$ — кинетическая и потенциальная энергии и диссипативная функция жидкости соответственно; $N^{(e)} = \rho \int\limits_{\Gamma_0} f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} d\Gamma + \rho \int\limits_\Sigma f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} d\Sigma$ — мощность внешних возмущений.

Закон баланса энергии показывает, что только часть мощности внешнего возмущения расходуется на сообщение полной энергии жидкости, другая часть тратится на работу сил сопротивления и на работу взаимодействия малых движений свободной поверхности жидкости и малых возмущений скорости на поверхности слива с невозмущенным потоком жидкости. При отсутствии внешних воздействий и невозмущенного потока жидкости изменение всей энергии системы равно по модулю удвоенному значению диссипативной функции Φ^*, которая характеризует работу сил сопротивления, возникающих на поверхности слива Σ при малых отклонениях скоростей частиц жидкости от их невозмущенных значений.

Для выяснения работы взаимодействия малых движений жидкости с невозмущенным потоком преобразуем крайние слагаемые в левой части выражения (23), принимая во внимание уравнение неразрывности, граничные условия и теорему Гаусса–Остроградского

$$\int\limits_{\Gamma_0} V_0 V_3^2 d\Gamma_0 - \int\limits_{\Sigma} V_\Sigma V_3^2 d\Sigma = \oint\limits_S V_0 V_3 \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS =$$
$$= \int\limits_{\tau} \nabla \cdot (V_0 V_3 \vec{V})\, d\tau = \int\limits_{\tau} (V_0 \nabla V_3 + (\vec{V} \cdot \nabla V_0)\vec{e}_3) \cdot \vec{V} d\tau =$$
$$= \int\limits_{\psi} (\vec{V}_0 \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}_0) \cdot \vec{V} d\tau = \rho^{-1} \left(\int\limits_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} d\tau + \int\limits_{\tau} R d\tau \right), \quad (24)$$

где $\vec{F} = 0{,}5\rho \vec{V}_0 V^2$, а $\int\limits_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} d\tau$ — количество кинетической энергии волновых движений, обусловленное невозмущенным потоком; $R = (\rho V_3 V_1 \vec{e}_1 + \rho V_3 V_2 \vec{e}_2 + \rho V_3 V_3 \vec{e}_3) \cdot \nabla V_0$; $\int\limits_{\tau} R d\tau$ — работа напряжений Рейнольдса на градиенте скорости невозмущенного потока. Закон баланса энергии приобретает вид

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) + \int\limits_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} d\tau = - \int\limits_{\tau} R d\tau - 2\Phi^* + N^e. \quad (25)$$

Из (25) следует, что в отсутствие внешнего возмущения, даже если пренебречь диссипацией, интегральная волновая энергия не будет сохраняться из-за взаимодействия волн с невозмущенным потоком. Исследование задачи (18)–(21) для жидкости, заполняющей полость произвольной формы, удобно проводить, если предварительно придать задаче операторную трактовку.

Операторная формулировка задачи. Для дальнейшего исследования введем обозначения Γ_0, Σ для поверхностей и τ для области (пусть $\Gamma_0 =: \Gamma_1$, $\Sigma =: \Gamma_2$, $\tau =: Q$) и введем потенциал смещений — функцию $\chi(x,t)$; $\Phi(x,t) = \partial\chi/\partial t$. Задача для определения функции $\chi(x,t)$ формулируется на основе (18)–(21):

$$\Delta\chi = 0 \quad \text{в} \ \ Q; \qquad \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \ \ S; \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \vec{V}_0(H) \cdot \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} + g\vec{w} \cdot \vec{n}_1 = f_1(t) + c(t) \quad \text{на} \;\; \Gamma_1; \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \vec{V}_0(0) \cdot \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_2 = f_2(t) + c(t) \quad \text{на} \;\; \Gamma_2; \tag{28}$$

$$w_i = w_i^0(x_1, x_2); \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} = V_i^0(x_1, x_2). \tag{29}$$

Закон изменения энергии (23), (25) указывает, что функции $\vec{w}(x,t) = \nabla\chi$, $\vec{V}(x,t) = \nabla\Phi$ в каждый момент времени t можно рассматривать как элементы $w(t)$, $V(t)$ гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) := \int\limits_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Omega.$$

В задачах о малых движениях жидкости, частично заполняющей полость твердого тела, и исследуемых методами функционального анализа, обычно используют разложение пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ на три ортогональных подпространства и последующее проектирование на эти подпространства векторного уравнения (13) [5, 6]. В результате получается нетривиальная проблема о нахождении потенциала смещений, т.е. функции $\chi(x,t)$, из уравнения, основанного на интеграле Коши. Используя решения вспомогательных краевых задач, полученную проблему можно привести к исследованию операторного уравнения для функции $w(x,t)$ — отклонения свободной поверхности, принадлежащей при фиксированном t гильбертову пространству $L_2(\Gamma_0)$ комплекснозначных скалярных функций с нормой $\|w\|_0^2 = \int\limits_{\Gamma_0} |w|^2 d\Gamma_0$.

