УДК 517.4

ПОСТРОЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ВХОД-ВЫХОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

А. В. Евсеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: Holod13@yandex.ru

Решена задача реализации динамической системы (задача преобразования системы уравнений отображения вход-выход к системе уравнений состояния). Известные результаты о существовании реализаций, не содержащих производных управления, расширены на общий случай. Методами теории дифференциальных форм получены условия существования системы уравнений состояния, содержащей производные управления не выше заданного порядка. Предложены два алгоритма построения таких систем. Первый алгоритм с введением новых выходов удобен для понижения порядка одного управления без изменения порядков других управлений, второй алгоритм — для понижения порядков нескольких управлений. Эти алгоритмы можно использовать для понижения порядков производных управления в уравнениях состояния, рассматривая их как уравнения отображения вход-выход. Приведен пример упрощенной модели подъемного крана, подтверждающий эффективность такого подхода.

Ключевые слова: описания систем с управлением, реализации отображений вход-выход, дифференциальные формы.

CONSTRUCTION OF INPUT-OUTPUT MAP REALIZATIONS USING DIFFERENTIAL FORMS

A.V. Evseev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: Holod13@yandex.ru

A problem of the dynamical system realization, i.e., a problem of constructing the state-space realization for input-output map, is solved. The known data concerning the existence of the realization without derivatives of controls are extended to the general case. The conditions of the existence of a state-space system with the fixed-order derivatives of control are obtained using methods of differential forms theory. Two algorithms for constructing realizations are offered. The first algorithm with introduction of new outputs is convenient for reducing the derivative order for one input without change in derivative orders of other outputs. The second algorithm is useful for reducing the derivative orders for several outputs. These algorithms may be used for decreasing the control derivative orders in the state-space system if we consider the system as input-output map. The example of the simplified model of a crane showing the effectiveness of this approach is considered.

Keywords: descriptions of systems with control, input-output maps realizations, differential forms.

1. Отображения вход-выход и их реализации в виде уравнений состояния. Существует два распространенных случая описания системы с управлением: в виде уравнений отображения вход-выход и с помощью переменных состояния. В первом случае выход ($y \in \mathbb{R}^p$) непосредственно связывается с входом ($u \in \mathbb{R}^m$) дифференциальными уравнениями вида

$$y_i^{(k_i)} = \\ = \phi_i(t, y_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \ldots, u_1^{(s_1)}, u_2, \ldots, u_m^{(s_m)}), \quad i = \overline{1, p}. \tag{1}$$

Уравнения системы (1) называют *уравнениями отображения вход-выход*.

Во втором случае кроме переменных входа и выхода используются дополнительные переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$, которые называются *переменными состояния*. Вход u изменяет состояние x системы в соответствии с системой

$$\dot{x} = f(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r_0)}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

которую называют *системой уравнений состояния*. При этом выход явно выражается через переменные состояния, управления (входа) и их производные до некоторого порядка $\tilde{r}$:

$$y = h(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\tilde{r})}), \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{3}$$

Выражения (3) определяют замену переменных, позволяющую перейти от описания системой уравнений (2), (3) к описанию системы уравнений (1). *Задача реализации отображений* — задача перехода от описания системой уравнений (1) к эквивалентному описанию системой уравнений (2), (3), т.е. поиск системы уравнений (2), (3) и таких функций

$$x = X(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k_0-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s_1)}), \tag{4}$$

что при подстановке (3) в (1) с учетом (2) и при подстановке (4) в систему уравнений (2), (3) при условии (1) получаются верные тождества.

Задача перехода от одного описания к другому рассмотрена в работах [1–3]. Для частного случая системы уравнений состояния вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \tag{5}$$

условия существования реализации изложены в работах [4, 5]. Однако такие реализации имеют место далеко не всегда. Далее это будет показано на конкретном примере. В связи с этим возникает вопрос о существовании реализаций общего вида, в которых производные управления могут присутствовать, однако их порядок должен быть ниже, чем в исходной системе.

В настоящей статье решается задача поиска реализаций общего вида: требуется найти замену (4), позволяющую получить реализацию

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_1^{(s_1-r_1)}, u_2, \ldots, u_m^{(s_m-r_m)}), \quad 0 \le r_i \le s_i. \tag{6}$$

В частном случае при $r_i = s_i$ система (6) примет вид (5). Для этого в работе [4] введены следующие обозначения.

