УДК 681.5: 681.3

Ю. В. Журавлёв

СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО СЛЕДЯЩЕГО ИДЕНТИФИКАТОРА ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Решена задача синтеза асимптотически устойчивой следящей системы с идентификационной моделью. Структура модели, закон регулирования ее параметров гарантируют требуемую асимптотику, а свободные параметры следящей системы позволяют обеспечить качество динамических характеристик синтезируемого идентификатора. Идентификация постоянных параметров управляемого объекта трактуется в форме задачи определения закона настройки параметров модели на основе концепции прямого метода Ляпунова. На примере синтеза следящего идентификатора при простейшем динамическом объекте выявлена структура настройщика параметров и выработаны практические рекомендации по общей методологии синтеза следящих систем. Предложена схема идентификации аэродинамических коэффициентов парашюта.

E-mail: zhuravlev2707@mail.ru

Ключевые слова: следящая система, аналитический синтез, идентификация, устойчивость по Ляпунову, динамические характеристики, парашют.

Постановка задачи аналитического синтеза следящей системы. Наблюдается объект, описываемый нормальной системой дифференциальных уравнений m-го порядка

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^{n_k} p_{k_i} \cdot h_{k_i}\left(y_1, y_2, ..., y_{m-1}, y_m, u_1, u_2, ..., u_{r-1}, u_r, t\right) + \\ + g_k\left(y_1, y_2, ..., y_{m-1}, y_m, u_1, u_2, ..., u_{r-1}, u_r, t\right) \quad \left(k = \overline{1, m}\right) \quad (1)$$

с линейным вхождением неизвестных постоянных параметров p_{k_i}. Здесь h_{k_i}, g_k — известные скалярные функции, непрерывные по всем аргументам и непрерывно дифференцируемые по фазовым координатам $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m$; $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}, u_r$ — управляющие либо наблюдаемые внешние функции; t — время. Формируется трехблочная следящая система, где блок первый — объект (1) как эталон; блок второй — адаптивная модель, следящая за выходами объекта; блок третий — регулятор, непрерывно перенастраивающий параметры модели. Объединение второго и третьего блоков составляет следящий идентификатор; его предназначение двойное: 1) параметрическая идентификация объекта и 2) слежение за выходными координатами объекта. Требуется синтезировать идентификатор, фазовые процессы которого по отношению к эталону асимптотически устойчивы в целом; переходные процессы в идентификаторе должны удовлетворять требованиям быстродействия и монотонности.

Синтез идентификатора прямым методом Ляпунова. Концептуальное решение проблемы устойчивости выполняется прямым методом Ляпунова [1–3], и основной теоретический результат будет представлен теоремой, идея доказательства которой заложена в работе [1].

Выделим из (1) уравнение, которое соответствует отслеживаемой фазовой координате, и запишем его в упрощенных обозначениях

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i(t) + g(t). \tag{2}$$

Процессы $\{y(t), h_1(t), h_2(t), \ldots, h_{n-1}(t), h_n(t), g(t) \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ уравнения (2) считаем полностью доступными на промежутке времени $[0, T]$. Структуру следящей модели выберем подобной структуре объекта (2), но с добавочным коррекционным сигналом $S[\varepsilon(t)]$:

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j \cdot h_j(t) + g(t) - S\left[\varepsilon(t)\right], \quad \varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - y(t), \tag{3}$$

где S — некоторый позиционный закон коррекции скорости $\dot{\tilde{y}}(t)$ выходного сигнала модели по текущему координатному рассогласованию $\varepsilon(t)$. Сигнал $S[\varepsilon(t)]$, такой что $S[0] = 0$, вводится для придания устойчивости и обеспечения нужного качества процесса слежения за режимом $\varepsilon(t) = 0$. Расширим уравнение объекта (2) добавлением формальных дифференциальных уравнений для его параметров:

$$\dot{p}_j = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{4}$$

Фазовые процессы $\{y(t), p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ эталонного динамического объекта (2), (4) определяют опорный режим искомого идентификатора. Структуру регулятора настройки параметров модели берем в виде

$$\dot{\tilde{p}}_j(t) = f_j\left(\varepsilon, t\right) \quad (j = \overline{1, n}). \tag{5}$$

Здесь присутствуют свободные позиционные по ε законы f_j. Обозначим q_j параметрические отклонения модельных параметров относительно эталонных параметров: $q_j(t) = \tilde{p}_j(t) - p_j$ $(j = \overline{1, n})$. Вычтя (2) из (3), а также (4) из (5), получим систему уравнений возмущенного движения идентификатора по отношению к опорному режиму объекта (2), (4): $\dot{\varepsilon}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i \cdot h_i(t) - S[\varepsilon(t)]$, $\dot{q}_j(t) = f_j$ $(j = \overline{1, n})$, или в векторном виде

$$\dot{\varepsilon} = h^{\text{т}} q - S[\varepsilon], \qquad \dot{q} = f, \tag{6}$$

