

К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Разработаны методика и программы решения на ЭВМ системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих движение батанного механизма ткацких станков с учетом упругости звеньев.

E-mail: apnev@rambler.ru

Ключевые слова: ткацкий станок, батанный механизм, динамическая модель, дифференциальные уравнения, метод начальных параметров, фундаментальная матрица.

В классической теории механизмов основным допущением является то, что звенья механизма предполагаются абсолютно твердыми. Однако, как показывает практика, высокоскоростные механизмы, спроектированные на основе этого допущения, часто работают неудовлетворительно. Нарушение нормальной работы механизма проявляется в ухудшении точности воспроизведения запроктированных законов движения звеньев и в недостаточной долговечности отдельных деталей. Исследование причин возникновения указанных явлений позволяет сделать вывод о необходимости учета упругости звеньев механизма при его проектировании.

Динамические исследования систем с учетом упругости звеньев находят все большее распространение. Наиболее широко ведутся исследования в области технологического металлургического оборудования, металлорежущих станков, в авиационной промышленности, в области транспорта и горного дела. Сложность расчета механизмов с учетом упругости звеньев обычными методами численного анализа делает его на первый взгляд непригодным для практического использования. Однако, используя для расчетов специальные компьютерные программы, исследование работы механизма при различных режимах его работы можно провести достаточно эффективно.

Первые исследования динамики машин с учетом упругих свойств звеньев выполнены С.Н. Кожевниковым [1]. Сюда относятся исследования главных линий прокатных станов. Указывается, что характерным для кривошипно-шатунного механизма перемещения каретки стана периодической холодной прокатки труб является то, что закон изменения усилия, действующего вдоль шатуна, не соответствует закону изменения технологической нагрузки. Это вызвано тем, что упругость шатуна механизма обуславливает колебательный процесс и, как

следствие — перегрузки. В работах В.Л. Вейца [2] рассматриваются вопросы расчета приводов металлорежущих станков с учетом упругости звеньев. В работе А.Е. Кобринского [3] исследована работа механизма газораспределения авиационного двигателя с учетом упругости толкателя.

В текстильном машиностроении первые исследования механизмов ткацких станков с учетом упругости звеньев выполнены А.П. Малышевым [4]. В работе исследован вопрос о влиянии упругих деформаций звеньев боевого механизма ткацких станков на движения челнока при его разгоне в челночной коробке. Отмечается, что истинное положение челнока в любой момент движения может быть определено только при учете упругости звеньев боевого механизма станка. В других работах, посвященных динамике боевых механизмов ткацких станков, отмечается, что при выборе расчетных схем необходимо стремиться к учету минимального числа упругих звеньев, так как с увеличением числа звеньев соответственно увеличивается и число дифференциальных уравнений. Например, при изучении перемещений можно ограничиться меньшим числом упругих звеньев, вплоть до приведения всех деформаций к одному упругому звену [1]. Однако при исследовании прочности конструкций с учетом инерционных нагрузок необходимо проведение расчета с учетом большого числа упругих звеньев.

Из анализа литературы следует, что возможности расчета механизмов с учетом упругости звеньев не исчерпаны и при помощи направленного использования в расчетах упругости звеньев могут быть предложены меры по улучшению качества защиты механизмов от внешних воздействий. Однако процессы, протекающие в таких системах, изучены еще недостаточно детально.

При исследовании динамики батанного механизма ткацких станков типа АТ в предположении, что его звенья абсолютно жесткие, не удастся объяснить различную нагруженность шатунов в установившемся движении механизма, а также различное нагружение замочных пружин при ударе батана в замки. Это можно сделать, если будет учтена упругость звеньев механизма. Сложная структура батанного механизма не позволяет составить непосредственно для него простые расчетные уравнения, описывающие динамические процессы в различных фазах движения. В связи с этим при составлении расчетной схемы в настоящей работе отброшены факторы, слабо влияющие на характер поведения механизма и составлена сравнительно простая динамическая модель, описываемая системой дифференциальных уравнений с минимальным числом упругих звеньев.

