УДК 532.59:533.95

Е. Р. Егорова

УРАВНЕНИЯ ХОЛОДНОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрена модель двух жидкостей двухкомпонентной изотропной холодной плазмы в однородном магнитном поле с холодными ионами и электронами с учетом столкновений. Получены уравнения в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси абсцисс, и дисперсионное соотношение для уравнений в безразмерной форме.

E-mail: pm-99-1@mail.ru

Ключевые слова: динамика плазмы, двухжидкостная модель, гидродинамическое приближение.

Для исследования динамики плазмы часто применяют гидродинамические модели, в которых электроны и ионы описываются как две проводящие жидкости (двухжидкостная модель), связанные друг с другом электромагнитными полями и диссипацией.

К первым работам, посвященным изучению плоскопараллельных волновых движений в гидродинамической модели изотропной бесстолкновительной квазинейтральной плазмы в однородном магнитном поле, по-видимому, следует отнести работы Монтгомери [1], Саффмана [2], Келлога [3], Какутани [4], в которых рассматриваются частные решения уравнений переноса в пределе бесстолкновительной холодной плазмы, у которой давление газа мало в сравнении с магнитным давлением. В этих уравнениях сохранена инерция электронов, что приводит к наличию дисперсии. При этом неучет силы трения между ионами и электронами накладывает ограничения — плазма должна быть разреженной. Попытки описать не отдельные решения, а целые классы решений уравнений холодной плазмы были предприняты с использованием стандартного упрощения одномерных уравнений (которые еще сложны для общего исследования) методом многих масштабов. Гарднер и Морикава [5] показали, что указанный вид волн описывается уравнениями Кортевега-де-Вриза (КдВ). Затем Березин и Карпман [6] установили, что аналогично можно сформулировать уравнения для наклонного распространения волн. При помощи разновидности метода многих масштабов Какутани и другие [7], а также Какутани и Оно [8] получили уравнение КдВ и обобщенное уравнение КдВ пятого порядка для длинных магнитозвуковых волн в окрестности состояния покоя. В результате был сделан вывод о том, что классические уединенные волны — солитоны — в холодной бесстолкновительной плазме существуют для всех углов наклона $0 < \theta \leqslant \pi/2$ невозмущенного магнитного поля к направлению распространения волны. Для $\theta < \theta_c$

(θ_c — некоторое критическое значение угла θ) солитоны соответствуют волне разрежения, а при $\pi/2 \geqslant \theta > \theta_c$ — волне сжатия. Исследования полной системы уравнений (см., например, монографию Ильичева [9]) показали, что солитоны для $\theta < \theta_c$ не существуют, в этом диапазоне углов наклона они замещаются обобщенно-уединенными волнами. В работе Ильичева [10], в которой проанализирована полная система уравнений холодной бесстолкновительной плазмы, найдены семейства уединенных волновых пакетов, которые ответвляются от состояния покоя в результате 1:1-резонанса.

Плазма магнитосферы Земли является хорошим примером холодной бесстолкновительной квазинейтральной плазмы (см. например, [10]).

Для изучения процессов в холодной неразреженной плазме необходимо учитывать влияние диссипативных факторов, таких как сила трения между электронами и ионами. В рамках гидродинамической модели двух жидкостей в холодной плазме не учитывается тепловое движение электронов и ионов, а также другие диссипативные факторы, кроме силы трения между ионами и электронами, которая связывает электронную и ионную жидкости.

За время τ_e электроны теряют свое упорядоченную скорость $v_e - v_i$ относительно ионов, следовательно, они теряют (а ионы приобретают) импульс $m_e(v_e - v_i)$ на каждый электрон. Это значит, что на электроны действует сила трения порядка $\dfrac{m_e n_e}{\tau_e}(v_e - v_i)$; равная ей, но противоположно направленная сила, действует на ионы [11].

В настоящей работе из уравнений двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы с учетом столкновений электронов с ионами получены уравнения распространения плоских волн. При этом предполагается, что плазма является нерелятивистской. В полученных уравнениях в частных производных (по времени и направлению распространения фронта волны) дисперсия связана с инерцией электронов, а диссипация — с силой трения между ионами и электронами. Эта система уравнений с учетом всех упомянутых эффектов, насколько известно автору, получена впервые. Кроме того, получено и проанализировано дисперсионное соотношение для плоских волн.