Будем использовать обозначения w_1, w_2 для отклонений жидкости в вертикальном направлении на свободной поверхности и поверхности слива и введем гильбертово пространство $L_2(\Gamma) = \oplus_{i=1}^2 L_2(\Gamma_i)$ комплекснозначных пар функций $w = (w_1, w_2)^t$ со скалярным произведением вида $(w, v)_{L_2(\Gamma)} = \sum\limits_{2}^{2} \int\limits_{\Gamma_i} w_i v_i^* d\Gamma$, а при выполнении условия

$$\int\limits_{\Gamma} w \, d\Gamma = 0, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

— гильбертово пространство $L_{2,\Gamma}$ коразмерности 1

$$L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{(1_1, 1_2)^{\text{т}}\}, \tag{30}$$

где 1_i $(i = 1, 2)$ — единичные функции, записанные на Γ_i.

Получим теперь дифференциальное уравнение для функций $w_i(t)$. С этой целью введем пространство $H^1(Q)$ функций с нормой

$$\|\chi\|_{H^1(Q)^2} = \int\limits_Q |\nabla\chi|^2 dQ + \left(\int\limits_{\Gamma_1} \chi d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} \chi d\Gamma_2\right)^2 \tag{31}$$

и его подпространство $H^1_\Gamma(Q)$ функций с нормой

$$\|\chi\|^2_{H^1_\Gamma(Q)} = \int\limits_Q |\nabla\chi|^2 dQ, \tag{32}$$

для элементов которого выполняется условие

$$\int\limits_{\Gamma_1} \chi\, d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} \chi\, d\Gamma_2 = 0, \quad \left(\int\limits_{\Gamma_j} \chi\, d\Gamma_j \neq 0\right), \tag{33}$$

а также пространство $H^1_{h_1,S}(Q)$ гармонических функций, для которых производная по нормали равна нулю на S.

Для приведения исходной задачи (26)–(29) к операторному уравнению, следуя [5], рассмотрим вспомогательную задачу Неймана:

$$\begin{gathered} \Delta\chi = 0 \quad \text{в} \;\; Q, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \;\; S, \\ \frac{\partial\chi}{\partial n_j} = w_j \quad \text{на} \;\; \Gamma_j, \qquad \sum_{j=1}^{2} \chi\, d\Gamma_j = 0, \end{gathered} \tag{34}$$

для которой необходимым условием разрешимости является равенство

$$\int\limits_{\Gamma_1} w_1 d\Gamma_1 = \int\limits_{\Gamma_2} w_2 d\Gamma_2. \tag{35}$$

Определение 1. Назовем обобщенным решением задачи (34) функцию $\chi \in H^1_{h_1,S}(Q)$, для которой тождество

$$(\chi, \psi)_{H^1_\Gamma(Q)} = -\int\limits_{\Gamma_1} w_1\psi^* d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} w_2\psi^* d\Gamma_2 \tag{36}$$

имеет место при $\forall\psi \in H^1_\Gamma(Q)$.

Как известно, задача Неймана (34) имеет единственное обобщенное решение $\chi \in H^1_{h_1,S}(Q)$ при $\forall w \in H^{-1/2}_\Gamma(\Gamma) \supset L_{2,\Gamma}$ и порождает [5] положительный компактный оператор $\hat{C}$, который ставит в соответствие функции $w = \{w_1, w_2\} \in H^{-1/2}_\Gamma(\Gamma)$ функцию $h = \{h_1, h_2\} \in H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\hat{C}\left(\frac{\partial\chi}{\partial n}\right) = \chi \;\; \text{на} \;\; \Gamma. \tag{37}$$

Здесь $H_\Gamma^{-1/2}(\Gamma)$ — гильбертово пространство функций с негативной нормой, построенное по нулевому пространству $H := L_{2,\Gamma}$ и пространству с позитивной нормой $H_\Gamma^{1/2}(\Gamma)$.

