

УДК 539.3

В. В. Д у б и н и н

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О НАГРУЖЕНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ДВИЖУЩИМСЯ ТЕЛОМ

Рассмотрена упругая контактная задача о движении с постоянной скоростью твердого тела внутри полого цилиндра. Для ряда случаев приведены результаты расчетов давления в зоне контакта тела с поверхностью цилиндра и напряженно-деформированного состояния цилиндра.

E-mail: fn3@bmstu.ru

Ключевые слова: контактная задача, полый цилиндр, движущееся тело.

В работах [1–3] поставлен ряд практических контактных задач, которые встречаются на практике при нагружении толстостенных цилиндров (стволов баллистических установок, обсадных труб при бурении скважин и др.) телами, движущимися с постоянной скоростью v вдоль оси цилиндра z . Нагрузка в общем случае представляет собой внутреннее давление и нагрузку, возникающую от движущегося внутри цилиндра твердого тела.

Окончательная цель решения контактной задачи — определение напряженно-деформированного состояния (НДС) в любой точке цилиндра (трубы). Решение состоит из двух этапов — определения давления движущегося твердого тела на полый цилиндр (трубу) и расчета НДС.

Для полого цилиндра решение задачи об определении давления твердого тела, движущегося внутри цилиндра, сводится к решению интегрального уравнения. Если внутри цилиндра радиусом $r = a$ движется тело со скоростью v , то без учета трения граничные условия имеют вид:

$$\text{при } r = b \quad \sigma_r = \tau = 0;$$

$$\text{при } r = a \text{ (внутри цилиндра)} \quad \tau = 0;$$

$$\sigma_r = 0 \text{ везде, кроме пояса } |z| \leq c.$$

При $|z| \leq c$ твердое тело создает радиальное смещение внутренней поверхности цилиндра u_a . Примем, что профиль тела описывается функцией [3]

$$u_a = u_{a0} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

С помощью интегрального преобразования Фурье решается упругая осесимметричная задача в подвижной системе координат, движущейся вместе с нагрузкой со скоростью v .

На внутренней поверхности цилиндра при $|z| \leq c$ ищем неизвестное давление из интегрального уравнения [2, 3]

$$u = \frac{1}{\pi G} \int_0^{\infty} P_a(\eta) \frac{\Delta_u}{\Delta} d\eta \quad \text{при } r = a.$$

В этом уравнении Δ_u, Δ — определители четвертого порядка от комплексов модифицированных бесселевых функций первого и второго рода нулевого и первого порядков $I_0, I_1, K_0, K_1, \Delta_u = \Delta_u(r)$; r — радиальная координата, G — модуль сдвига материала цилиндра [3]. В граничных условиях обозначено: σ_r, τ — радиальное и касательное напряжения.

Для симметричной нагрузки

$$P_a(\eta) = 2 \int_0^{\infty} p(z) \cos \eta \frac{z}{a} dz,$$

где η — параметр преобразования Фурье, $p(z)$ — неизвестное давление.

Если $p(z)$ заменить ступенчатой нагрузкой, то при $r = a$ необходимо решать интегральное уравнение

$$u_a(z) = \frac{2a}{\pi G} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\sin \frac{\eta}{a} \cdot \frac{c}{n} K - \sin \frac{\eta}{a} \frac{c}{n} (K - 1) \right) \cos \eta \frac{z}{a} \frac{\Delta_{ua}}{\Delta} d\eta.$$

Дальнейшие расчеты сводятся к вычислению величин p_k с помощью системы линейных уравнений

$$u_a(z_i) = \frac{2a}{\pi G} \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k(z_i);$$

$$a_k(z_i) = a_{ik} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\eta}{a} \frac{c}{n} K - \sin \frac{\eta}{a} \frac{c}{n} (K - 1)}{\eta} \cos \eta \frac{z_i}{a} \frac{\Delta_{ua}}{\Delta} d\eta.$$

В уравнениях для однозначного решения задачи необходимо задавать значения $i, K = 1, n - 1$. Значения z_i выбираются из условий разбиения условной кривой давления $p(z)$ в подвижных осях координат.