Уравнения для гидромагнитных волн. Движение столкновительной двухкомпонентной изотропной плазмы может быть описано системой самосогласованных уравнений движения частиц совместно с уравнениями Максвелла [12]:

$$\mathrm{rot}\overline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial \bar{t}} = \frac{4\pi e}{c}(\overline{n_i v_i} - \overline{n_e v_e}); \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial \overline{t}} = 0; \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\overline{B} = 0; \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\overline{E} = 4\pi e(\overline{n_i} - \overline{n_e}); \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{n_i}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{div}(\overline{n_i v_i}) = 0; \tag{5}$$

$$m_i \frac{d^{(i)}\overline{v_i}}{d\overline{t}} = e\left(\overline{E} + \frac{1}{c}(\overline{v_i} \times \overline{B})\right) + \frac{m_e}{\tau_e}(\overline{v_e} - \overline{v_i}); \tag{6}$$

$$\frac{\partial \overline{n_e}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{div}(\overline{n_i v_e}) = 0; \tag{7}$$

$$m_e \frac{d^{(e)}\overline{v_e}}{d\overline{t}} = -e\left(\overline{E} + \frac{1}{c}(\overline{v_e} \times \overline{B})\right) - \frac{m_e}{\tau_e}(\overline{v_e} - \overline{v_i}). \tag{8}$$

Уравнения (1)–(4) — это уравнения Максвелла, характеризующие электромагнитное поле, где $\overline{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\overline{B}$ — вектор магнитной индукции. Уравнения (5)–(8) — уравнения переноса простой холодной плазмы; уравнения (5) и (6) — уравнение неразрывности и уравнение движения для ионов, в которых $\overline{n}_i$ — плотность числа частиц ионов, m_i — масса иона; $\overline{v}_i$ — вектор скорости иона, τ_e — время установления равновесного распределения скоростей между электронами. Уравнения (7) и (8) — соответствующие уравнения для электронов, в которых $\overline{n}_e$ — плотность электронов; m_e — масса электрона; $\overline{v}_e$ — вектор скорости электронов.

Для того чтобы выразить систему уравнений (1)–(8) в безразмерной форме, введем характерные величины: L — линейный пространственный масштаб, $V_A = |B_0| \left[4\pi n_0 (m_e + m_i)\right]^{-\frac{1}{2}}$ — альфвеновская скорость, где B_0 — вектор магнитной индукции невозмущенного магнитного поля, n_0 — невозмущенная плотность частиц с размерностью длины, а также скорости частиц, величины магнитного и электрического полей и плотности частиц, соответственно $v_i = \bar{v}_i / V_A$, $v_e = \bar{v}_e / V_A$, $B = \bar{B} / |B_0|$, $E = \bar{E} / |B_0|$, $n_i = \bar{n}_i / n_0$, $n_e = \bar{n}_e / n_0$.

При переходе к безразмерным переменным для операторов дифференцирования вводится параметр ω_0 — характерная частота явления $V_A L^{-1}$, а операторы дифференцирования меняются следующим образом (сохраним те же обозначения для обезразмеренных операторов градиента, дивергенции и ротора):

$$\mathrm{grad} \to L^{-1}\,\mathrm{grad}; \quad \mathrm{div} \to L^{-1}\,\mathrm{div}; \quad \mathrm{rot} \to L^{-1}\,\mathrm{rot}; \quad \frac{\partial}{\partial \overline{t}} = \omega_0 \frac{\partial}{\partial t};$$

$$\frac{d^{(e)}}{d\overline{t}} = \omega_0 \frac{d^{(e)}}{dt} = \omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_e \cdot \,\mathrm{grad}\right);$$

$$\frac{d^{(i)}}{d\bar{t}} = \omega_0 \frac{d^{(i)}}{dt} = \omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \cdot \text{ grad} \right).$$

Предположим, что альфвеновская скорость V_A настолько меньше скорости света c, что величина $\left(R_i^{-1} + R_e^{-1}\right)(V_A/c)^2$ пренебрежимо мала; характерная частота явления ω_0 много меньше лангмюровской частоты $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_e}$.