Пусть $\mathcal{F}$ — кольцо гладких функций, каждая из которых зависит от величины t, переменных y, u и некоторого конечного (но произвольного) числа их производных. Рассмотрим модуль 1-форм над кольцом $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dy_1, d\dot{y}_1, \ldots, dy_1^{(k_1-1)}, dy_2, d\dot{y}_2, \ldots$$
$$\ldots, dy_p^{(k_p-1)}, du_1, \ldots, du_1^{(s-1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s-1)}\}.$$

Для 1-формы $\omega \in \mathcal{H}_1$ обозначим через $\dot{\omega}$ производную в силу системы (1). По индукции определим

$$\mathcal{H}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_k : \dot{\omega} \in \mathcal{H}_k\}, \qquad k \ge 1. \tag{7}$$

Можно показать, что $\mathcal{H}_k$ есть модуль над $\mathcal{F}$ и $dt \in \mathcal{H}_k$ для всех $k \ge 1$ [4].

Теорема 1. *Реализация вида* $(5), (3)$ *локально существует для уравнений* (1) *отображения вход-выход тогда и только тогда*, *когда модуль* $\mathcal{H}_{s+1}$ *имеет базис из точных* 1-*форм* [4].

Теорему 1 можно обобщить на случай произвольных переменных $0 \le r_i \le s_i$, $i = \overline{1, m}$. Для этого предложим два способа. Первый способ основан на преобразовании общей задачи к случаю, рассмотренному в теореме 1, с помощью введения новых выходов. Второй способ — обобщение доказательства теоремы 1 путем построения аналогов модулей $\mathcal{H}_i$.

В работе [6] также решалась задача построения реализаций общего вида методами теории векторных полей. В этой статье будем использовать двойственный язык дифференциальных форм, так как в некоторых случаях этот подход оказывается более удобным. Алгоритмы, разработанные авторами работы [7], основаны именно на таком подходе и обобщаются на рассмотренный в статье случай.

2. Построение реализаций введением новых выходов. Введем новые выходы z_i и управления v_i согласно следующему правилу:

$$v_i = u_i^{(s_i-r_i)}, \tag{8}$$

$$\text{при} \quad s_i - r_i > 0 \text{ полагаем } z_i = u_i, \tag{9}$$

$$\text{при} \quad s_i - r_i = 0 \text{ выход } z_i \text{ не вводится}.$$

Система (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y_i^{(k_i)} &= \phi_i(t, y_1, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, z_1, \ldots, z_m^{(s_m-r_m-1)}, \\ &\qquad v_1, \ldots, v_1^{(r_1)}, v_2, \ldots, v_m^{(r_m)}), \quad i = \overline{1,p}, \qquad (10) \\ z_i^{(s_i-r_i)} &= v_i \quad \text{при } s_i - r_i > 0,\ i = \overline{1,m}. \qquad (11) \end{aligned}$$

Обозначим через R старший порядок производной управления в системе (10):

$$R = \max_{i=\overline{1,m}} r_i. \qquad (12)$$

Тогда система (10) примет вид

$$y_i^{(k_i)} = \phi_i(t, y_1, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, z_1, \ldots, z_m^{(s_m-r_m-1)}, v_1, \ldots$$
$$\ldots, v_1^{(R)}, v_2, \ldots, v_m^{(R)}), \quad i = \overline{1,p}, \qquad (13)$$

где переменные z_i и их производные входят в систему при $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1,m}$.

Модуль $\mathcal{H}_1$ для отображения вход-выход (13), (14) определяется как

$$\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dy_1, d\dot{y}_1, \ldots, dy_1^{(k_1-1)}, dy_2, d\dot{y}_2, \ldots, dy_p^{(k_p-1)}, dz_1, \ldots$$
$$\ldots, dz_1^{(s_1-r_1-1)}, dz_2, \ldots, dz_m^{(s_m-r_m-1)}, dv_1, \ldots, dv_1^{(R-1)}, dv_2, \ldots, dv_m^{(R-1)}\},$$

где переменные dz_i и их производные входят в систему при $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1,m}$.

Модули $\mathcal{H}_i$, $i = 2, 3, \ldots$, находят по (7).

Теорема 2. *Реализация вида* (3), (6) *локально существует для уравнений* (1) *отображения вход-выход тогда и только тогда*, *когда для системы уравнений* (13), (14) *модуль* $\mathcal{H}_{R+1}$ *имеет базис из точных* 1-*форм.*

◀ **Необходимость.** Пусть существует реализация вида (3), (6). После замены (8), (9) система (6) имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, z_1, \ldots, z_1^{(s_1-r_1-1)}, z_2, \ldots, z_m^{(s_m-r_m-1)}, v), \qquad (14)$$

где переменные z_i и их производные входят в систему при $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1,m}$.