Задавая конкретные значения z_i , получим зависимость

$$1 - \left(\frac{z_i}{c} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik_0} \bar{p}_k,$$

где

$$\frac{a_k(z_i)}{\pi} = \frac{a_{ik}}{\pi} = a_{ik0}, \quad \bar{p}_k = \frac{2p_k}{G} \frac{a}{u_{a0}}.$$

Проведенные расчеты определения давления в зоне контакта движущегося твердого тела с внутренней поверхностью цилиндра при параболическом профиле тела позволили получить зависимость величины давления от ширины области контакта $2\frac{c}{a}$. На рис. 1 приведены зависимости $\bar{p}_k = f\left(\frac{z}{a}\right)$ при различных значениях $\frac{c}{a}$ и значении параметра скорости движущейся нагрузки $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2^2}} = 0,8$ (c_2 — скорость волны сдвига). Ввиду симметрии задачи на рис. 1 показана только правая половина зависимостей. Кривые строились при фиксированных значениях толщин полого цилиндра (b/a) и скорости движения твердого тела (параметр γ). При сокращении ширины $\frac{c}{a}$ в два раза максимальное давление $\bar{p}_{k0} = \bar{p}_{k=0}$ увеличивается в 1,5 и более раз.

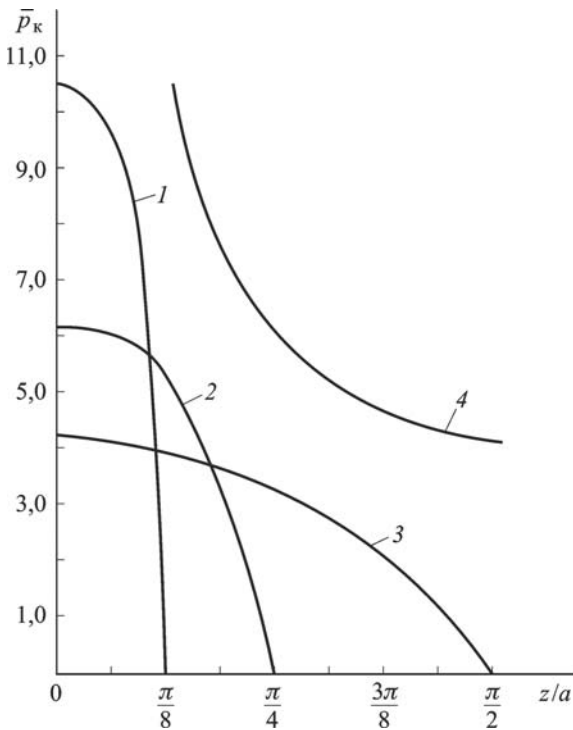


Рис. 1. Графики распределения контактного давления \bar{p}_k (кривые 1, 2, 3) и максимального давления \bar{p}_{k0} (4) по осевой координате цилиндра $\frac{z}{a}$ при различных значениях полуширины зоны контакта c/a ($b/a = 3$; $\gamma = 0,8$):

1, 2, 3 - $\frac{c}{a} = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ соответственно

На рис. 1 кривая 4 построена по значениям \bar{p}_{k0} и $\frac{c}{a}$ для трех кривых этого рисунка. По кривой 4 можно оценивать возрастание \bar{p}_{k0} при различных значениях $\frac{c}{a}$. Конкретные зависимости, построенные в безразмерных параметрах, позволяют проводить модельные расчеты, а также определять оптимальные параметры нагрузок цилиндра движущимся твердым телом.

Для получения зависимостей, позволяющих оценивать оптимальные параметры цилиндра при заданной нагрузке, выберем фиксированное значение $\frac{c}{a} = \frac{\pi}{4}$. Далее это значение используется как базовое для последующих расчетов.