Для детального изучения оператора $\hat{C}$ искомый потенциал χ представим в виде

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + \pi(t), \tag{38}$$

где постоянная $\pi(t)$ удовлетворяет условию

$$\pi(t) = (|\Gamma_1| + |\Gamma_2|)^{-1}\left(\int\limits_{\Gamma_1}\sum_{i=1}^{2}\chi_i(t,x)d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{2}\chi_i(t,x)d\Gamma_2\right),$$

а χ_k $(k=1,2)$ есть решения задач

$$\Delta\chi_k = 0 \quad \text{в} \;\; Q, \quad \frac{\partial\chi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \;\; S, \quad \frac{\partial\chi_k}{\partial n_k} = w_k \quad \text{на} \;\; \Gamma_k;$$

$$\frac{\partial\chi_k}{\partial n_j} = 0 \quad \text{на} \;\; \mathit{\Gamma}_j, \;\; k \neq j, \;\; (k,j=1,2), \;\; \int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\chi_1}{\partial n_1}d\Gamma_1 = \int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\chi_2}{\partial n_2}d\gamma_2. \tag{39}$$

Решения краевых задач (39) можно записать в виде

$$\chi_k(t,x) = T_k w_k, \quad k=1,2, \tag{40}$$

где операторы T_k осуществляют изометрию между пространствами $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ и пространством $H^1_{h_1,S}$.

Для элементов χ из $H^1_\Gamma(Q)$ зададим операторы следа γ_1, γ_2 по закону

$$\begin{aligned} \chi\big|_{\Gamma_1} &:= \gamma_1\chi = \left(\chi_1\big|_{\Gamma_1}, \chi_2\big|_{\Gamma_1}\right); \\ \chi\big|_{\Gamma_2} &:= \gamma_2\chi = \left(\chi_1\big|_{\Gamma_2}, \chi_2\big|_{\Gamma_2}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

и рассмотрим согласно абстрактной схеме [5] гильбертовы пары пространств: $\{H^1_\Gamma(Q), L_2(\Gamma_1)\}$, $\{H^1_\Gamma(Q), L_2(\Gamma_2)\}$. В силу второй теоремы вложения Соболева операторы γ_j $(j=1,2)$ компактно действуют из $H^1_\Gamma(Q)$ в $L_2(\Gamma_j)$. Учитывая представления (38), (40), из (41) получим

$$\begin{aligned} \chi\big|_{\Gamma_1} &= C_{11}w_1 + C_{12}w_2; \\ \chi\big|_{\Gamma_2} &= C_{21}w_1 + C_{22}w_2, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$C_{jk} = \gamma_j T_k. \tag{43}$$

Лемма 1. *Операторы C_{jk} — компактные операторы, действующие из $H^{-1/2}(\Gamma_j)$ в $H^{1/2}(\Gamma_k)$; при $j \neq k$ C_{jk} — взаимно сопряженные, а при $j = k$ — самосопряженные положительные операторы.*

Используя результат (42), для производных $\partial^2\chi/\partial t^2$ на поверхностях Γ_i получаем

$$\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right|_{\Gamma_1} \\ \left.\dfrac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right|_{\Gamma_2} \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \chi\Big|_{\Gamma_1} \\ \chi\Big|_{\Gamma_2} \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2}\hat{C}w, \quad (44)$$

и, следовательно, исходную задачу (26)–(29) можно переписать в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} &\hat{C}\frac{d^2w}{dt^2} + \gamma\hat{D}\frac{dw}{dt} + g\hat{B}w = \hat{F}(t) + c(t)\eta_0; \\ &w(0) = w^0, \quad \dot{w}(0) = w^1, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_0\beta & 0 \\ 0 & \tilde{V}_\Sigma\beta + I \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\hat{F}(t) = (f_1, f_2)^{\mathrm{т}}, \quad \eta_0 = (I_1, I_2)^{\mathrm{т}}, \quad w = (w_1, w_2)^{\mathrm{т}}, \ \ \beta = \gamma^{-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Введем ортопроектор P_H на пространство $H := L_{2,\Gamma}$ и, применив оператор P_H к обеим частям (45), избавимся от постоянной $c(t)$:

$$\begin{aligned} &C\frac{d^2w}{dt^2} + \gamma D\frac{dw}{dt} + gBw = F(t); \\ &w(0) = w^0, \quad \dot{w}(0) = w_1^0, \end{aligned} \quad (47)$$

где $C = P_H\hat{C}P_H$, $D = P_H\hat{D}P_H$, $B = P_H\hat{B}P_H$, $F = P_H\hat{F}P_H$. В итоге приходим к выводу, сформулированному в следующей теореме.

Теорема 1. *Задача* $(26) - -(29)$ *о малых потенциальных движениях идеальной жидкости, имеющей свободную поверхность* Γ_1 *и вытекающей через поверхность слива* Γ_2*, равносильна задаче Коши для линейного дифференциального операторного уравнения второго порядка (47) в гильбертовом пространстве* H.