где

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n)^{\text{т}}, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n)^{\text{т}},$$
$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n)^{\text{т}}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V = \dfrac{1}{2} q^{\text{т}}(t) K^{-1} q(t) + \displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon(t)} \Phi(\sigma) d\sigma$. Здесь K^{-1} — постоянная симметрическая положительно определенная квадратная матрица n-го порядка, так что $q^{\text{т}}(t) K^{-1} q(t) > 0$ при любых $q(e) \neq 0$; функция же $\Phi(\sigma)$ — непрерывная в начале координат, с графиком из некоторого сектора углов в первом и третьем квадрантах плоскости (σ, Φ), так что

$$\sigma \Phi(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0. \tag{7}$$

В силу (7) имеем $\displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon(t)} \Phi(\sigma) d\sigma > 0$ при всех $\varepsilon(t) \neq 0$, а также $V = 0 \Leftrightarrow (q(t) = 0 \wedge \varepsilon(t) = 0)$. Итак, на решениях системы (6) функция V — положительно определенная. Запишем полную производную функции Ляпунова по t в силу уравнений (6): $\dot{V}(t) = q^{\text{т}}(t)[K^{-1} f + h(t) \Phi(\varepsilon(t))] - \Phi(\varepsilon(t)) \cdot S(\varepsilon(t))$, и избавимся от ненаблюдаемой части $q(t)$ посредством обнуления, $K^{-1} f + h(t) \Phi(\varepsilon(t)) \equiv 0$, тогда

$$\dot{V}(t) = -\Phi(\varepsilon(t)) \cdot S(\varepsilon(t)). \tag{8}$$

Желаемое строгое неравенство $\dot{V}(t) < 0$ выполняется лишь при $\varepsilon \neq 0$, если только

$$\varepsilon S(\varepsilon) > 0. \tag{9}$$

Действительно, при $\varepsilon \neq 0$ в силу (7) и (9) имеем

$$\dot{V}(t) = -\Phi(\varepsilon(t)) \cdot S(\varepsilon(t)) = -\frac{\varepsilon \Phi(\varepsilon(t)) \varepsilon S(\varepsilon(t))}{\varepsilon^2} < 0.$$

Таким образом, на решениях системы (6) имеется положительно определенная функция Ляпунова $V > 0$ со знакоотрицательной полной производной по $t, \dot{V} \leqslant 0$. Определенная отрицательность $\dot{V} < 0$ имеет место лишь при $\varepsilon \neq 0$.

Можно заключить, что законом f регулятора параметрической настройки модели вида $f = -K h(t) \Phi[\varepsilon(t)]$ будет доставляться асимптотическая устойчивость координатному выходу канала слежения, при этом регулятор настройки параметров имеет следующий вид:

$$\dot{\tilde{p}} = -K h(t) \Phi[\varepsilon(t)]. \tag{10}$$

Нулевое решение системы (6) будет устойчивым в целом, если $V \to +\infty$ при $\|q\| \to +\infty$ и $|\varepsilon| \to +\infty$. Например, если функция Φ в настройщике (10) линейная, вида $\Phi(\varepsilon) = C_\Phi \varepsilon$, где $C_\Phi > 0$, то функция V примет вид $V(t) = \dfrac{1}{2}[q^{\text{т}}(t)K^{-1}q(t) + C_\Phi \varepsilon^2]$. Запишем нижнюю оценку величины V:

$$V(t) = \frac{1}{2}[q^{\text{т}}(t)K^{-1}q(t) + C_\Phi \varepsilon^2] \geqslant \frac{1}{2}[\lambda_{\min} \|q\|^2 + C_\Phi \varepsilon^2],$$

где $\lambda_{\min}$ — наименьшее собственное значение матрицы K^{-1} и $\|q\|$ — норма вектора q, и отсюда заключаем, что $V \to +\infty$ при $\|q\| \to +\infty$ и $|\varepsilon| \to +\infty$. Аналогично можно показать, что и в случае нелинейных функций S и Φ вида (7) и (9), но с условием $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \Phi(\sigma) = +\infty$, будем иметь $V \to +\infty$ при $\|q\| \to +\infty$ и $|\varepsilon| \to +\infty$. Это означает наличие устойчивости идентификатора в целом, и так как q — процесс ненаблюдаемый, то идентификацию параметров можно начинать, например, при нулевых начальных значениях модельных параметров.

Условия (7) и (9) придают асимптотическую устойчивость режиму $\varepsilon(t) \equiv 0$, а теперь найдем условия асимптотической устойчивости режима $q(t) \equiv 0$. Уравнения возмущенного движения идентификатора в силу (4)–(6) и (10) имеют вид

$$\dot{\varepsilon}(t) = h^{\text{т}}(t)q(t) - S[\varepsilon(t)]; \qquad \dot{q}(t) = -Kh(t)\Phi[\varepsilon(t)], \tag{11}$$

