УДК 519.24

А. Ю. Ш о м а х о в

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СТАТИСТИКИ L_T К ЛИНЕЙНОМУ ФУНКЦИОНАЛУ ОТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ $L(f)$ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

Для вещественнозначного стационарного гауссовского центрированного процесса $X(t)$, $t \in R, R = (-\infty, +\infty)$, имеющего спектральную плотность $f(\lambda)$, рассматривается проблема оценивания скорости сходимости математического ожидания статистики $L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda) d\lambda$, $\lambda \in (-\infty; +\infty)$, где $I_T(\lambda)$ — периодограмма процесса $X(t)$, $t \in R$, к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$ стационарного гауссовского процесса на основе выборки $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

E-mail: ashomahov@yandex.ru

Ключевые слова: стационарный процесс, периодограмма процесса, спектральная плотность, спектральное среднее, асимптотическая несмещенность, классы Никольского, ядро Фейера.

Пусть $X(t)$, $t \in R$, $R = (-\infty, +\infty)$, — стационарный гауссовский центрированный процесс, обладающий спектральной плотностью $f(\lambda)$ с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, т.е.

$$\mathsf{E}X(t) = 0, \quad t \in R. \tag{1}$$

$$\mathsf{E}X(t)X(t') = K(t,t') = \operatorname{cov}(X(t), X(t')) = k(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-t')} f(\lambda) d\lambda, \tag{2}$$

где E — оператор математического ожидания; $t, t' \in R$, а $K(t,t') = k(t-t')$ — ковариационная функция процесса $X(t)$, $t \in R$.

Процесс $X(t)$, $t \in R$, предполагаем вещественнозначным (действительным). Так как рассматривается стационарный процесс с непрерывным временем, областью изменения переменной t является вещественная (действительная) ось $R = (-\infty, +\infty)$. Область изменения Q переменной λ (частоты) также вещественная (действительная) ось $Q = (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим так называемое *спектральное среднее* процесса $X(t)$, $t \in R$, т.е. линейный функционал $L(f)$ вида [4, 6]

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \tag{3}$$

где $\varphi(\lambda)$ — суммируемая функция, называемая *спектрально-усредняющей* функцией. В дальнейшем будем предполагать, что спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)$ вещественная и четная.

Если $\varphi(\lambda)$ индикатор полуинтервала $(-\infty; \mu]$, то

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{\mu} f(\lambda) d\lambda = F(\mu),$$

где $F(\mu)$ — спектральная функция процесса $X(t)$, $t \in R$.

Если $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda(t-t')}$, то

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-t')} f(\lambda) d\lambda = k(t-t'),$$

где $k(t-t')$ — ковариационная функция процесса $X(t)$, $t \in R$.

В качестве оценки $L(f)$ будем рассматривать статистику L_T [5, 7, 8] вида

$$L_T = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) I_T(\lambda) d\lambda, \tag{4}$$

где $I_T(\lambda)$ — *периодограмма* процесса $X(t)$, $t \in R$, которая имеет следующий вид

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int\limits_0^T X(t) e^{-i\lambda t} dt \right|^2 . \tag{5}$$

Оценка L_T функционала $L(f)$ называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{T\to\infty} [\mathsf{E}(L_T) - L(f)] = 0, \tag{6}$$

где E — оператор математического ожидания.

В работе [1] проведена оценка скорости сходимости в (6), когда $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ принадлежат функциональным классам Никольского $\mathsf{H}_p(\gamma)$, которые определяются следующим образом [9]:

$$\mathsf{H}_p(\gamma) = \left\{ \psi(\lambda) \in \mathsf{L}_p,\ \left\| \psi^{(r)}(\lambda + h) - \psi^{(r)}(\lambda) \right\|_p \leqslant C\, |h|^{\alpha} \right\}, \tag{7}$$

где $0 < \alpha < 1$; $r \in N$, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\gamma = r + \alpha$, $p \leq 1$; C — константа, не зависящая от h;

$$\mathsf{L}_p = \mathsf{L}_p(Q) = \left\{ f; \|f\|_p = \left(\int_Q |f(\lambda)|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

— пространства суммируемых функций. Неравенство (7) выполняется при $\lambda \in (-\infty; +\infty)$.

В работе [1] оценена скорость сходимости в (6), когда спектральная плотность $f(\lambda) \in \mathsf{H}_p(\gamma_1)$, $\gamma_1 > 0$, $p \leq 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in \mathsf{H}_q(\gamma_2)$, $\gamma_2 > 0$, $q \geqslant 1$ при $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ для случаев, когда $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 < 1$ и когда $\gamma_1 \geqslant 1$, $\gamma_2 \geqslant 1$. Случаи $\gamma_1 \geqslant 1$, $\gamma_2 < 1$ и $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 \geqslant 1$ не рассматривались автором в работе [1].