Свойства операторов. Сформулируем кратко основные свойства операторных коэффициентов уравнения (47). Свойство оператора C было определено ранее, а именно $0 < C \in \mathfrak{S}_\infty$, где $\mathfrak{S}_\infty$ — класс компактных операторов в гильбертовом пространстве. Из (50) следует, что D и B ограничены в $H := L_{2,\Gamma}$ и $B \geqslant 0$, а свойства оператора D зависят от значений параметров β и $\tilde{V}_0$ $(\tilde{V}_\Sigma)$.

Лемма 2. *Оператор* D — *самосопряженный, ограниченный и ограниченный снизу оператор. Пусть* $V_0 = 0$ $(V_\Sigma = 0)$ — *квазистационарная постановка задачи, тогда оператор* D — *неотрицательный,* $D \geqslant 0$*. Если* $V_0 > 0$ $(V_\Sigma > 0)$*, то оператор* D — *положительный,* $D > 0$.

Разрешимость эволюционной задачи. Перейдем к исследованию задачи Коши (47). Выполним переход от задачи (47) для линейного дифференциального уравнения второго порядка к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно старшей производной. Для этого введем новую искомую функцию $v(t)$ с помощью соотношения

$$-i\sqrt{g}\, B^{1/2} w = dv/dt (v(0) = 0).$$

Продифференцировав это соотношение, запишем задачу (47) в виде системы уравнений и, введя новые обозначения, получаем задачу в сдвоенном гильбертовом пространстве $H^2 = H \oplus H$

$$A\frac{dy}{dt} + B_0 y = f_0, \quad y(0) = y^0 = (w^1, -i\sqrt{g} B^{1/2} w^0), \tag{48}$$

где

$$y(t) := \left(\frac{dw}{dt}, \frac{dv}{dt}\right), \quad A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} \gamma D i \sqrt{g} & B^{1/2} \\ i\sqrt{g}\, B^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проведем далее замену функции $y(t)$ по формуле $z(t) = A^{1/2} y(t)$ и применим слева к уравнению (48) оператор $A^{-1/2}$, тогда приходим к задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} + A_0 z = F_0, \quad z(0) = z^0 = A^{1/2} y^0 = (A^{1/2} w^1, -iA^{1/2}\sqrt{g} B^{1/2} w^0), \tag{49}$$

где $F_0 = A^{-1/2} F$, а $A_0 = A^{-1/2} B_0 A^{-1/2}$ — самосопряженный неограниченный положительный оператор в H^2; $A_0 > 0$, $(A_0 z, (z')^*) = (z, A_0 (z')^*)$ и, следовательно, оператор $-A_0$ порождает аналитическую полугруппу операторов $U(t) := \exp(-A_0 t)$. Пусть $z^0 \in H^2$ и $F_0(t) \in H^2$ является непрерывной функцией t, тогда задача (49) имеет единственное обобщенное решение, выражаемое формулой

$$z(t) = U(t) z^0 + \int_0^t U(t-\tau) F_0(\tau) d\tau.$$

Это решение является непрерывной функцией t со значениями в H^2.

Из доказанной непрерывности по t функции $z(t)$ следует непрерывность функций $y(t)$ в H^2, dw/dt, dv/dt, $w(t)$ в H и функции $\chi(t)$ в $H^1_{h_1,S}(Q)$.

Теорема 2. *Пусть для начальных данных* (29) *задачи* (26)–(28) *выполнены условия* $w^0 \in H_\Gamma^{-1/2}(\Gamma)$, $w^1 \in H_\Gamma^{-1/2}(\Gamma)$ *и* $\chi \in H^1_{h_1,S}(Q)$,

$(f_1(t), f_2(t))^t \in H$, *тогда задача* (26)–(29) *имеет единственное обобщенное решение, для которого* $w(x,t)$, $\chi(x,t)$ *суть непрерывные функции* t *со значениями в пространствах* $H := L_{2,\Gamma}$ *и* $H^1_{h_1,S}(Q)$ *соответственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М. : Машиностроение, 1975. – 416 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 563 с.
3. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М.: ВЦ АН СССР, 1966. – 270 с.
4. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
5. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
6. Темнов А. Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1984.

Статья поступила в редакцию 1.09.2011

Александр Николаевич Темнов родился в 1945 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области механики, механики жидкости и газа и ракетно-космической техники.

A.N. Temnov (b. 1945) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of mechanics, fluid dynamics and rocket and space technology.

Мария Ильинична Степанова родилась в 1986 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2009 г. Аспирантка кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области динамики летательных аппаратов.

M.I. Stepanova (b. 1986) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2009. Post-graduate of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of dynamics of flying vehicles.