и, очевидно, на многообразии $\varepsilon \equiv 0$; имеет место $\dot{q}(t) = \dot{\tilde{p}}(t) = 0$, а, следовательно, настройщик модельных параметров “замирает” и остается в состоянии покоя, параметрические отклонения “замораживаются”, $q(t) =$ const, и величина функции Ляпунова в дальнейшем не меняется, $V(t) = \dfrac{1}{2}q^{\text{т}}(t)K^{-1}q(t) =$ const. Установим необходимые условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11). По сути, выявим условия “покидания” фазовой траекторией системы (11) многообразия $\varepsilon \equiv 0$. Обратимся к случаю $\Phi(\varepsilon) = C_\Phi \varepsilon$, $S(\varepsilon) = C_S \varepsilon$, $C_\Phi > 0$, $C_S > 0$, где $C_\Phi,\ C_S$ — коэффициенты усиления в каналах настройки параметров модели и в цепи обратной отрицательной связи, задающие крутизну функций $\Phi(\varepsilon)$, $S(\varepsilon)$ в начале координат. При этом система уравнений возмущенного движения, как вытекает из (11), примет следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}(t) = h^{\text{т}}(t)q(t) - C_S \cdot \varepsilon(t); \quad \dot{q}(t) = -C_\Phi \cdot Kh(t) \cdot \varepsilon(t). \tag{12}$$

Согласно (8) имеем $\dot{V} = -C_\Phi C_S \varepsilon^2$, поэтому $\dot{V} \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon \equiv 0$. Если бы в некоторый момент t^* одновременно с равенством $\varepsilon(t^*) = 0$ выполнялось условие ортогональности $q^{\text{т}}(t^*)h(t^*) = 0$, то в силу первого уравнения (12) имели бы $\dot{\varepsilon}(t^*) = 0$, так что $\forall t > t^* \ \ \varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}(t) = 0$, $\dot{q}(t) = 0$, $q\,(t) = q(t^*) = \overline{q} =$ const. На многообразии $\varepsilon \equiv 0$ лежала бы полутраектория $\{\forall t > t^* \ \varepsilon(t) = 0,\ q(t) = \bar{q} = \text{const} \neq 0\}$, что означало бы неасимптотичность режима $q(t) \equiv 0$. Для адаптивно-управленческих задач это плохо, а с чисто идентификационной точки зрения просто непригодно. Следовательно, условие неортогональности

$$q^{\text{т}}(t)h(t) \neq 0 \ \text{ при } \quad \varepsilon(t) = 0 \tag{13}$$

оказывается необходимым, но оно же — и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого состояния системы (12), ибо при выполнении (13) согласно (12) имеем $\dot{\varepsilon}(t^*) \neq 0$, а следовательно, в ближайший же миг фазовая траектория покинет многообразие $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Итак, для поддержания асимптотичности режима $q(t) \equiv 0$, т.е. полной идентифицируемости объекта, сам объект должен пребывать в переходных, в частности периодических, режимах, или, другими словами, объект должен "поставлять" информацию об искомых параметрах проявлением "невялой" динамики, не должен покоиться. Хотя рассматривался случай линейных функций S и Φ, однако выводы остаются верными и для нелинейных S и Φ.

Вышесказанное есть доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *функции* $\Phi = \Phi(\varepsilon)$ *и* $S = S(\varepsilon)$ *такие, что*

$$\varepsilon \varPhi(\varepsilon) > 0, \ \ \varepsilon S(\varepsilon) > 0, \ \ \textit{при} \ \ \forall \varepsilon \neq 0;$$

$$\Phi(0) = S(0) = 0, \ \ \Phi \in C\,(0)\,, \ \ \lim_{\sigma \to +\infty} \Phi(\sigma) = +\infty;$$

2) *матрица* K — *квадратная порядка* n, *постоянная, симметрическая, определенно положительная*;

3) *идентифицируемый объект описывается скалярным дифференциальным уравнением с постоянным векторным параметром* p:

$$\dot{y}(t) = h^{\text{т}}(t)p + g(t), \quad p = \text{ const};$$

4) *компоненты* n*-мерной вектор-функции* $h(t)$ *являются непостоянными, возможно периодическими, непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями* t;

5) *идентификационная модель описывается дифференциальным уравнением* $\dot{\tilde{y}}(t) = h^{\text{т}}(t)\tilde{p}(t) + g(t) - S[\varepsilon(t)], \quad \tilde{p}(t) = \text{var}$;

6) *координатное рассогласование идентификационной модели и объекта* $\varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$;

7) *параметры идентификационной модели настраиваются регулятором вида* $\dot{\tilde{p}} = -Kh(t)\Phi[\varepsilon(t)]$;

8) *в моменты* $t = t^*$, *когда рассогласование* $\varepsilon(t^*) = 0$, *векторы* $\tilde{p}(t^*) - p$ *и* $h(t^*)$ *неортогональны в смысле* $(\tilde{p}(t^*) - p)^{\text{т}}\, h(t^*) \neq 0$.

Тогда выход $\tilde{y}(t)$ следящей модели и параметры $\tilde{p}(t)$ регулятора асимптотически устойчиво отслеживают выход $y(t)$ и постоянные параметры p объекта при любых начальных значениях $\varepsilon_0, \tilde{p}_0$ на любом вышеуказанном режиме функционирования объекта.

