УДК 532.5.01

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

**Н.А. Парфентьева**, **С.В. Труханов**, **В.Л. Кашинцева**

Московский государственный строительный университет,
Институт фундаментального образования, Москва, Российская Федерация
e-mail: nparfentyeva@gmail.com; svtrou@mail.ru; fizika@mgsu.ru

*Предложено приближенное решение задачи конвективной диффузии, позволяющее провести расчеты по простой формуле. Это дало возможность определить значения концентрации вредных примесей воздуха, а также скорость его очистки. Решение подобных задач является необходимым в связи с непрерывно возникающими экологическими проблемами и загрязнением воздушного бассейна. Рассматриваемый метод решения основан на составлении уравнений материального баланса, перспективен для подобных задач при другой геометрии пограничных слоев. Приближенное решение имеет вид полинома третьей степени, что позволяет легко анализировать физические зависимости. Решение также может быть использовано при анализе правильности численных решений задач конвективной диффузии.*

***Ключевые слова***: диффузия, конвекция, пограничный слой, приближенный метод.

# INTEGRAL METHOD FOR SOLVING THE CONVECTIVE DIFFUSION PROBLEM

**N.A. Parfentyeva**, **S.V. Truhanov**, **V.L. Kashintseva**

Moscow State Civil Engineering University, Moscow, Russian Federation
e-mail: nparfentyeva@gmail.com; svtrou@mail.ru; fizika@mgsu.ru

*The approximation for solving the convective diffusion problem is proposed, which allows the calculations to be conducted using a simple formula that provides the possibility of determining concentrations of air contaminants and a rate of air purification. Solving such problems is necessary in view of the constantly emerging environmental issues and air pollution. The proposed approach is based on derivation of the equations of material balance and is a promising method for solving similar problems in case of different geometry of boundary layers. The approximate solution has a form of the third-degree polynomial, which makes it possible to easily study physical dependences. The solution can also be used for analyzing the correctness of numerical solutions to convective diffusion problems.*

***Keywords***: diffusion, convection, boundary layer, approximation method.

**Введение.** В настоящее время проблема очистки воздуха от аэрозольных примесей является весьма актуальной вследствие непрерывного загрязнения воздушной среды [1]. В связи с этим важно уметь оценить время, в течение которого произойдет снижение концентрации вредных примесей до значений, допустимых санитарными нормами.

Распространение аэрозольных примесей в среде происходит вследствие двух процессов. Одним из процессов является молекулярная диффузия, т.е. движение частиц в направлении, противоположном градиенту концентрации, другим — перенос частиц вследствие движения воздуха с частицами. Как правило, эти процессы происходят одновременно. В изотермическом случае общее уравнение конвективной диффузии имеет вид [2]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n - \left(\vec{v}\,\vec{\nabla}\right) n + q, \tag{1}$$

где $n$ — концентрация аэрозольных частиц; $D$ — коэффициент молекулярной диффузии; $v$ — скорость потока жидкости (воздуха); $q$ — объемный источник частиц, образующихся в результате газофазной реакции.

Уравнение (1) описывает распределение частиц в пространстве, перемещающихся в результате движения потока жидкости, а также путем молекулярной диффузии по закону Фика [3].

Отметим, что скорость движения жидкости изменяется: уменьшается по мере приближения к поверхности твердого тела и непосредственно на поверхности тела становится равной нулю.

В общем виде аналитическое решение уравнения (1) представляет значительные трудности. Возможно численное решение этого уравнения, однако можно получить приближенное решение, позволяющее качественно проанализировать происходящие процессы и оценить значения концентрации [4–8].

Приближенное решение хотя бы для частного случая полезно для оценки правильности численного решения, уточнения программ расчета и пр.