Вводим дополнительные переменные z_{ij} при $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{0, s_i - r_i - 1}$, и получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i0} &= z_{i1}, \quad \ldots, \quad \dot{z}_{i,s_i-r_i-2} = z_{i,s_i-r_i-1}, \quad \dot{z}_{i,s_i-r_i-1} = v_i, \qquad (15) \\ &\qquad \text{при } s_i - r_i > 0,\ i = \overline{1,m}; \\ \dot{x} &= f(t, x, z_{10}, \ldots, z_{1,s_1-r_1-1}, z_{20}, \ldots, z_{m,s_m-r_m-1}, v). \qquad (16) \end{aligned}$$

Система (15), (16) является реализацией вида (5), (3) для отображения вход-выход (13), (11), следовательно, согласно теореме 1, модуль $\mathcal{H}_{R+1}$ имеет базис из точных 1-форм.

Достаточность. Выполнение условий теоремы 1 для системы (13), (14) означает, что модуль $\mathcal{H}_{R+1}$ имеет базис из точных 1-форм. Докажем, что в модуле $\mathcal{H}_{R+1}$ будут содержаться 1-формы $dz_i^{(j_i)}$, $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j_i = \overline{0, s_i - r_i - 1}$.

Действительно, некоторая 1-форма ω принадлежит модулю $\mathcal{H}_{R+1}$ тогда и только тогда, когда $\dot{\omega} \in \mathcal{H}_R$. Продолжая эту цепочку до $\mathcal{H}_1$, получаем

$$\omega \in \mathcal{H}_{R+1} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^{(R)} \in \mathcal{H}_1. \tag{17}$$

Рассмотрим R-ю производную 1-формы $dz_i^{(j_i)}$ в силу системы (13), (11). Если $0 \le j_i \le s_i - r_i - 1 - R$, то $j_i + R \le s_i - r_i - 1$. Поэтому $dz_i^{(j_i+R)} \in \mathcal{H}_1$, следовательно, $dz_i^{(j_i)} \in \mathcal{H}_{R+1}$. Пусть $s_i - r_i - R \le j_i \le$ $\le s_i - r_i - 1$, тогда

$$dz_i^{(j_i+R)} = dv_i^{(j_i+R-(s_i-r_i))} = dv_i^{(q)}, \tag{18}$$

где $q = j_i + R - (s_i - r_i)$, $i \in 1, m$; $q \in 0, R-1$.

Поскольку $q < R$, все 1-формы вида (18) принадлежат модулю $\mathcal{H}_1$, а, согласно (17), $dz_i^{(j_i)} \in \mathcal{H}_{R+1}$, $i = \overline{1, m}$, $j_i = \overline{0, s_i - r_i - 1}$. Поэтому, учитывая размерность модуля $\mathcal{H}_{R+1}$, в качестве базиса $\mathcal{H}_{R+1}$ можно выбрать набор 1-форм следующего вида:

$$dt, dx_1, \ldots, dx_n, dz_i^{(j_i)}, \quad s_i - r_i > 0,\ i = \overline{1, m},\ j_i = \overline{0, s_i - r_i - 1}. \tag{19}$$

Формируя на основе интегралов точных 1-форм (19) замену переменных, получаем, что уравнения (11) можно оставить без изменений, а система (13) согласно теореме 1 примет вид (14). Переходя обратно к переменным x, u, записываем систему (6). Выражая переменные y_i через x_q, $q = \overline{1, n}$, и $u_k^{(l_k)}$, $k = \overline{1, m}$, найдем выражения вида (3), которые в совокупности с (6) составляют требуемую реализацию. ►

3. Построение реализаций выбором кораспределения $\mathcal{H}_1$. Введем следующие обозначения:

$$\bar{r} = (r_1, \ldots, r_m), \quad R = \max_{i=\overline{1,m}} r_i. \tag{20}$$

Тогда для системы (1) по аналогии с модулем $\mathcal{H}_1$ определим [4]

$$\mathcal{H}_1^{\bar{r}} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dy, \ldots, dy^{(k-1)}, du_1, \ldots \\ \ldots, du_1^{(s_1-r_1+R-1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s_m-r_m+R-1)}\}. \tag{21}$$

Модули $\mathcal{H}_i^{\bar{r}}$ вводятся по индукции:

$$\mathcal{H}_{i+1}^{\bar{r}} = \{\omega \in \mathcal{H}_i^{\bar{r}} : \dot{\omega} \in \mathcal{H}_i^{\bar{r}}\}. \tag{22}$$

Для $\mathcal{H}_j^{\bar r}$ справедлив следующий аналог теоремы 2 [8].

Лемма 1. Любая 1*-форма* $\omega \in \mathcal{H}_1^{\bar r}$ *единственным образом может быть представлена в виде суммы*

$$\omega = \omega_{R+1} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_q=s_q-r_q}^{s_q-r_q+R-1} c_q^{k_q} du_q^{(k_q)}, \tag{23}$$

где $\omega_{R+1} \in \mathcal{H}_{R+1}^{\bar r}$.