На рис. 2 представлены зависимости значения безразмерного давления \bar{p}_k от осевой координаты цилиндра z/a . При расчетах этих зависимостей изменялись параметры b/a и γ .

Большой практический интерес представляют зависимости, построенные для максимальных значений давления \bar{p}_{k0} , соответствующих ранее приведенным кривым.

На рис. 3 построены зависимости, связывающие параметр скорости движения нагрузки γ и \bar{p}_{k0} при различной относительной толщине b/a , которые позволяют по значению \bar{p}_{k0} определять предельные значения γ и b/a , при которых цилиндр нагружается этим максимальным давлением.

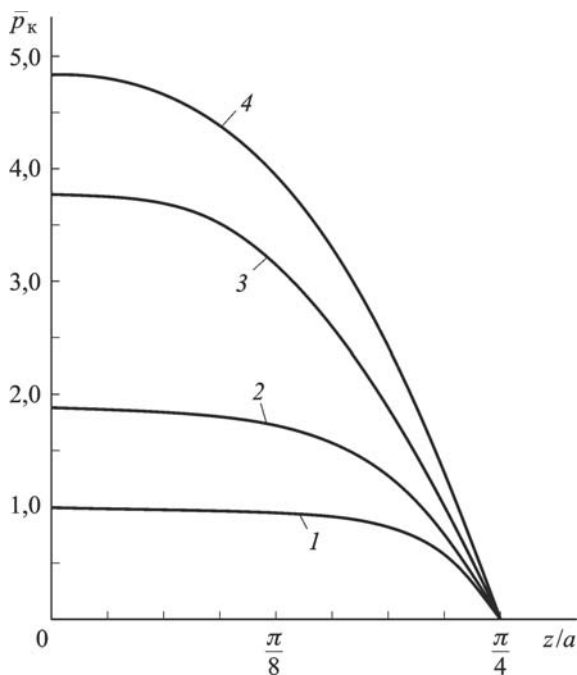


Рис. 2. Графики зависимости контактного давления \bar{p}_k от осевой координаты $\frac{z}{a}$ при различных γ ($b/a = 2$, $c/a = \pi/4$):
 1, 2, 3, 4 соответственно $\gamma = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$

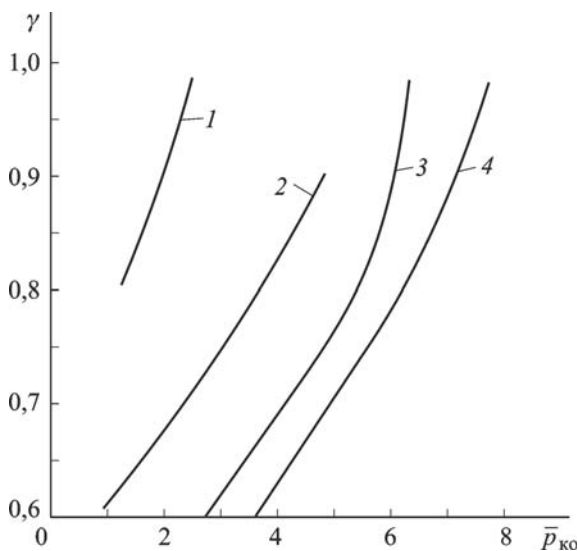


Рис. 3. Графики зависимости максимального давления \bar{p}_{k0} от параметра γ для разных значений отношения b/a ($c/a = \pi/4$):
 1, 2, 3, 4 соответственно $b/a = 1,4; 2; 2,5; 3$

Практическое значение имеют кривые на рис. 4, которые построены для определенных значений максимальных давлений \bar{p}_{k0} . Они могут быть использованы для расчета параметров \bar{p}_{k0} , b/a и γ и определения одного из этих параметров при задании двух других.

Использование кривых на рис. 3 и 4 удобно для быстрой оценки значений максимального давления \bar{p}_{k0} по значениям b/a и γ , а также при проведении предварительных расчетов параметров нагрузки и цилиндра проектируемых реальных установок.