Запишем уравнение (1) в декартовых координатах:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}\right) - v_x\frac{\partial n}{\partial x} - v_y\frac{\partial n}{\partial y} - v_z\frac{\partial n}{\partial z} + Q. \tag{2}$$

Примем $c = n/n_0$, $u_x = v_x/v_0$, $X = x/L$, $\bar{Q} = Q/Q_0$, $T = t/\tau_0$, где $n_0$, $v_0$, $L$, $Q_0$, $\tau_0$ — начальная концентрация частиц, скорость невозмущенного потока, размер обтекаемой поверхности, число частиц, образующихся в единице объема в начальный момент времени, время обтекания потоком поверхности. Тогда уравнение (2) сводится к уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial T} n_0 \frac{1}{\tau_0} = D\frac{n_0}{L^2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial Z^2}\right) - \\ - n_0\frac{v_0}{L}\left(u_x\frac{\partial c}{\partial X} - u_y\frac{\partial c}{\partial Y} - u_z\frac{\partial c}{\partial Z}\right) + Q_0\bar{Q}.$$

После преобразований

$$\frac{\partial c}{\partial T}\frac{1}{\mathrm{Ho}}+u_x\frac{\partial c}{\partial X}-u_y\frac{\partial c}{\partial Y}-u_z\frac{\partial c}{\partial Z}=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial Z^2}\right)+\frac{Q_0\bar{Q}L}{n_0 v_0}=0, \quad (3)$$

где Ho — критерий гомохронности; Pe — число Пекле, $\mathrm{Pe}=(v_0L/D)$.

С помощью уравнения (3) можно оценить, какой из процессов играет основную роль в формировании поля концентраций, что позволит упростить это уравнение.

Если число Пекле мало, то главным является процесс молекулярной диффузии и конвективной диффузией можно пренебречь, тогда решение задачи сводится к решению уравнения теплопроводности. Если число Пекле велико, то можно пренебречь процессом молекулярной диффузии, а главным — будет конвективная диффузия [9]. По виду последнего слагаемого в (3) можно оценить влияние источника частиц.

**Задача стационарного обтекания плоскопараллельным потоком жидкости, наполненной аэрозольными частицами, плоской пластины со скоростью, направленной вдоль оси $OX$.** Решим такую задачу приближенно интегральным методом Кармана [10]. В этом случае система уравнений для пограничного слоя и концентрации имеет вид

$$\begin{aligned}
&u_x\frac{\partial u_x}{\partial X}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_x}{\partial Y^2};\\
&\frac{\partial u_x}{\partial X}+\frac{\partial u_y}{\partial Y}=0;\\
&u_x\frac{\partial c}{\partial X}+u_y\frac{\partial c}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}.
\end{aligned} \quad (4)$$

Сначала используем решение интегрального уравнения для ламинарного пограничного слоя, который образуется у начала пластины. Толщина этого слоя постепенно увеличивается вдоль оси $OX$.

Сравнивая первое и третье уравнения системы (4), можно сделать следующий вывод: в частном случае равенства чисел Рейнольдса и Пекле распределения скорости и концентрации в пограничном слое будут одинаковыми, для этого достаточно, чтобы кинематический коэффициент вязкости был равен коэффициенту диффузии.

Кинематический коэффициент вязкости воздуха при температуре 20 °C составляет около $10^{-5}$ м$^2$/с, коэффициент диффузии при той же температуре для частиц диаметром 1 мкм — приблизительно

$10^{-10}$ м$^2$/с [11]. В связи с этим, выполнив простой расчет, можно установить, что толщины пограничных слоев будут разными. Отметим, что значения коэффициентов переноса определяют с точностью, не превышающей 10 % [3].

Интегральное уравнение Кармана для пограничного слоя, полученное на основе законов динамики [8], имеет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^h (v_\infty - v_x)\, v_x dy = \tau_x,$$

где $\tau_x$ — касательное напряжение.

Приближенное решение этого уравнения будем искать с учетом граничных условий

$$v_x = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \ \text{ при } \ y = 0;$$

$$v_x = v_\infty, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \ \text{ при } \ y = \delta,$$

где $\delta$ — толщина пограничного слоя.

Представим приближенное решение в виде полинома третьей степени

$$v_x = v_0 \left( \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right). \tag{5}$$

Для толщины пограничного слоя $\delta$ имеем $\delta\,(E) = 4{,}64/\sqrt{(v_\infty x)/\nu}$.