Случай линейного объекта первого порядка. Реализуем синтез следящего идентификатора для апериодического объекта, затем проанализируем качество переходных процессов.

Имеем объект с двумя параметрами a, b ($n = 2$):

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t), \tag{14}$$

с информацией о процессах $\{y(t), u(t)\}$ для всех моментов времени. В соответствии с теоремой 1 идентификатор объекта (14) будет следующим:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}(t) &= \tilde{a}(t)y(t) + \tilde{b}(t)u(t) - S[\varepsilon(t)], \\ \dot{\tilde{a}}(t) &= -[k_{11}y(t) + k_{12}u(t)]\Phi[\varepsilon(t)], \\ \dot{\tilde{b}}(t) &= -[k_{21}y(t) + k_{22}u(t)]\Phi[\varepsilon(t)], \end{aligned} \tag{15}$$

где $\varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$; $k_{12} = k_{21}$, $k_{11} > 0$, $k_{11}k_{22} > (k_{12})^2$ — условия положительной определенности матрицы K.

Возмущенное движение идентификатора в соответствии с (11) удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= q_1(t)y(t) + q_2(t)u(t) - S[\varepsilon(t)], \\ \dot{q}_1(t) &= -[k_{11}y(t) + k_{12}u(t)]\Phi[\varepsilon(t)], \\ \dot{q}_2(t) &= -[k_{21}y(t) + k_{22}u(t)]\Phi[\varepsilon(t)], \end{aligned} \tag{16}$$

где $q_1 = \tilde{a} - a$, $q_2 = \tilde{b} - b$ — отклонения параметров. Положим $q = (q_1, q_2)^{\text{т}}$ и $h = (h_1, h_2)^{\text{т}} \equiv (y(t), u(t))^{\text{т}}$. Пусть $\Phi(\varepsilon) = C_\Phi\varepsilon$, $S(\varepsilon) = C_S\varepsilon$, $C_\Phi > 0$, $C_S > 0$, тогда векторной записью системы (16) будет (12). Мы считаем, что процесс $h(t)$ допускает дифференцирование по t. Продифференцируем по t первое уравнение (12), подставим вместо $\dot{q}$ правую часть второго уравнения (12) и получим для ε неоднородное скалярное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{\varepsilon}(t) + C_S\dot{\varepsilon}(t) + C_\Phi h^{\text{т}}(t)Kh(t)\varepsilon(t) = \dot{h}^{\text{т}}(t)q(t). \tag{17}$$

Член $C_\Phi h^{\text{т}}(t)Kh(t)$ при $\varepsilon(t)$ запишем в виде $C_\Phi\zeta(t)$, причем в силу положительной определенности матрицы K имеем $\zeta(t) = h^{\text{т}}(t)Kh(t) > 0$ и поэтому $\zeta(t)C_\Phi > 0$. Таким образом, все коэффициенты левой части дифференциального уравнения (17) положительны.

Продифференцируем по t второе уравнение системы (12), подставим на место $\dot{\varepsilon}(t)$ правую часть первого уравнения системы (12), а также используем само второе уравнение системы (12). В результате получим неоднородное векторное дифференциальное уравнение второго порядка относительно параметрического рассогласования $q(t)$

$$\ddot{q}(t) + C_S\dot{q}(t) + C_\Phi K \cdot hh^{\mathrm{т}}q = -C_\Phi K\dot{h}(t)\varepsilon(t). \tag{18}$$

Поведение идентификатора на стационарном режиме объекта. Рассмотрим случай, когда объект (14) пребывает в точности в равновесном статическом состоянии, причем $y(t)u(t) \neq 0$, $h(t) = h_0 = (y_0,\, u_0)^{\mathrm{т}} = \text{const} \neq 0$. Уравнения (17) и (18) становятся однородными стационарными и взаимно инвариантными:

$$\ddot{\varepsilon}(t) + C_S\dot{\varepsilon}(t) + h_0^{\mathrm{т}}Kh_0C_\Phi\varepsilon(t) = 0, \tag{19}$$

$$\ddot{q}(t) + C_S\dot{q}(t) + C_\Phi Kh_0h_0^{\mathrm{т}}q\,(t) = 0. \tag{20}$$

Ввиду положительности коэффициентов уравнения (19) координатное рассогласование является исчезающей функцией, т.е. $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$, так что выход $\tilde{y}(t)$ модели (15) будет асимптотически устойчиво отслеживать выход $y(t) = y_0$ объекта. Однако, переписав векторное уравнение (20) в виде скалярной системы

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1 + C_S\dot{q}_1 + C_\Phi(k_{11}y_0^2 + k_{12}u_0y_0)q_1 + C_\Phi(k_{11}y_0u_0 + k_{12}u_0^2)q_2 = 0;\\ &\ddot{q}_2 + C_S\dot{q}_2 + C_\Phi(k_{21}u_0y_0 + k_{22}u_0^2)q_1 + C_\Phi(k_{21}y_0^2 + k_{22}u_0y_0)q_2 = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