Цель настоящей работы — оценить скорость сходимости в (6), при $\gamma_1 \geqslant 1$, $\gamma_2 < 1$ и при $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 \geqslant 1$.

Рассматриваемая проблема является частью общей проблемы непараметрического статистического оценивания $L(f)$ на основе выборки $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ или, по-другому, по наблюденному отрезку траектории $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

З а м е ч а н и е. Далее через C будут обозначены различные положительные постоянные.

Для доказательства представленной ниже теоремы приведем некоторые предварительные результаты.

Функция $F_T(u)$, называемая ядром Фейера, определяется следующим образом:

$$F_T(u) = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{\sin \dfrac{Tu}{2}}{\dfrac{u}{2}} \right)^2, \quad u \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); \quad F_T(0) = \frac{T}{2\pi}. \tag{8}$$

Лемма 1. Определенное по (8) ядро $F_T(u)$ является четным, неотрицательным и обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) du = 1; \tag{9}$$

$$\int_{1}^{+\infty} F_T(u) du \leqslant C T^{-1}; \tag{10}$$

$$\int_0^1 F_T(u)u^\alpha du \leqslant \begin{cases} CT^{-\alpha} \text{ при } \alpha < 1, \\ CT^{-1}\ln T \text{ при } \alpha = 1, \\ CT^{-1} \text{ при } \alpha > 1. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство этих соотношений приведено в [9].

Лемма 2. Справедливо следующее соотношение

$$\mathsf{E}(L_T) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(x-y)f(x)\varphi(y)\,dy\,dx, \tag{12}$$

где $f(x)$ — спектральная плотность; $\varphi(y)$ — спектрально-усредняющая функция; $F_T(x-y)$ — ядро Фейера. Доказательство приведено в работе [1].

Лемма 3. Пусть $\psi(\lambda+u) \in \mathsf{H}_p(\gamma)$ с $\gamma = r+\alpha$, где $r \in N$, $N = \{1,2,3,\ldots\}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\left\|\psi^{(j)}\right\|_p \leqslant C < \infty, \quad j = \overline{1,r}; \tag{13}$$

функция $\psi(\lambda+u)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\psi(\lambda+u) = \sum_{n=0}^{r} \frac{\psi^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n + R(\lambda+u,\lambda), \tag{14}$$

где $R(\lambda+u,\lambda)$ — остаточный член, удовлетворяющий неравенству

$$\|R(\lambda+u,\lambda)\|_p \leqslant \frac{C}{r!}|u|^{r+\alpha}. \tag{15}$$

Доказательство этих соотношений приведено в работе [9].

Перейдем теперь к формулировке и доказательству поставленной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *спектральная плотность* $f(\lambda) \in \mathsf{H}_p(\gamma_1)$, $\gamma_1 \geqslant 1$, $p \geq 1$; *спектрально-усредняющая функция* $\varphi(\lambda) \in \mathsf{H}_q(\gamma_2)$, $0 < \gamma_2 < 1$, $q \geqslant 1$ *при* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

2) *спектральная плотность* $f(\lambda) \in \mathsf{H}_p(\gamma_1)$, $0 < \gamma_1 < 1$, $p \geq 1$; *спектрально-усредняющая функция* $\varphi(\lambda) \in \mathsf{H}_q(\gamma_2)$, $\gamma_2 \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ *при* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

Тогда $|K_T| \leqslant C\,T^{-1}$ *при* $\gamma_1+\gamma_2 > 1$, *где* $K_T = \mathsf{E}(L_T) - L(f)$.

Доказательство. Согласно (12) имеем

$$\mathsf{E}(L_T) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)d\lambda du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda) d\lambda du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda) d\lambda du.$$

Функция $F_T(u)$ является четной, т.е. $F_T(-u) = F_T(u)$, поэтому выражение $F_T(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)$ во втором двойном интеграле можно представить следующим образом:

$$F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda) = F_T(u) f(\lambda)\varphi(\lambda+u).$$

Тогда

$$\mathsf{E}(L_T) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda) d\lambda du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda)\varphi(\lambda+u) d\lambda du. \quad (16)$$

Учитывая (3), (9) и равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\varphi(\lambda) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u) d\lambda,$$

получаем

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\varphi(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) du d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\varphi(\lambda) d\lambda du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda)\varphi(\lambda) d\lambda du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u) d\lambda du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(\lambda)\varphi(\lambda) + f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u)) d\lambda du.$$