Получим аналогичное интегральное уравнение для диффузионного пограничного слоя. Для этого в потоке жидкости выделим некоторый элемент, высота которого больше толщины диффузионного пограничного слоя (рисунок). Составим уравнение материального баланса.

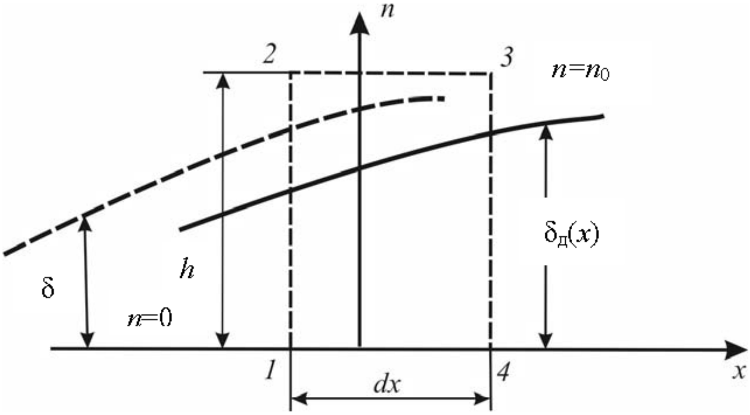


**Схема для определения толщины диффузионного слоя**

Количество вещества, переносимое потоком жидкости через грань *1–2*,

$$n_0 \int\limits_0^h n v_x dy.$$

Изменение массы аэрозольных частиц на расстоянии $dx$ составляет

$$n_0 \frac{d}{dx}\left(\int_0^h n v_x dy\right) dx.$$

Если через грань *3–4* переносится большее число частиц, чем через грань *1–2*, то через грань *2–3* должна быть перенесена масса, равная разности потоков частиц, переносимых через грани *1–2* и *3–4*,

$$n_0 \frac{d}{dx}\left(\int_0^h v_x dy\right) dx.$$

Число частиц, осевших на пластине, составляет $D \left.\dfrac{dn}{dy}\right|_{y=0} dx = q.$

Уравнение материального баланса для выделенного элемента имеет вид

$$-\frac{d}{dx}\int_0^h n v_x dy + n_0 \frac{d}{dx}\int_0^h v_x dy + D\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

После преобразований запишем

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_{\text{д}}} (n_0 - n)\, v_x dy = -D\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{6}$$

где $\delta_{\text{д}}$ — толщина диффузионного слоя.

Получено интегральное уравнение для концентрации частиц в пограничном слое на основе уравнения материального баланса. При этом было сделано предположение об отсутствии дополнительных источников аэрозольных частиц.

Для решения уравнения (6) зададим граничные условия

$$n = 0 \ \text{ при } \ y = 0;$$

$$n = n_0, \quad \frac{\partial n}{\partial y} = 0 \ \text{ при } \ y \to \infty.$$

Для рассматриваемого случая, исходя из уравнения (2), можно записать

$$v_x \frac{\partial n}{\partial x} + v_y \frac{\partial n}{\partial y} = D \frac{\partial^2 n}{\partial y^2}.$$

Таким образом, имеем еще одно граничное условие для границы воздух–пластина:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = 0 \ \text{ при } \ y = 0.$$

Приближенное решение также представим в виде полинома третьей степени

$$n = A + By + Cy^2 + Ey^3.$$

Подставив на основании этого полинома соответствующие выражения в граничные условия, определим значения неизвестных коэффициентов и окончательное решение примет вид

$$\frac{n}{n_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_\text{д}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_\text{д}}\right)^3. \qquad (7)$$

Подставим (7), а также выражение для определения скорости в левую часть уравнения (6), проинтегрируем и получим

$$\frac{3}{20} n_0 v_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_\text{д}^2}{\delta}\right).$$

При этом на основании сравнения коэффициентов переноса было учтено, что толщина диффузионного пограничного слоя меньше толщины гидродинамического пограничного слоя. Теперь уравнение (6) принимает вид

$$\frac{3}{20} n_0 v_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_\text{д}^2}{\delta}\right) = \frac{3}{2} D \frac{n_0}{\delta_\text{д}}.$$