мы обнаружили наличие перекрестного влияния движений q_1 и q_2 друг на друга, и потому установившиеся значения параметрических отклонений q_1, q_2 при выполнении условий $k_{11}y_0^2 + k_{12}u_0y_0 \neq 0$, $k_{21}y_0^2 + k_{22}u_0y_0 \neq 0$, будут такими, что $y_0q_1 + u_0q_2 = 0$. Действительно, после затухания переходного процесса имеем $\ddot{q}(t) = \dot{q}(t) = 0$ и дифференциальная система (21) вырождается в алгебраическую систему двух линейно зависимых уравнений, равносильную $y_0q_1 + u_0q_2 = 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} &C_\varPhi\,(k_{11}y_0 + k_{12}u_0)\,(y_0q_1 + u_0q_2) = 0;\\ &C_\varPhi\,(k_{21}y_0 + k_{22}u_0)\,(y_0q_1 + u_0q_2) = 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow y_0q_1 + u_0q_2 = 0. \tag{22}$$

Это соответствует попаданию фазовой траектории системы (19)–(20) на многообразие $\varepsilon = 0$, т.е. на координатную плоскость q_1q_2, и при этом $q_2 : q_1 = -y_0 : u_0$. Точка фазового состояния будет располагаться на прямой $y_0q_1 + u_0q_2 = 0$, а сама эта прямая лежит на координатной плоскости $\varepsilon = 0$ и проходит через начало координат фазового пространства. В точности такой же вывод получается из первого уравнения системы (11): при $\varepsilon = 0$ и $\dot{\varepsilon} = 0$ из равенства $q_1h_1 + q_2h_2 = 0$ вытекает соотношение $q_1 : q_2 = -h_2 : h_1$.

Очевидно, исчезновение рассогласования $\varepsilon(t)$ будет происходить тем резче, чем больше в (19) величина демпфирующего коэффициента C_S, на основании чего крутизну C_S корректирующего звена $S[\varepsilon(t)]$

естественно называть жесткостью демпфирования координатного рассогласования.

Собственная частота слежения

$$\omega_c = \sqrt{C_\Phi h_0^{\text{т}} K h_0} = \sqrt{C_\Phi \zeta} \tag{23}$$

зависит от h_0, K, но также и от C_Φ, т.е. от крутизны функции Φ настройщика модельных параметров.

Динамические характеристики идентификатора будут зависеть от сочетания значений C_S и C_Φ. Рост C_S увеличивает жесткость демпфирования, подавляет колебательность, и может приводить к апериодическому характеру исчезновения ε. Рост C_Φ увеличивает собственную частоту, повышая быстродействие идентификатора, но одновременно снижает его защищенность от влияния высокочастотных помех. Выбором C_S и C_Φ можно добиться высокого быстродействия идентификатора с удовлетворением другим требованиям качественного характера.

На режиме почти установившегося стационарного равновесного состояния объекта, когда $\dot{h}(t) \approx 0$, имеем $\omega_c \approx$ const и уравнение (17) аппроксимируется уравнением (19). Корни характеристического уравнения, соответствующего (19), равны

$$\lambda_1 = \frac{-C_S + \sqrt{C_S^2 - 4\omega_c^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-C_S - \sqrt{C_S^2 - 4\omega_c^2}}{2}. \tag{24}$$

Желая исключить колебательность переходного процесса, нужно обеспечить выполнение дискриминантного условия

$$C_S^2 - 4\omega_c^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow C_S^2 - 4C_\Phi\zeta \geqslant 0.$$

Разный темп составляющих свободного движения при существенном различии λ_1 и λ_2 мог бы привести к дополнительным осложнениям, связанным с численным интегрированием дифференциальных уравнений идентификатора (проявление свойства жесткости дифференциальных уравнений [4]), в связи с чем целесообразно выбирать C_S и C_Φ, исходя из дискриминантного условия с малым значением δ:

$$\delta = C_S^2 - 4C_\Phi\zeta > 0, \tag{25}$$

тогда оба корня характеристического уравнения будут отрицательны, но не слишком сильно различающимися. Для увязывания значений C_S и C_Φ требуется знать хотя бы грубую оценку величины ζ. Окончательных рекомендаций по выбору C_S и C_Φ не даем, однако ясно, что, задавшись величиною C_Φ, а также допуском разнотемповости δ, можно из (25) найти значение C_S; в классической теории регулирования данные вопросы исчерпывающе изучены [5].

Теперь обратим внимание на сочетание $C_\Phi K$, которое присутствует в каждой формуле. Достаточно взять $k_{11} = 1$, остальные элементы k_{ij}

нужно назначить из условий положительной определенности и симметрии матрицы K, т.е. $k_{12} = k_{21}$, $k_{22} > (k_{12})^2$. То, что со старым значением C_Φ равнялось $C_\Phi k_{11}$, теперь должно быть приравнено к новому C_Φ. Величина C_Φ, как коэффициент усиления в блоке регулирования параметров модели, известным образом будет влиять на динамические характеристики идентификатора. Из (18) можно заметить, что верхняя частота спектра регулятора, срез ω_q, будет приблизительно таким же, как и срез спектра модели $\omega_{\text{с}}$.