После проведения расчетов кривых давления, создаваемого движущимся телом, общая кривая давления внутри цилиндра строится присоединением полученной нагрузки к создаваемой в цилиндре другими источниками [3]. Имея общую кривую давления, решают первую основную упругую задачу нагружения цилиндра для полученной расчетной нагрузки, а после

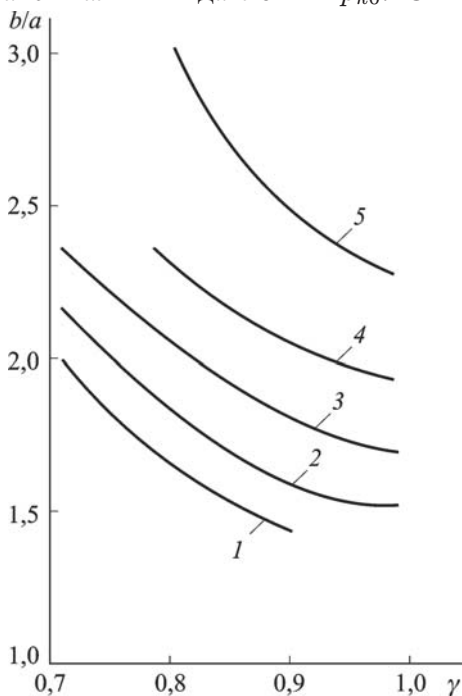


Рис. 4. Зависимости толщины цилиндра (трубы) от параметра скорости γ при постоянных значениях \bar{p}_{k0} для $c/a = \pi/4$:
 1, 2, 3, 4, 5 соответственно $\bar{p}_{k0} = 2, 3, 4, 5$ и 6

получения нагрузки от подвижного тела необходимо решать первую основную задачу определения НДС в любой точке цилиндра от полученного внутреннего давления. При решении этой задачи можно провести аппроксимацию кривой давления некоторой аналитической кривой.

На рис. 5 приведены результаты расчетов величин (в безразмерном виде), характеризующих напряженно-деформированное состояние ци-