Введем следующее обозначение отношения толщины диффузионного пограничного слоя к толщине гидродинамического пограничного слоя: $k = \delta_\text{д}/\delta$, тогда

$$k^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2k^2 \delta^2 \frac{dk}{dx} = 10 \frac{D}{v_0}.$$

Выражение для определения толщины $\delta$ известно из решения интегрального уравнения Кармана для пограничного слоя. В результате интегрирования уравнения получим

$$k = \sqrt[3]{\frac{D}{\nu}}.$$

Если ввести безразмерный параметр, аналогичный числу Прандтля, то

$$\frac{\delta_\text{д}}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}'}}.$$

Коэффициент диффузии меньше кинематического коэффициента вязкости, следовательно, толщина диффузионного пограничного слоя меньше толщины гидродинамического пограничного слоя.

Толщина диффузионного пограничного слоя

$$\delta = \frac{\delta}{\sqrt[3]{\mathrm{Pr}'}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{Pr}'}} 4{,}64 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}.$$

Подставив это выражение в (7), получим распределение концентрации аэрозольных частиц вдоль вертикальной оси.

Один из важных для практики вопросов — число частиц, осевших на поверхность твердого тела за определенный промежуток времени, т.е. фактически скорость очистки воздуха от примесей.

Найденные выражения, а также закон Фика позволяют получить число частиц, осевших на поверхность единичной площади в единицу времени, т.е. поток

$$q\left(x\right) = -D\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{y=0} = -D\frac{3n_0}{2\delta_{\text{д}}}.$$

Проинтегрировав данное выражение по длине поверхности, находим полное число частиц, осевших на эту поверхность в единицу времени при конвективной диффузии.

Примем ширину пластины равной 1 м, тогда

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 0{,}65 n_0 D \sqrt{\frac{v_0 L}{\nu}} = 0{,}65 n_0 D \sqrt{\mathrm{Re}}.$$

Получена приближенная формула, позволяющая определить число частиц, осевших на поверхность пластины. Следует отметить, что был рассмотрен ламинарный пограничный слой и в полученную формулу входит число Рейнольдса, позволяющее определить диапазон значений для применения полученного выражения: $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$.

**Заключение.** Рассмотренный метод может быть использован для решения задач при других геометрических параметрах, например в случае цилиндрической поверхности, а также при получении численных решений для более сложных зависимостей параметров переноса, что делает уравнения нелинейными.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Степанова Н.В.*, *Шлычков А.П.* Влияние комплекса метеорологических условий на загрязнение атмосферного воздуха города // Казанский медицинский журнал. 2004. Т. 4. Вып. 5. С. 380.
2. *Шервуд Т.*, *Пигфорд Р.*, *Уилки Ч.* Массопередача. М.: Химия, 1982. 696 с.
3. *Kashirskaya O.*, *Lotkhov V.*, *Dil'man V.* A new method for measurement of diffusion coefficients in gas mixtures // Summaries of the 18th Int. Congress of Chemical and Process Engineering. Prague, 2008. P. 1018–1019.
4. *Бахвалов Н.С.* Оптимизация методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–859.

5. *Шишкин Г.И.* Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим погранслоем // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29. № 7. С. 963–978.
6. *Шишкин Г.И.* Разностная схема на неравномерной сетке для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23. № 7. С. 59–66.
7. *Johnson C.* Streamline diffusion methods for problems in fluid mechanics // Finite Element in Fluids. Chichester, 1986. P. 251–261.
8. *Олейник О.А.*, *Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997. С. 125–146.
9. *Shaidurov V.*, *Tobiska L.* Special integration formulae for a convection-diffusion problem // East-west J. Numer. Math. 1995. Vol. 3. No 4. P. 281–299.
10. *Юдаев Б.Н.* Теплопередача. М.: Высш. шк., 1973. 126 с.
11. *Райст П.* Аэрозоли. Введение в теорию. М.: Мир, 1987. С. 126–133.

## REFERENCES

[1] Stepanova N.V., Shlychkov A.P. Effect of complex of meteorologic conditions on atmospheric pollution of the city. *Kazan. Med. Zh.* [Kasan. Med. J.], 2004, vol. 85, no. 5, pp. 380–383 (in Russ.).