На основании вышеизложенного рекомендуется: 1) назначить $k_{11} = 1$; 2) назначить C_Φ и найти по (23) собственную частоту $\omega_{\text{с}}$ модели; при этом, в частности, важно отследить, чтобы $\omega_{\text{с}}$ превалировала над частотой среза объекта $\omega_{\text{об}}$; 3) Назначить δ и определить C_S из (25) .

Назначение элементов матрицы K. Проведем дальнейший анализ процессов в идентификаторе на стационарном режиме объекта. Во-первых, полагаем $k_{11} = 1$. Система (16) примет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{\varepsilon}(t) + C_S\dot{\varepsilon}(t) + \omega_c^2\varepsilon(t) = 0; \\ &\dot{q}_1(t) = -[y_0 + k_{12}u_0]C_\Phi\varepsilon(t); \\ &\dot{q}_2(t) = -[k_{21}y_0 + k_{22}u_0]C_\Phi\varepsilon(t). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\omega_{\text{с}}$ имеет вид (23), т.е. $\omega_{\text{с}}^2 = C_\Phi h_0^{\text{т}} K h_0$.

Выдерживая дискриминантное условие (25), найдем корни (24) и запишем общее решение координатного рассогласования

$$\varepsilon(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{27}$$

Отсюда

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = C_1 + C_2, \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$$

и

$$C_1 = (\dot{\varepsilon}_0 - \lambda_2\varepsilon_0)/(\lambda_1 - \lambda_2), \quad C_2 = -(\dot{\varepsilon}_0 - \lambda_1\varepsilon_0)/(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Из первого уравнения системы (16) имеем $\dot{\varepsilon}_0 = -C_S\varepsilon_0 + q_{10}y_0 + q_{20}u_0$, так что по начальным значениям координатного и параметрических рассогласований в момент $t = 0$, соответственно равным ε_0 и q_{10}, q_{20}, найдем

$$C_1 = \varepsilon_0\frac{c_S + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{q_{10}y_0 + q_{20}u_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = -\varepsilon_0\frac{c_S + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{q_{10}y_0 + q_{20}u_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Из (27) очевидна асимптотика $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon\,(t) = 0$, причем с произвольными C_1 и C_2, следовательно, координатное рассогласование ε(t) будет функцией исчезающей, инвариантной к величинам отклонений параметров. Поведение параметрических отклонений найдем прямым интегрированием второго и третьего уравнений системы (26):

$$q_1(t) = q_{10} - [y_0 + k_{12}u_0]C_\Phi \int\limits_0^t \varepsilon(t)dt =$$

$$= q_{10} - [y_0 + k_{12}u_0]C_\Phi \left[\frac{C_1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1) + \frac{C_2}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 t} - 1)\right],$$

$$q_2(t) = q_{20} - [k_{12}y_0 + k_{22}u_0]C_\Phi \left[\frac{C_1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1) + \frac{C_2}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 t} - 1)\right].$$

Из последних уравнений при $t \to \infty$, а по сути к моменту τ, равному длительности переходного процесса, получим

$$q_1(t) \approx q_1(\tau) \to q_1(\infty) = q_{10} + [y_0 + k_{12}u_0]C_\Phi \left[\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right],$$

$$q_2(t) \approx q_2(\tau) \to q_2(\infty) = q_{20} + [k_{21}y_0 + k_{22}u_0]C_\Phi \left[\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right].$$

Вычислим на промежутке переходного процесса приращения модельных параметров $\Delta\tilde{a} \equiv \tilde{a}(\tau) - \tilde{a}(0)$ и $\Delta\tilde{b} \equiv \tilde{b}(\tau) - \tilde{b}(0)$, которые равны приращениям параметрических отклонений Δq_1 и Δq_2 соответственно. Получаем

$$\Delta\tilde{a} = \Delta q_1 \equiv q_1(\tau) - q_{10} \approx [y_0 + k_{12}u_0]C_\Phi \left[\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right],$$

$$\Delta\tilde{b} = \Delta q_2 \equiv q_2(\tau) - q_{20} \approx [k_{21}y_0 + k_{22}u_0]C_\Phi [\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\Big],$$

откуда $\Delta q_2 : \Delta q_1 = [k_{21}y_0 + k_{22}u_0] : [y_0 + k_{12}u_0]$. Из системы (26) имеем $\dot{q}_2(t) : \dot{q}_1(t) = [k_{21}y_0 + k_{22}u_0] : [y_0 + k_{12}u_0]$.