Коэффициенты $c_q^{k_q}$ *для* 1*-формы* $\omega \in \mathcal{H}_1^{\bar r}$ *вида*

$$\omega = a_0 dt + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_q=0}^{s_q-r_q+R-1} b_q^{k_q} du_q^{(k_q)}, \quad a_0, a_i^{l_i}, b_q^{k_q} \in \mathcal{F}$$

могут быть найдены по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} c_q^{s_q-r_q+R-1} &= b_q^{s_q-r_q+R-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u_q^{(s_q-r_q+R)}}; && (24)\\ c_q^{s_q-r_q+R-j} &= c_q^{s_q-r_q+R-(j-1)}\left(\Omega_j\right), \qquad j = 2, \ldots, R, && (25)\\ \Omega_j &= \frac{d}{dt}\left(\omega - \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=s_q-r_q+R-(j-1)}^{s-1} c_q^k du^{(k)}\right), \end{aligned}$$

где $c_q^{k_q}(\Omega_j)$ *— соответствующий коэффициент в разложении* 1*-формы* Ω_j *согласно* (23).

◀ Используем индукцию по j. Рассмотрим произвольный элемент модуля $\mathcal{H}_1^{\bar r}$:

$$\omega_1 = a_0 dt + \sum_{j=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_q=0}^{s_q-r_q+R-1} b_q^{k_q} du_q^{k_q}, \quad a_0, a_i^{l_i}, b_q^{k} \in \mathcal{F}. \tag{26}$$

Разложение ω_1 будем искать в виде

$$\omega_1 = \omega_2 + \sum_{q=1}^{m} c_q^{s_q-r_q+R-1} du_q^{(s_q-r_q+R-1)}, \tag{27}$$

где $\omega_2 \in \mathcal{H}_2^{\bar r}$.

Продифференцировав (26) в силу системы (1), получим

$$\dot\omega_1 = \dot a_0 dt + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} \dot a_i^{l_i} dy_i^{(l_i)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_q=0}^{s_q-r_q+R-1} \dot b_q^{k_q} du_q^{(k_q)} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{l_i=0}^{k_i-2} a_i^{l_i} dy_i^{(l_i+1)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} a_i^{k_i-1} d\phi_i(t, y, \ldots, y^{(k-1)}, u, \ldots, u^{(s)}) + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_q=0}^{s_q-r_q+R-1} b_q^{k_q} du_q^{(k_q+1)} =$$

$$= \tilde{\omega}_1 + \sum_{q=1}^{m} \left(b_q^{s_q-r_q+R-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u_q^{(s_q-r_q+R)}} \right) du_q^{(s_q-r_q+R)}, \quad (28)$$

где $\tilde{\omega}_1 \in \mathcal{H}_1^{\bar{r}}$.

Из (28) и (27) следует, что выражение для коэффициентов $c_q^{s_q-r_q+R-1}$ имеет вид

$$c_q^{s_q-r_q+R-1} = b_q^{s_q-r_q+R-1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha^{k_\alpha-1} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u_q^{(s_q-r_q+R)}}, \quad q = \overline{1,m}. \quad (29)$$

Разложение (27) единственно, так как $du_q^{(s_q-r_q+R-1)} \notin \mathcal{H}_2^{\bar{r}}$. Утверждение леммы для $j = 1$ доказано.

Пусть утверждение леммы верно для $j = l - 1$, тогда

$$\omega_1 = \omega_l + \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_q=s_q-r_q+R-l+1}^{s_q-r_q+R-1} c_q^{k_q} du_q^{(k_q)}, \quad (30)$$

где $\omega_l \in \mathcal{H}_l^{\bar{r}}$.

Рассмотрим случай $j = l$. Разложение ω_l из (30) будем искать в виде

$$\omega_l = \omega_{l+1} + \sum_{q=1}^{m} c_q^{s_q-r_q+R-l} du_q^{(s_q-r_q+R-l)}, \quad (31)$$

где $\omega_{l+1} \in \mathcal{H}_{l+1}^{\bar{r}}$. Продифференцируем (31) в силу (1) и определим

$$\dot{\omega}_l = \dot{\omega}_{l+1} + \sum_{q=1}^{m} \left(\dot{c}_q^{s_q-r_q+R-l} du_q^{(s_q-r_q+R-l)} + c_q^{s_q-r_q+R-l} du_q^{(s_q-r_q+R-l+1)} \right). \quad (32)$$

Имеем

$$\dot{\omega}_{l+1} + \sum_{q=1}^{m} \dot{c}_q^{s_q-r_q+R-l} du_q^{(s_q-r_q+R-l)} \in \mathcal{H}_l^{\bar{r}},$$

$$\sum_{q=1}^{m} c_q^{s_q-r_q+R-l} du_q^{(s_q-r_q+R-l+1)} \notin \mathcal{H}_l^{\bar{r}}.$$

Поскольку $\dot{\omega}_l \in \mathcal{H}_{l-1}^{\bar{r}}$, запишем разложение $\dot{\omega}_l$ согласно предположению индукции (30)

$$\dot{\omega}_l = \tilde{\omega}_l + \sum_{q=1}^{m} \tilde{c}_q^{s_q-r_q+R-l+1} du_q^{(s_q-r_q+R-l+1)}, \quad (33)$$

где $\tilde{\omega}_l \in \mathcal{H}_l^{\bar{r}}$.