Таким образом, линейный функционал $L(f)$ можно представить в следующем виде:

$$L(f) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(\lambda)\varphi(\lambda) + f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u)) d\lambda du. \quad (17)$$

Учитывая (16) и (17), получаем

$$\mathsf{E}(L_T) - L(f) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda) d\lambda du +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda)\varphi(\lambda++u) d\lambda du - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda)\varphi(\lambda) d\lambda du -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u) d\lambda du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\Big[f(\lambda)\varphi(\lambda+u) - f(\lambda)\varphi(\lambda) -$$

$$- f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u) + f(\lambda+u)\varphi(\lambda)\Big] d\lambda\, du.$$

Далее,

$$\mathsf{E}(L_T) - L(f) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\Big\{f(\lambda)\left[\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\right] -$$

$$- f(\lambda+u)\left[\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\right]\Big\} d\lambda du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\Big\{f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\Big\} d\lambda\, du.$$

Таким образом,

$$K_T = \mathsf{E}(L_T) - L(f) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)(f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)) d\lambda du. \quad (18)$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, из (18) находим, что

$$|K_T| = \left|\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)(f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)) d\lambda du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|F_T(u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)) d\lambda\right| du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F_T(u)| \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)) d\lambda \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda))|\, d\lambda du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda) - f(\lambda+u)|\ |\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)|\, d\lambda du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)|^q\, d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) \left\| f(\lambda+u) - f(\lambda) \right\|_p \left\| \varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda) \right\|_q du.$$

Тогда

$$|K_T| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) \left\| f(\lambda+u) - f(\lambda) \right\|_p \left\| \varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda) \right\|_q du. \quad (19)$$

Далее, воспользовавшись неравенством Минковского (неравенство треугольника для пространств функций с интегрируемой p-й степенью), будем иметь

$$\left\| f(\lambda+u) - f(\lambda) \right\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |-f(\lambda)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\| f(\lambda+u) \right\|_p + \left\| f(\lambda) \right\|_p. \quad (20)$$

Аналогично имеем
$$\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\|_q \leqslant \|\varphi(\lambda+u)\|_q + \|\varphi(\lambda)\|_q .$$
Далее поскольку интегрирование ведется по всей действительной оси, то
$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u)|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}},$$
то есть
$$\|f(\lambda+u)\|_p = \|f(\lambda)\|_p, \quad \text{где} \quad -\infty < u < +\infty. \tag{21}$$
Аналогично
$$\|\varphi(\lambda+u)\|_q = \|\varphi(\lambda)\|_q, \quad \text{где} \quad -\infty < u < +\infty.$$
Тогда, учитывая (19), (20) и (21), получаем
$$|K_T| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)\,\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\|_p\,\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\|_q\,du +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-1} F_T(u)\,\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\|_p\,\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\|_q\,du +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} F_T(u)\,\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\|_p\,\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\|_q\,du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)\,\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\|_p\,\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\|_q\,du +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-1} 2F_T(u)\,\|f(\lambda)\|_p\,2\,\|\varphi(\lambda)\|_q\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} 2F_T(u)\,\|f(\lambda)\|_p\,2\,\|\varphi(\lambda)\|_q\,du =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)\,\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\|_p\,\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\|_q\,du + 2\,\|f(\lambda)\|_p \times$$
$$\times\ \|\varphi(\lambda)\|_q \int\limits_{-\infty}^{-1} F_T(u)du + 2\,\|f(\lambda)\|_p\,\|\varphi(\lambda)\|_q \int\limits_{1}^{+\infty} F_T(u)du.$$

Из четности функции $F_T(u)$ следует, что

$$|K_T| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p \left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q du+$$

$$+\,4\left\|f(\lambda)\right\|_p \left\|\varphi(\lambda)\right\|_q \int\limits_{1}^{+\infty} F_T(u)du. \quad (22)$$

Далее, учитывая оценку (10), окончательно получаем, что

$$|K_T| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p \left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q du + CT^{-1}. \quad (23)$$

Согласно лемме 3

$$\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{r_1}\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n + R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{r_1}\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n\right\|_p + \left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{r_1}\left\|\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n\right\|_p +$$

$$+\left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{r_1}\left\|u^n f^{(n)}(\lambda)\right\|_p + \left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p =$$

$$= \sum_{n=1}^{r_1}\left|u^n\right| \ \left\|f^{(n)}(\lambda)\right\|_p + \left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p \leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}\left|u^n\right| + \frac{C}{r_1!}\left|u\right|^{r_1+\alpha_1} =$$

$$= C\sum_{n=1}^{r_1}\left|u^n\right| + C\left|u\right|^{r_1+\alpha_1}.$$

Итак,

$$\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p \leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}\left|u^n\right| + C\left|u\right|^{r_1+\alpha_1}. \quad (24)$$