При выполнении этих двух условий плазму в дальнейшем можно считать квазинейтральной, т.е.

$$n_e \approx n_i = n.$$

После исключения из преобразованных уравнений (1)–(8) величин v_e и E, получим замкнутую систему уравнений для ионной жидкости (в пределе квазинейтральной плазмы) в виде

$$0 = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{ div}(n_i v_i); \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{(i)} v_i}{dt} &= R_e^{-1} \frac{d^{(i)}}{dt} (n_i^{-1} \,\text{rot} B) + R_e^{-1} n_i^{-1} \,\text{rot} B \,\text{grad} v_i - \\ &- \left(R_i^{-1} + R_e^{-1}\right) (n_i^{-1} \,\text{rot} B) \,\text{grad}(n_i^{-1} \,\text{rot} B) + n_i^{-1} \,\text{rot} B \times B; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -R_i^{-1} \,\text{rot} \frac{d^{(i)} v_i}{dt} + \text{ rot}(v_i \times B) - \varepsilon \,\text{rot} n_i^{-1} \,\text{rot} B, \tag{11}$$

где величины R_i и R_e — безразмерные параметры дисперсии; $R_e = \omega_e/\omega_0$ — отношение циклотронной частоты электронов ω_e к характерной частоте (электронное число Рейнольдса); $R_i = \omega_i/\omega_0$ — ионное число Рейнольдса;

$$\varepsilon = \frac{R_i^{-1} + R_e^{-1}}{\omega_e \tau_e}. \tag{12}$$

В итоге из уравнений (9)–(12) для плоских волн, распространяющихся вдоль оси Ox, получим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{gathered} \frac{dn}{dt} = -n \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \frac{du}{dt} = -\frac{n^{-1}}{2} \frac{\partial (By^2 + Bz^2)}{\partial x}; \\ \frac{dv}{dt} = n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right); \\ \frac{d\omega}{dt} = n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right); \qquad (13) \\ \frac{dB_y}{dt} = B_x \frac{\partial v}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\omega}{dt} + \varepsilon n^{-1} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}; \end{gathered}$$

$$\frac{dB_z}{dt} = B_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} + \varepsilon n^{-1} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2},$$

где B_x, B_y, B_z — пространственные компоненты $B = \overline{B}/|B_0|$; u, v, ω — пространственные компоненты $v_i = \overline{v_i}/V_A$.

Дисперсионное соотношение. Рассмотрим решение системы (13) при условии, что ее детерминант обращается в нуль, что приводит к дисперсионному уравнению, связывающему волновое число k с рабочей частотой w, и характеризующему распространение волн в дисперсных средах.

Рассмотрим решение уравнений (13) в виде бегущей плоской гармонической волны

$$\begin{pmatrix} n \\ u \\ \upsilon \\ \omega \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 \\ u_0 \\ \upsilon_0 \\ \omega_0 \\ B_y^0 \\ B_z^0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega\, t)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая, что

$$n = \delta n + 1,\ u = \delta u,\ \upsilon = \delta\upsilon,\ \omega = \delta\omega,\ B_y = \sin\theta + \delta B_y,\ B_z = \delta B_z,$$

получаем решение системы уравнений (13) в виде бегущей плоской волны

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta u \\ \delta\upsilon \\ \delta\omega \\ \delta B_y \\ \delta B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 \\ u_0 \\ \upsilon_0 \\ \omega_0 \\ B_y^0 \\ B_z^0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}.$$

Дисперсионное уравнение позволяет найти функции $\omega(k)$ и $k(\omega)$, которые представляют собой многозначные аналитические функции. Число ветвей этих функций определяется наивысшими степенями k и ω в дисперсионном уравнении.

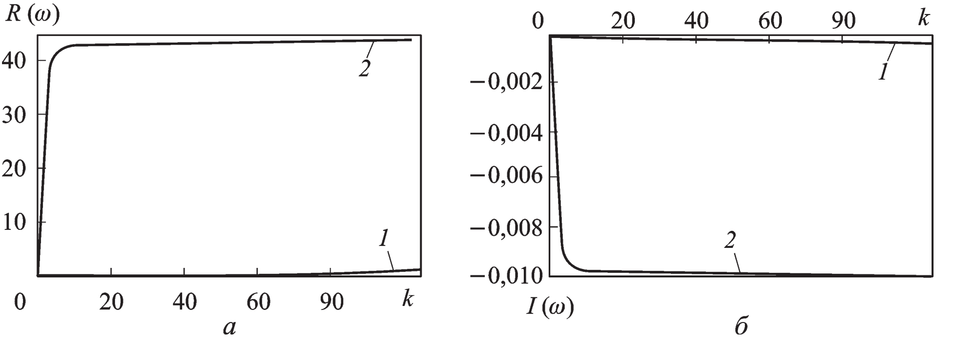
Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^4(R_e^{-1}R_i^{-1}k^2+1)^2 + \omega^3 i(2R_e^{-1}R_i^{-1}\varepsilon k^4 + 2\varepsilon k^2) -$$

$$-\omega^2(R_e^{-2}k^4\cos^2\theta + R_i^{-2}k^4\cos^2\theta + R_e^{-1}R_i^{-1}k^4\sin^2\theta + k^2(\cos^2\theta+1) + \varepsilon^2 k^4) -$$

$$-\omega i\varepsilon k^4(\cos^2\theta+1) + k^4\cos^2\theta = 0. \quad (14)$$

В пределе холодной плазмы дисперсионная кривая имеет две ветви — альфвеновскую и магнитозвуковую. Взаимное расположение этих