Учитывая слагаемые при $du_q^{(s_q-r_q+R-l+1)}$ для $q = \overline{1,m}$ в (32) и (33), получаем

$$c_q^{s_q-r_q+R-l} = \tilde{c}_q^{s_q-r_q+R-l+1} = c_q^{s_q-r_q+R-l+1}(\dot{\omega}_l) =$$

$$= c_q^{s_q-r_q+R-l+1}\left(\frac{d}{dt}\left(\omega_1 - \sum_{q=1}^{m}\sum_{k_q=s_q-r_q+R-l+1}^{s_q-r_q+R-1} c_q^{k_q} du_q^{(k_q)}\right)\right). \quad (34)$$

Разложение (31) единственно, так как $du_q^{(s_q-r_q+R-l)} \notin \mathcal{H}_{l+1}^{\bar{r}}$. ►

Теорема 3. *Реализация вида* (6), (3) *локально существует для уравнений* (1) *отображения вход-выход тогда и только тогда, когда модуль* $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$ *имеет базис из точных* 1-*форм.*

◄ **Необходимость.** Рассмотрим модуль

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dx, du_1, \ldots, du_1^{(s_1-r_1+R-1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s_m-r_m+R-1)}\}$$

и докажем, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{\bar{r}}$. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ могут зависеть только от переменных

$$y_1, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \ldots, u_1^{(s_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(s_m-1)}, \quad (35)$$

следовательно, их дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ принадлежат модулю $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$. Кроме того, по определению модулю $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$ принадлежат дифференциалы dt, $du_q^{(k_q)}$, $q = \overline{1,m}$, $k_q = \overline{0, s_q - r_q + R - 1}$. Поэтому $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1^{\bar{r}}$. Докажем включение $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1^{\bar{r}}$. Рассмотрим переменные $y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \ldots, y_p^{(k_p-1)}$. Поскольку реализация вида (6), (3) существует, эти переменные представляют собой функции переменных t, x_j, $u_q^{(k)}$, $j = \overline{1,n}$, $q = \overline{1,m}$, $k = \overline{0,k_0}$, где k_0 — максимальный порядок производной функции u, от которой зависят указанные переменные. Пусть $y_i^{(l)}$ зависит от $u_q^{(k_0)}$. Тогда, во-первых, $l = k_i - 1$, иначе $y_i^{(l+1)}$ зависит от $u_q^{(k_0+1)}$. Во-вторых, $k_0 \leq s_q - 1$, иначе при подстановке указанных выражений в i-е уравнение (1) тождество не получается. Это связано с тем, что левая часть ($y_i^{(k_i)}$) зависит от производных функции u более высокого порядка, чем правая часть этого уравнения. Таким образом, дифференциал любой переменной набора (35) принадлежит $\mathcal{H}$, отсюда $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1^{\bar{r}}$.

Системы (1) и (6) эквивалентны, поэтому производная в силу системы (1) совпадает с производной в силу системы (6). С учетом этого и равенства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{\bar{r}}$ запишем

$$\mathcal{H}_2^{\bar{r}} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dx, du_1, \ldots, du_1^{(s_1-r_1+R-2)}, du_2, \ldots, du_m^{(s_m-r_m+R-2)}\};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{H}_R^{\bar{r}} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dx, du_1, \ldots, du_1^{(s_1-r_1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s_m-r_m)}\};$$

$$\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dx, du_1, \ldots, du_1^{(s_1-r_1-1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s_m-r_m-1)}\}.$$

В последнем выражении du_q и их производные входят в систему при $s_q - r_q > 0$. Следовательно, модули $\mathcal{H}_j^{\bar{r}}$, $j \leq R+1$, имеют базисы из точных 1-форм.

Достаточность. Пусть $\{d\xi_1, \ldots, d\xi_{\tilde{n}}\}$ — базис модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$. Найдем размерность модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$.