Как следует из (22), отношение установившихся параметрических рассогласований в момент завершения переходного процесса имеет вид $q_2(\tau) : q_1(\tau) = -y_0 : u_0$, а из (14) точно такое же отношение соответствует параметрам объекта в стационарном режиме: $b : a = -y_0 : u_0 \equiv \varphi$, следовательно, $q_2(\tau) : q_1(\tau) = b : a$. Чтобы свести параметрические рассогласования к нулю, т.е. $q_1 = q_2 = 0$, достаточно назначить фазовые скорости $\dot{q}_2(t), \dot{q}_1(t)$ таким образом, чтобы траектория движения на фазовой плоскости q_1, q_2 выглядела прямолинейной, т.е.

$$\dot{q}_2(t) : \dot{q}_1(t) = q_2 : q_1 = [k_{21}y_0 + k_{22}u_0] : [y_0 + k_{12}u_0] = \varphi.$$

Имея целью $q_2(t) \approx q_1(t) \approx 0$, согласуем посредством выбора элементов матрицы K каналы настройки параметров таким образом, чтобы $\dot{q}_2 = \varphi\dot{q}_1$, т.е.

$$\dot{q}_1(t) = -[y_0 + \varphi u_0]C_\Phi\varepsilon(t), \quad \dot{q}_2(t) = -\varphi[y_0 + \varphi u_0]C_\Phi\varepsilon(t).$$

Следовательно,

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & \varphi^2 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Очевидно, такая матрица K — вырожденная, и вовсе не определенно положительная. Однако теперь фазовые отклонения (ε, q_1, q_2) поведут себя таким образом, что проекция фазовой траектории на плоскость (q_1, q_2) будет прямолинейной с направлением к началу координат. По существу, настройщик параметров оказался одноканальным, проблема редуцировалась из 2-мерной в 1-мерную, ибо

$$\tilde{b}(t) - \tilde{b}\,(\tau) = \varphi \int_{\tau}^{t} \dot{\tilde{a}}\,(\sigma) d\sigma = \varphi(\tilde{a}\,(t) - \tilde{a}\,(\tau)).$$

Если бы коэффициент φ был известен априори, то матрицу K следовало выбирать в виде (28). Таким образом, анализ следящего идентификатора на установившемся режиме объекта позволил установить структурный состав матрицы K. Более реалистична следующая ситуация [6]. Обычно конструкторские расчеты дают область рассеяния [3] значений параметров a, b объекта, причем с некоторым центром рассеяния a_0, b_0 и корреляционным коэффициентом $r \in [-1; 1]$. Возьмем $\varphi = b_0 : a_0$ и положим $k_{11} = 1$, $k_{12} = k_{21} = r\varphi$, $k_{22} = \varphi^2$. Так как модуль корреляционного коэффициента не превышает 1, то матрица K окажется изначально положительно определенной. Чем надежнее априорная информация о параметрах a, b, тем ближе к 1 модуль коэффициента корреляции, тем согласованнее будет происходить настройка параметров. Когда никаких априорных сведений о параметрах нет, следует брать $r = 0$, а матрицу K — диагональной, тогда каналы настройки параметров будут без перекрестного влияния. Далее полученные здесь результаты (при $n = 2$) будут индуктивно перенесены на случаи $n = 3$ и $n = 4$.

Идентификация параметров парашютной системы. Продемонстрируем приложение разработанной методологии к динамическому объекту типа парашютной системы. Исходя из соотношений работы [7], можно вывести уравнения продольного движения осесимметричной парашютной системы в вертикальной плоскости и записать их в виде, подобном (1):

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_x = p_1 \left(V_x^2 + V_y^2\right) + p_2 V_y \omega_z + p_3 \omega_z^2 + p_4 \cos\vartheta;\\
&\dot{V}_y = p_5 \left(V_x^2 + V_y^2\right) \sin\left(k\alpha\right) + p_6 V_x \omega_z + p_7 \sin\vartheta;\\
&\dot{\omega}_z = p_8 \left(V_x^2 + V_y^2\right) \sin\left(k\alpha\right) + p_9 V_x \omega_z + p_{10} \sin\vartheta;\\
&\dot{\vartheta} = \omega_z.
\end{aligned}$$

Аэродинамические коэффициенты $p_1 - p_{10}$ объекта подлежат определению по данным аэродинамических продувок в условиях $\vartheta = \alpha$. Коэффициент k, входящий в $\sin(k\alpha)$, известен, а парашютная система испытывается в условиях, когда измеряются $V_x, V_y, \omega_z, \vartheta = \alpha$. Итогом синтеза будет трехканальный идентификатор:

Канал 1. $\dot{\tilde{V}}_x = h^{\text{т}}\tilde{p} - S(\varepsilon)$; $\varepsilon = \tilde{V}_x - V_x$; $\dot{\tilde{p}} = -Kh\Phi(\varepsilon)$. Здесь $h = (V_x^2 + V_y^2, V_y\omega_z, \omega_z^2, \cos\vartheta)^{\text{т}}$ — вектор измерений в момент t;

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 r_{12} & \varphi_2 r_{13} & \varphi_3 r_{14} \\ \varphi_1 r_{12} & \varphi_1^2 & \varphi_2\varphi_1 r_{23} & \varphi_3\varphi_1 r_{24} \\ \varphi_2 r_{13} & \varphi_2\varphi_1 r_{23} & \varphi_2^2 & \varphi_3\varphi_2 r_{34} \\ \varphi_3 r_{14} & \varphi_3\varphi_1 r_{24} & \varphi_3\varphi_2 r_{34} & \varphi_3^2 \end{pmatrix};$$

$\varphi_1 = \dfrac{p_2}{p_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{p_3}{p_1}$, $\varphi_3 = \dfrac{p_4}{p_1}$ вычисляются по априорным значениям p_i $(i = \overline{1,4})$; r_{ij} — априорные коэффициенты корреляции параметров p_i, p_j $(i, j = \overline{1,4})$.