Ветви дисперсионного соотношения для действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей решения (14):

1 — альфвеновская ветвь, *2* — магнитозвуковая ветвь

ветвей при $\theta = 0$, $R_e^{-1} = R_i = 0{,}0234352$, $\varepsilon = 0{,}01$ показано на рисунке. Можно представить семейство дисперсионных кривых, варьируя значения углов θ, коэффициентов R_e^{-1}, R_i и ε.

Выводы. Впервые выведены уравнения, описывающие плоские волны в гидродинамическом приближении в столкновительной холодной плазме, т.е. плазме, у которой тепловое давление мало́ в сравнении с магнитным давлением. При этом функция распределения величин, характеризующих процессы в плазме, мало отличается от максвелловской (на величину, пропорциональную малым градиентам). Уравнения переноса не содержит давлений и тензора вязких напряжений [13], а трение между ионами и электронами обусловлено различием скоростей этих частиц. Уравнения выведены в общих предположениях: плазма является нерелятивистской (отношение альфвеновской скорости к скорости света мало́) и характерная частота рассматриваемых явлений много меньше лангмюровской частоты. При этом не отбрасываются члены, учитывающие инерцию электронов, так что результирующие уравнения наряду с диссипацией за счет трения учитывают и дисперсию. Учет силы трения позволяет не накладывать никаких ограничений на электронное “время между столкновениями” (время существенного обмена энергией между электронами). Получено и проанализировано дисперсионное уравнение задачи, исследованы зависимости мнимой и вещественной частоты от угла между невозмущенным магнитным полем и направлением распространения волны, параметров дисперсии и диссипации.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 08-01-00125.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M o n t g o m e r y D. Nonlinear Alfven waves in a cold ionized gas // Phys. Fluids. – 1959. – V. 2. – P. 585–588.
2. S a f f m a n P. G. On hydromagnetic waves of finite amplitude in a cold plasma // J. Fluid Mech. – 1961. – V. 11. – P. 552–556.
3. K e l l o g P. G. Solitary waves in cold collisionless plasma // Phys. Fluids. – 1964. – V. 7. – P. 1555–1571.
4. K a k u t a n i T. Non-linear hydromagnetic waves propagating along the magnetic field in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. – 1966. – V. 21. – P. 385–398.
5. G a r d n e r C. S., M o r i k a w a G. K. // Courant Institute of Mathematical Sciences Report No. NYO 9082, 1960.
6. Б е р е з и н Ю. А., К а р п м а н В. И. Советская физика // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – С. 1880–1896.
7. K a k u t a n i T., O n o H., T a n i u t i T., W e i C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. – 1968. – V. 24. – P. 941–945.
8. K a k u t a n i T., O n o H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. – 1969. – V. 26. – P. 1305–1318.
9. И л ь и ч е в А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. – М.: Физматлит, 2003. – С. 131–166.
10. И л ь и ч е в А. Т. Уединенные волны-пакеты в холодной плазме // Изв. РАН. – МЖГ. – 1996. – № 5. – С. 154–161.
11. К и н г с е п п А. С. Нелинейные волны в электронной магнитной гидродинамике // В сб. Нелинейные волны; Под ред. А.В. Гапонова-Грехова, В.И. Неоркина. – Нижний Новгород. – 2002. – С. 329–342.
12. К а д о м ц е в Б. Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Наука, 1976. – С. 25–35.
13. Б р а г и н с к и й С. И. Явления переноса в плазме // В сб. Вопросы теории плазмы; Под ред. М.А.Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. – С. 183–272.

Статья поступила в редакцию 22.10.2008

Елена Револьевна Егорова родилась в 1982 г. В 2006 г. окончила Институт математики и информатики Якутского государственного университета. Аспирант ЯГУ им. М.К. Аммосова. Автор 10 научных работ в области прикладной математики.

Ye.R. Yegorova (b. 1982) graduated from the Institute of Mathematics and Information Technology of the Yakutsk State University in 2006. Post-graduate of the Yakutsk State University n.a. M.K. Ammosov. Author of 10 publications in the field of applied mathematics.