Согласно (21), размерность модуля $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$ равна

$$\sum_{i=1}^{p} k_i + \sum_{i=1}^{m} (s_i - r_i) + mR + 1.$$

Из леммы (1) следует, что размерность модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$ меньше размерности модуля $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$ на mR. Тогда размерность модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$ составляет

$$\tilde{n} = \sum_{i=1}^{p} k_i + \sum_{i=1}^{m} (s_i - r_i) + 1.$$

Следует отметить, что точные 1-формы dt и $du_q^{(j)}$, $q = \overline{1,m}$, $j = \overline{0, s_q - r_q - 1}$, $s_q - r_q > 0$, принадлежат модулю $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$. Их число равно $\sum\limits_{i=1}^{m} (s_i - r_i) + 1$. Указанный набор дополним такими 1-формами $d\xi_j$, число которых составляет $n = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i$, чтобы получилась линейно независимая система. Исходя из соображений размерности полученная система будет базисом модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$. Обозначив выбранные величины ξ_j через $x_1, \ldots, x_n$, находим базис модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$:

$$dt, dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du_1^{(s_1 - r_1 - 1)}, du_2, \ldots, du_m^{(s_m - r_m - 1)}, \tag{36}$$

где 1-форма du_j и ее производные входят в систему при $s_j - r_j > 0$. Поскольку $d\dot{x}_i \in \mathcal{H}_R^{\bar{r}}$, $i = \overline{1,n}$, а лемма (1), в частности, утверждает, что $\mathcal{H}_R^{\bar{r}} = \mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}} \oplus \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{du_1^{(s_1 - r_1)}, \ldots, du_m^{(s_m - r_m)}\}$, то

$$d\dot{x}_i = a_0\, dt + \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j_q=0}^{s_q - r_q} b_q\, du_q^{(j_q)}.$$

Поэтому $\dot{x}_i$, $i = \overline{1,n}$, являются функциями переменных $t, x_1, \ldots$ $\ldots x_n, u_1, \ldots, u_m^{(s_m - r_m)}$. Следовательно, в переменных x_i, $i = \overline{1,n}$, получена реализация вида (6), (3). ►

4. Алгоритмы. На основе теорем 2 и 3 можно предложить следующие алгоритмы построения реализации вида (6), (3).

Алгоритм 1

1. Выбор набора чисел r_i, $i = \overline{1,m}$, и нахождение $R = \max\limits_{i=\overline{1,m}} r_i$.
2. Выполнение замены переменных (8), (9) и получение системы вида (13), (11).

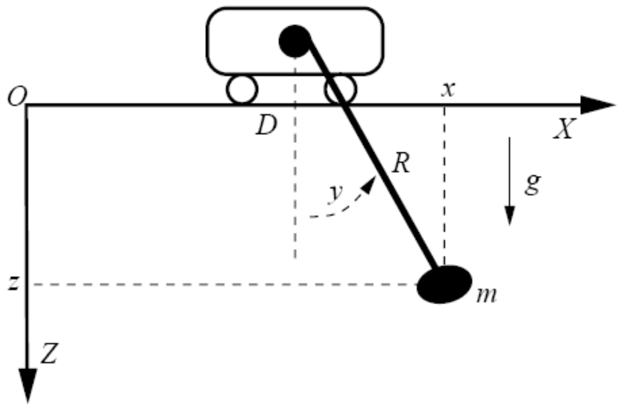
3. Определение базиса модуля $\mathcal{H}_{R+1}$ согласно теореме 3, приведенной в работе [8], для системы (13), (11).
4. Проверка интегрируемости модуля $\mathcal{H}_{R+1}$ и условия существования реализации по теореме Фробениуса.
5. Нахождение базиса из точных 1-форм и соответствующего ему набора первых интегралов для модуля $\mathcal{H}_{R+1}$.
6. Дополнение набора t, $z_i^{(j)}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{0, s_i - r_i - 1}$, $s_i - r_i > 0$, первыми интегралами, полученными на шаге 5, до максимальной по составу функционально независимой системы, замена переменных $z_i^{(j)}$ переменными $u_i^{(j)}$, а также переменных v_i переменными $u_i^{(s_i - r_i)}$ согласно (8), (9); формирование векторной функции (4).
7. Обращение замены
$$(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s_1)}) \longrightarrow (t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s_1)}), \qquad (37)$$
которая определяется по векторной функции (4); получение выражения (3).
8. Дифференцирование замены переменных (4) в силу системы (1) и исключение из полученных выражений выходов y с помощью соотношений (3), в результате чего имеет место реализация (6).