Канал 2. $\dot{\tilde{V}}_y = h^{\text{т}}\tilde{p} - S(\varepsilon)$; $\varepsilon = \tilde{V}_y - V_y$; $\dot{\tilde{p}} = -Kh\Phi(\varepsilon)$. Здесь $h = ((V_x^2 + V_y^2)\sin(k\alpha),\ V_x\omega_z, \sin\vartheta)^{\text{т}}$ — вектор измерений в момент t;

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 r_{56} & \varphi_2 r_{57} \\ \varphi_1 r_{56} & \varphi_1^2 & \varphi_2\varphi_1 r_{67} \\ \varphi_2 r_{57} & \varphi_2\varphi_1 r_{67} & \varphi_2^2 \end{pmatrix};$$

$\varphi_1 = \dfrac{p_6}{p_5}$ и $\varphi_2 = \dfrac{p_7}{p_5}$ вычисляются по априорным значениям p_i $(i = \overline{5,7})$; r_{ij} — коэффициенты корреляции параметров p_i, p_j $(i, j = \overline{5,7})$.

Канал 3. $\dot{\tilde{\omega}}_z = h^{\text{т}}\tilde{p} - S(\varepsilon)$; $\varepsilon = \tilde{\omega}_z - \omega_z$; $\dot{\tilde{p}} = -Kh\Phi(\varepsilon)$. Здесь $h = ((V_x^2 + V_y^2)\sin(k\alpha), V_x\omega_z, \sin\vartheta)^{\text{т}}$ — тот же вектор, что в канале 2.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 r_{89} & \varphi_2 r_{810} \\ \varphi_1 r_{89} & \varphi_1^2 & \varphi_2\varphi_1 r_{910} \\ \varphi_2 r_{810} & \varphi_2\varphi_1 r_{910} & \varphi_2^2 \end{pmatrix};$$

$\varphi_1 = \dfrac{p_9}{p_8}$, $\varphi_2 = \dfrac{p_{10}}{p_8}$ — вычисляются по априорным p_i $(i = \overline{8,10})$; r_{ij} — коэффициенты корреляции параметров p_i, p_j $(i, j = \overline{8,10})$.

Для каждого канала функции S и Φ необходимо выбирать в соответствии с теоремой 1.

Пользователю алгоритмом адаптивной идентификации необходимо:

1) ввести в ЦВМ информацию о процессах $V_x, V_y, \omega_z, \vartheta$;

2) иметь априорные данные о параметрах p_i объекта и коэффициентах корреляции r_{ij};

3) назначить элементы матрицы K и усиление регулятора C_Φ;

4) согласовать по (25) величину C_S с величиной C_Φ (для этого потребуется знать диапазоны размахов процессов $V_x, V_y, \omega_z, \vartheta$);

5) выставить начальные значения параметров модели в состояние, соответствующее априорному центру рассеяния;

6) интегрировать уравнения каналов идентификации до окончания настройки.

Выводы. Изложены теоретические основы решения одной из актуальных проблем теории управления. Синтез следящего идентификатора многомерной динамической системы предваряется распараллеливанием на каналы. Методом Ляпунова синтезируется следящий идентификатор канала. Доказана теорема об асимптотической устойчивости и указаны условия устойчивости в целом. Рассмотрены вопросы качества слежения в переходных режимах. Установлена структура матрицы K настройщика параметров. Методология синтеза использована в задаче аэродинамических испытаний парашютной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи об устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
2. Барабашин Е. А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
3. Журавлев Ю. В. Синтез следящей системы с идентификационной моделью // Сб.: Аэрокосмические технологии: Науч. материалы Второй междунар. науч.-техн. конф., посвященной 95-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (Реутов–Москва. 19–20 мая 2009 г.) / Под ред. Р.П. Симоньянца. – С. 207–208. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 331 с.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холл и Дж. Уатт: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. Т. 1. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.
6. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
7. Динамика движения парашютных систем / А.И. Антоненко и др. – М.: Машиностроение, 1982. – 152 с.

Статья поступила в редакцию 18.06.2009

Юрий Васильевич Журавлёв родился в 1947 г., окончил Московский авиационный институт в 1974 г., МГУ им. М.В. Ломоносова в 1981 г. Старший преподаватель кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 15 научных публикаций в области моделирования, идентификации и управления динамическими системами.

Yu.V. Zhuravlev (b. 1947) graduated from the Moscow Aviation Institute in 1974 and the Lomonosov Moscow State University in 1981. Senior teacher of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 15 publications in the field of simulation, identification and control of dynamical systems.