Аналогично,

$$\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q \leqslant C\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right| + C\left|u\right|^{r_2+\alpha_2}. \quad (25)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\gamma_1 \geqslant 1$, $\gamma_2 < 1$. Учитывая (23), (24) и то, что $\varphi \in \mathsf{H}_q(\gamma_2)$ означает, что $\left\|\varphi^{(r_2)}(\lambda+u)-\varphi^{(r_2)}(\lambda)\right\|_q \leqslant C\left|u\right|^{\alpha_2}$, где $\gamma_2 = r_2+\alpha_2$, $0<\alpha_2<1$ (здесь $r_2=0$, так как $\gamma_2<1$), имеем следующую оценку:

$$|K_T| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)\left(C\sum_{n=1}^{r_1}|u^n| + C|u|^{r_1+\alpha_1}\right)C|u|^{\alpha_2}\,du + CT^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)C|u|^{\alpha_2}\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)C|u|^{\alpha_2}|u|^{r_1+\alpha_1}\,du + CT^{-1}.$$

Окончательно оценка имеет вид

$$|K_T| \leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}\int\limits_{0}^{1} u^{n+\alpha_2}F_T(u)du + C\int\limits_{0}^{1} u^{\alpha_1+r_1+\alpha_2}F_T(u)du + CT^{-1}.$$

Учитывая (11), получаем

$$|K_T| \leqslant CT^{-1}.$$

Случай 2: $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 \geqslant 1$. Учитывая (23), (25) и то, что $f \in \mathsf{H}_p(\gamma_1)$ означает, что $\left\|f^{(r_1)}(\lambda+u) - f^{(r_1)}(\lambda)\right\|_p \leqslant C|u|^{\alpha_1}$, где $\gamma_1 = r_1 + \alpha_1$, $0 < \alpha_1 < 1$ (здесь $r_1 = 0$, так как $\gamma_1 < 1$), имеем следующую оценку

$$|K_T| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_T(u)C|u|^{\alpha_1}\left(C\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right| + C|u|^{r_2+\alpha_2}\right)du + CT^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} CF_T(u)|u|^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right|du + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} CF_T(u)|u|^{\alpha_1+r_2+\alpha_2}\,du + CT^{-1}.$$

Окончательно оценка имеет вид

$$|K_T| \leqslant C\sum_{j=1}^{r_2}\int\limits_{0}^{1} u^{j+\alpha_1}F_T(u)du + C\int\limits_{0}^{1} u^{\alpha_1+r_2+\alpha_2}F_T(u)du + CT^{-1}.$$

Учитывая (11), получаем

$$|K_T| \leqslant CT^{-1}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G i n o v i a n M. S. Asymptotic properties of spectrum estimate of stationary Gaussian processes // Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika. – 1995. – Vol. 30, no. 1. – P. 1–16.
2. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

3. В о л к о в И. К., З у е в С. М., Ц в е т к о в а Г. М. Случайные процессы. – М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.
4. Б е н т к у с Р., Р у д з к и с Р., С т а т у л я в и ч у с В. Экспоненциальные неравенства для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности // Литовский матем. сборник. – 1975. – Т. 15. – С. 25–39.
5. Г и н о в я н М. С. Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули // Теор. вероятн. и ее применен. – 1988. – Т. 33, вып. 2. – С. 315–322.
6. И б р а г и м о в И. А. Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теор. вероятн. и ее примен. – 1963. – Т. 8, вып. 4. – С. 391–430.
7. Г и н о в я н М. С. Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности стационарного гауссовского процесса // Теор. вероятн. и ее примен. – 1988. – Т. 33, вып. 4. – С. 777–781.
8. И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З. Об оценке значения линейного функционала от плотности распределения // Записки научного семинара ЛОМИ. – 1986. – Т. 153. – С. 45–53.
9. Н и к о л ь с к и й С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

Статья поступила в редакцию 10.07.2009

Алексей Юрьевич Шомахов родился в 1973 г., окончил в 1997 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана, в 2000 г. — аспирантуру кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Старший преподаватель кафедры “Высшая математика” РЭА им. Н.Э. Плеханова. Специализируется в области стационарных случайных процессов и спектрального анализа временных рядов.

A.Yu. Shomakhov (b. 1973) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1997. Senior teacher of “Higher Mathematics” department of the Russian Economical Academy n. a. G.V. Plekhanov. Specializes in the field of stationary random processes, spectral analysis of time series.