Алгоритм 2

1. Выбор набора чисел r_i, $i = \overline{1,m}$, нахождение $R = \max\limits_{i=\overline{1,m}} r_i$.
2. Построение модуля $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$ согласно (21).
3. Определение базиса модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$ на основе леммы (1).
4. Проверка интегрируемости модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$ и условия существования реализации по теореме Фробениуса.
5. Нахождение базиса из точных 1-форм и соответствующего ему набора первых интегралов для модуля $\mathcal{H}_{R+1}^{\bar{r}}$.
6. Дополнение набора переменных t первыми интегралами, полученными на шаге 5, до максимальной по составу функционально независимой системы; формирование векторной функции (4).
7. Повтор шагов 7, 8 алгоритма 1.

Примеры. Рассмотрим упрощенную модель подъемного крана (рисунок):
$$\ddot{y} = -\frac{g \sin y}{R} - \frac{2\dot{y}}{R}\dot{R} - \frac{\cos y}{R}\ddot{D}, \qquad (38)$$
где y — угол между канатом и вертикальной осью; R — длина каната; D — положение тележки. Величины R и D являются переменными управления J_1 $(u_1, u_2$, см. (1)). В соответствии с принятыми обозначениями $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ для системы (38).

С помощью алгоритма 1 найдем реализацию, не содержащую производной $\dot{R}$, а с помощью алгоритма 2 — реализацию, не содержащую производной $\ddot{D}$.



Модель подъемного крана

Исключение производной $\dot{R}$ проведем с помощью алгоритма 1.

1. В рассматриваемом случае $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $\max_i r_i = 1$.

2. Введем новые переменные согласно (8), (9):

$$v_1 = R; \quad v_2 = \ddot{D}; \quad z_2 = D.$$

Переменная z_1 не вводится, так как $s_1 - r_1 = 0$. Запишем следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{g \sin y}{v_1} - \frac{2\dot{y}}{v_1}\dot{v}_1 - \frac{\cos y}{v_1} v_2; \\ \ddot{z}_2 &= v_2. \end{aligned}$$

3. Модуль $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dy, d\dot{y}, dz_2, d\dot{z}_2, dv_1, dv_2\}$, тогда базис модуля $\mathcal{H}_2$ запишем как:

$$dy, \quad d\dot{y} + \frac{2\dot{y}}{v_1} dv_1, \quad dz_2, \quad d\dot{z}_2.$$

4. Согласно теореме Фробениуса, кораспределение $\mathcal{H}_2$ интегрируемо, поскольку $d(d\dot{y} + \dfrac{2\dot{y}}{v_1} dv_1) = \dfrac{2}{v_1} dv_1 \wedge \left(d\dot{y} + \dfrac{2\dot{y}}{v_1} dv_1\right)$.

5. Базис модуля $\mathcal{H}_2$ из точных 1-форм имеет вид

$$dy, \quad d((v_1)^2 \dot{y}), \quad dz_2, \quad d\dot{z}_2.$$

6. Формируем векторную функцию (4) и получим замену переменных

$$x_1 = y; \quad x_2 = R^2 \dot{y}.$$

7. Обратим замену, полученную в п. 6, и запишем выражение (3) в виде $y = x_1$.

8. Дифференцируем замену переменных, полученную в п. 6, в силу

системы (38) и находим реализацию

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2}{R^2};\\ \dot{x}_2 &= -gR\sin x_1 - R\ddot{D}\cos x_1;\\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Эта реализация не содержит производной $\dot{R}$.

Исключение производной $\ddot{D}$ выполним с помощью алгоритма 2.

1. В рассматриваемом случае $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $\max_i r_i = 1$.

2. Формируем модуль $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$:

$$\mathcal{H}_1^{\bar{r}} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt,\, dy,\, d\dot{y},\, dR,\, d\dot{R},\, dD,\, d\dot{D}\}.$$

3. Находим разложения согласно (25) для элементов базиса модуля $\mathcal{H}_1^{\bar{r}}$ и получим базис модуля $\mathcal{H}_2^{\bar{r}}$:

$$dy, \quad d\dot{y} + \frac{\cos y}{R}d\dot{D}, \quad dR, \quad dD.$$

4. Нетрудно убедиться, что по теореме Фробениуса модуль $\mathcal{H}_2^{\bar{r}}$ интегрируем.

5. Базис модуля $\mathcal{H}_2^{\bar{r}}$ из точных 1-форм имеет вид

$$dy, \quad d(R\dot{y} + \dot{D}\cos y), \quad dR, \quad d\dot{D}.$$

6. Формируем векторную функцию (4) и запишем следующую замену переменных:

$$x_1 = y; \quad x_2 = R\dot{y} + \dot{D}\cos y.$$

7. Обратим замену, полученную в п. 6, и запишем выражение (3) в виде $y = x_1$.

8. Дифференцируем замену переменных, определенную в п. 6, в силу системы (38) и находим реализацию

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2}{R^2} - \dot{D}\cos x_1;\\ \dot{x}_2 &= -g\sin x_1 - (\dot{R} + \dot{D}\sin x_1)\left(\frac{x_2}{R} - \dot{D}\cos x_1\right);\\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Такая реализация не содержит производной $\ddot{D}$, но включает в себя производную $\dot{D}$.