[2] Sherwood T.K., Pigford R.L., Wilke C.R. Mass transfer. McGraw-Hill, 1975. 677 p. (Russ. ed.: Shervud T., Pigford R., Uilki Ch. Massoperedacha. Moscow, Khimiya Publ., 1982. 696 p.).

[3] Kashirskaya O., Lotkhov V., Dil'man V. A new method for measurement of diffusion coefficients in gas mixtures. *Summ. 18th Int. Congr. Chem. Process Eng.* Prague, 2008, pp. 1018–1019.

[4] Bakhvalov N.S. The optimization of methods of solving boundary value problems with a boundary layer. USSR *Comput. Math. & Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 139–166.

[5] Shishkin G.I. Approximation of the solutions of singularly perturbed boundary value problems with a parabolic boundary layer. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1989, vol. 9, no. 4, pp. 1–10.

[6] Shishkin G.I. A difference scheme on a non-uniform mesh for a differential equation with a small parameter in the highest derivative. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1983, vol. 3, no. 3, pp. 59–66.

[7] Johnson C. Streamline diffusion methods for problems in fluid mechanics. (in: Gallagher R.H., Carey G.F., Oden J.T., Zienkiewicz O.C. Finite elements in fluids. Vol. 6. Wiley, Chichester, 1986), pp. 251–261.

[8] Oleynik O.A., Samokhin V.N. Matematicheskie metody v teorii pogranichnogo sloya [Mathematical methods in boundary layer theory]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 512 p.

[9] Shaidurov V., Tobiska L., Special integration formulae for a convection-diffusion problem. *East-West J. Numer. Math.*, 1995, vol. 3, no. 4, pp. 281–299.

[10] Yudaev B.N. Teploperedacha [Heat transfer]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1973. 126 p.

[11] Rayst P. Aerozoli. Vvedenie v teoriyu [Aerosols. Introduction to the theory]. Moscow, Mir Publ, 1987. 280 p.

Статья поступила в редакцию 18.04.2013

Наталия Андреевна Парфентьева — канд. физ.-мат. наук, профессор Института фундаментального образования Московского государственного строительного университета. Автор более 20 научных работ в области тепломассопереноса и решения инженерных задач отопления, вентиляции и очистки воздуха от примесей.
Московский государственный строительный университет, 129337, Российская Федерация, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

N.A. Parfentyeva — Cand. Sci. (Phys.-Math.), professor of the Institute of Fundamental Education of the Moscow State Civil Engineering University. Author of more than 20 publications in the field of heat-mass-exchange and solving engineering problems of heating, ventilation, and air purification from impurities.
Moscow State Civil Engineering University, Yaroslavskoe shosse, 26, Moscow, 129337 Russian Federation.

Степан Викентиевич Труханов — канд. физ.-мат. наук, профессор Института фундаментального образования Московского государственного строительного университета. Автор более 20 научных работ в области тепломассопереноса, мониторинга состояния окружающей среды и молекулярной спектроскопии.
Московский государственный строительный университет (МГСУ), 129337, Российская Федерация, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

S.V. Truhanov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), professor of the Institute of Fundamental Education of the Moscow State Civil Engineering University. Author of more than 20 publications in the field of heat-mass-exchange, monitoring of state of environment, and molecular spectroscopy.
Moscow State Civil Engineering University, Yaroslavskoe shosse, 26, Moscow, 129337 Russian Federation.

Валентина Львовна Кашинцева — канд. физ.-мат. наук, доцент Института фундаментального образования Московского государственного строительного университета. Автор более 20 научных работ в области тепломассопереноса.
Московский государственный строительный университет (МГСУ), 129337, Российская Федерация, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

V.L. Kashintseva — Cand. Sci. (Phys.–Math.), assoc. professor of the Institute of Fundamental Education of the Moscow State Civil Engineering University. Author of more than 20 publications in the field of heat-mass-exchange.
Moscow State Civil Engineering University, Yaroslavskoe shosse, 26, Moscow, 129337 Russian Federation.