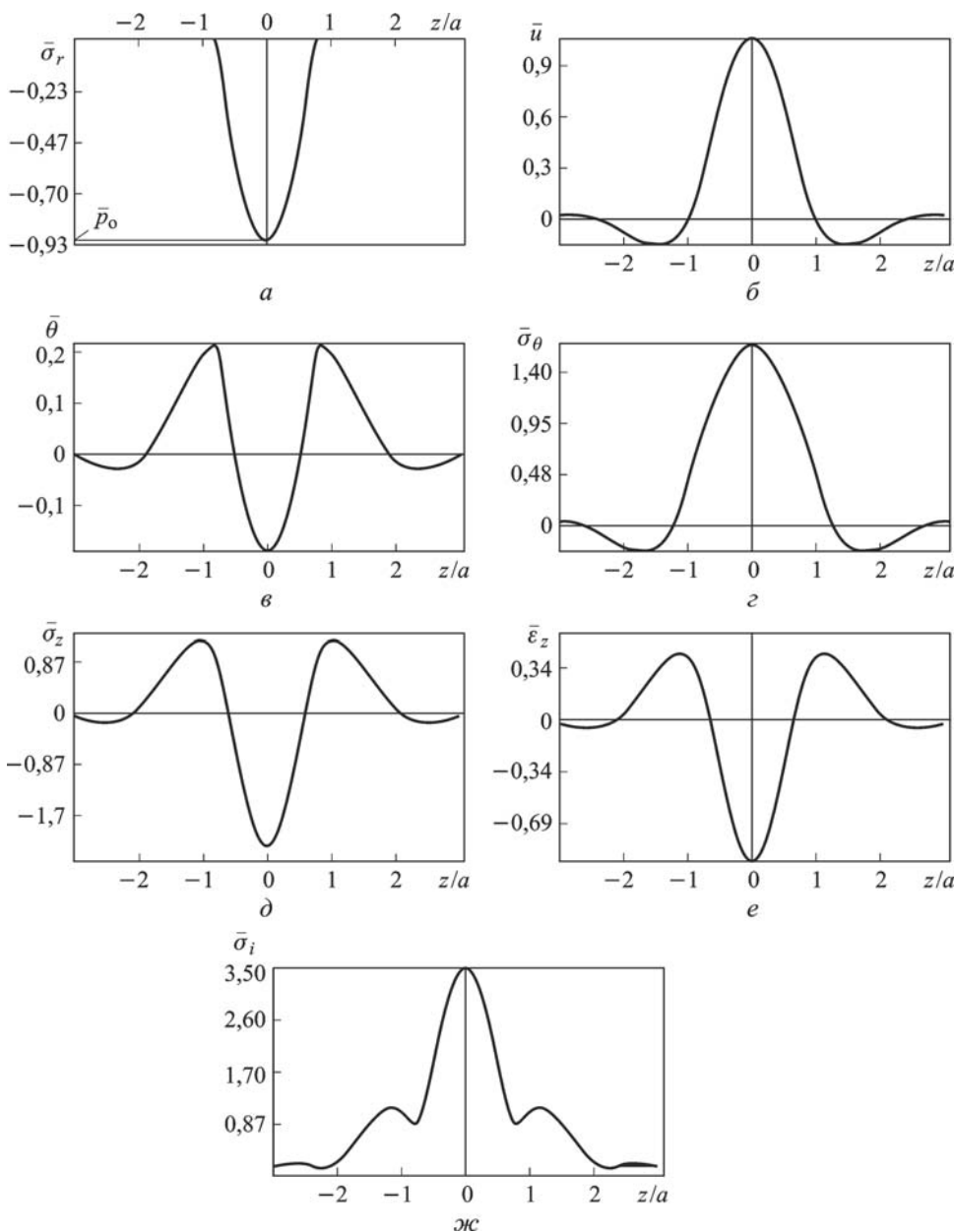


Рис. 5. Расчетные зависимости параметров напряженно-деформированного состояния трубы (контактная задача, материал трубы – сталь; $\gamma = 0,8$; $b/a = 1,6$; $r/a = 1$; $\bar{p} = 0,925$)

линдра, в функции координаты z/a ; кривая давления аппроксимировалась параболой (см. рис. 5, а); $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z$ — радиальное, окружное и осевое напряжения; $\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\varepsilon}_z, \bar{\sigma}_i$ — радиальное перемещение, объемная и осевая деформации, интенсивность напряжений.

Вывод. Получено решение контактной задачи о нагружении полого цилиндра движущимся твердым телом, которое может быть использовано при практических расчетах конструкций, в которых используются толстостенные цилиндры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д у б и н и н В. В. Полый толстостенный цилиндр при жестком закреплении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2005. – № 4. – С. 51–57.
2. Д у б и н и н В. В. Контактная задача для полого толстостенного цилиндра // Образование через науку. 175 лет МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сб. докл. междунар. симп. – С. 506–511. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
3. Д у б и н и н В. В. Некоторые упругие контактные задачи для полого толстостенного цилиндра // Наука и технологии. Т. 1. Труды XXVIII Российской школы (24–26 июля 2008 г. Миасс). Межрегиональный совет по науке и технологиям. – М., 2008. – С. 216–222.

Статья поступила в редакцию 26.10.2009

Владимир Валентинович Дубинин, родился в 1937 г., заведующий кафедрой “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более двухсот научных работ в области динамики сложных механических систем и действия ударных, взрывных нагрузок на конструкцию, упругой прочности цилиндрических конструкций и задач, связанных с ударом тел по оболочке, и задач ньютоновского удара.

V.V. Dubinin (b. 1937) — head of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of dynamics of complex mechanical systems, influence of shock blast loads on a construction, elastic strength of cylindrical constructions and problems associated with strike of bodies on a shell and problems of Newtonian strike.