З а м е ч а н и е . Применив алгоритм 1 или 2, можно показать, что не существует реализации, не содержащей две производные управления одновременно, например, $\dot{R}$ и $\dot{D}$ или $\ddot{D}$ и $\dot{D}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.B37.21.0370), гранта НШ-3659.2012.1 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ и РФФИ (гранты 11-01-00733, 12-07-00267, 13-07-00736).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fliess M.* Realizations of nonlinear systems and abstract transitive Lie algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 2. P. 444–446.
2. *Jakubczyk B.* Local realizations of nonlinear causal operators // SIAM J. Control and Optim. 1986. Vol. 24. P. 231–242.
3. *Conte G.*, *Moog C.H.*, *Perdon A.M.* Algebraic methods for nonlinear control systems. London: Springer Verlag, 2007. 194 p.
4. *Крищенко А.П.*, *Четвериков В.Н.* Преобразования описаний нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 706–715.
5. *Крищенко А.П.*, *Четвериков В.Н.* Минимальные реализации нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1612–1622.
6. *Delaleau E.*, *Respondek W.* Lowering the orders of derivatives of controls in generalized state space systems // J. of Mathematical Systems, Estimation and Control. 1995. Vol. 5. No 3. P. 1–27.
7. *Евсеев А.В.*, *Четвериков В.Н.* Использование компьютерной алгебры в задаче реализации динамических систем // Научный вестник МГТУ ГА. 2011. № 165. С. 19–25.
8. *Евсеев А.В.* Модификация алгоритма построения реализации отображения вход-выход // Электронное научно-техническое издание “Наука и образование”. 2011. № 11. URL: http://technomag.edu.ru/doc/245858.htm.
9. *Fliess M.*, *Lévine J.*, *Martin Ph.*, *Rouchon P.* Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples // Int. J. of Control. 1995. Vol. 61. No 6. P. 1327–1361.
10. *Fliess M.*, *Lévine J.*, *Rouchon P.* Generalized state variable representation for a simplified crane description // Int. J. of Control. 1993. Vol. 58. P. 277–283.

REFERENCES

[1] Fliess M. Realizations of nonlinear systems and abstract transitive Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 2, pp. 444–446.

[2] Jakubczyk B. Local realizations of nonlinear causal operators. *SIAM J. Control and Optim.*, 1986, vol. 24, pp. 231–242.

[3] Conte G., Moog C.H., Perdon A.M. Algebraic methods for nonlinear control systems. London, Springer-Verlag, 2007. 194 p.

[4] Krishchenko A.P., Chetverikov V.N. Transformations of descriptions of nonlinear systems. *Differ. Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 721–730. doi: 10.1134/S0012266109050115

[5] Krishchenko A.P., Chetverikov V.N. Minimal realizations of nonlinear systems. *Differ. Equations*, 2010, vol. 46, no. 11, pp. 1612–1623. doi: 10.1134/S001226611011008X

[6] Delaleau E., Respondek W. Lowering the orders of derivatives of controls in generalized state space systems. *J. Math. Syst. Estim. Control*, 1995, vol. 5, no. 3, pp. 1–27. Available at: http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JMSEC/v5n3/ (assessed 07.08.2013).

[7] Evseev A.V., Chetverikov V.N. Using computer algebra in the problem of realization of input-output maps. *Nauch. Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. Grazhdanskoi Aviats*. [Herald of the Moscow State Tech. Univ. Civ. Aviat.], 2011, no. 165, pp. 19–25 (in Russ.).

[8] Evseev A.V. Modification of input-output implementation algorithm. *Nauka Obraz. MGTU im. N.E. Baumana. Elektron. Zh.* [Sci. Educ. Bauman Moscow State Tech. Univ. Electron. J.], 2011, no. 11 (in Russ.). Available at: http://technomag.edu.ru/en/doc/245858.html (assessed 07.08.2013).

[9] Fliess M., Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 1995, vol. 61, no. 6, pp. 1327–1361.
[10] Fliess M., Levine J., Rouchon P. Generalized state variable representation for a simplified crane description. *Int. J. Control*, 1993, vol. 58, no. 2, pp. 277–283.

Статья поступила в редакцию 25.03.2013

Артем Владимирович Евсеев — аспирант кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор четырех научных работ в области преобразования описаний динамических систем, реализации нелинейных динамических систем, геометрической теория управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.V. Evseev — post-graduate of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of four publications in the field of transformation of descriptions of dynamical systems, realization of nonlinear dynamical systems, geometric theory of control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.