Расчетная схема механизма составлена с учетом упругости наиболее податливых звеньев: кручения коленчатого вала между кривошипами и изгиба бруса между лопастями — и представляет шестимассовую систему с тремя степенями свободы (рис. 1). Полученная система уравнений описывает установившийся и неуставившийся режимы движения батанного механизма ткацких станков типа АТ и относится к системам с периодически изменяющимися параметрами (вывод уравнений приведен в работе [5]):

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + A \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right)^2 \right) \ddot{\phi}_2 + \\
 & + 2A\omega \left[\left(R \cos(\omega t) - \frac{R^2}{l} \cos(2\omega t) \right) \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) \dot{\phi}_2 + \right. \\
 & + \left. \left[B - A\omega^2 \left(R \sin(\omega t) - \frac{2R^2}{l} \sin(2\omega t) \right) \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) + \right] \phi_2 + \right. \\
 & + \left. \left[D \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) + E \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) \right] \phi_2 + \right. \\
 & + F \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) x_4 - G \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) x_3 = \\
 & = H \left[R(1 - \cos(\omega t)) - \frac{R^2}{2l} \sin^2(2\omega t) \right] \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) + \\
 & + A\omega^2 \left(R \cos(\omega t) - \frac{R^2}{l} \cos(2\omega t) \right) \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right); \quad (1) \\
 & \ddot{x}_3 + Kx_3 - Mx_4 - N \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) \phi_2 = \\
 & = P \left[R(1 - \cos(\omega t)) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right]; \\
 & \ddot{x}_4 + Qx_4 - Sx_3 + T \left(R \sin(\omega t) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right) \phi_2 = \\
 & = W \left[R(1 - \cos(\omega t)) - \frac{R^2}{2l} \sin(2\omega t) \right].
 \end{aligned}$$

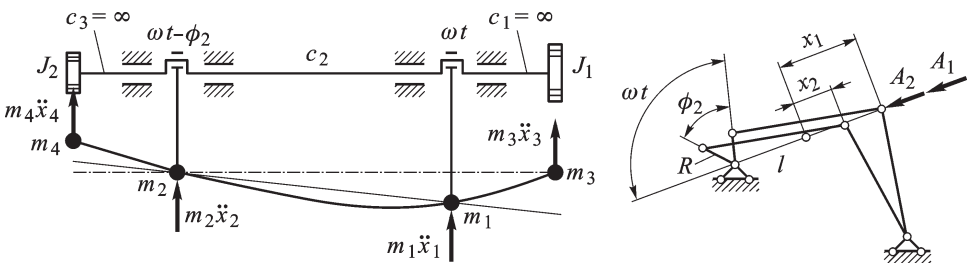


Рис. 1. Расчетная схема батанного механизма

Начальные условия установившегося движения имеют вид

$$\begin{aligned} c_1 = \phi_{20} = \phi_2(0) = \phi_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right); \quad c_2 = \dot{\phi}_{20} = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right); \\ c_3 = x_{30} = x_3(0) = x_3\left(\frac{2\pi}{\omega}\right); \quad c_4 = \dot{x}_{30} = \dot{x}_3(0) = \dot{x}_3\left(\frac{2\pi}{\omega}\right); \quad (2) \\ c_5 = x_{40} = x_4(0) = x_4\left(\frac{2\pi}{\omega}\right); \quad c_6 = \dot{x}_{40} = \dot{x}_4(0) = \dot{x}_4\left(\frac{2\pi}{\omega}\right), \end{aligned}$$

В соотношениях (1), (2) A, B, \dots, W — постоянные коэффициенты; $c_1, c_3, c_5, c_2, c_4, c_6$ — соответственно обобщенные координаты и обобщенные скорости в момент, принимаемый за начало отсчета времени t , т.е. начальные условия установившегося движения.

Введя новые неизвестные функции

$$y_1 = \phi_2; \quad y_2 = \dot{\phi}_2; \quad y_3 = x_3; \quad y_4 = \dot{x}_3; \quad y_5 = x_4; \quad y_6 = \dot{x}_4,$$

получим систему уравнений в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1; \\ \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= -a_1(t)y_1 - a_2(t)y_2 + a_3(t)y_3 - a_4(t)y_5 + b_1(t); \\ \dot{y}_3 &= y_4; \\ \dot{y}_4 &= a_5(t)y_1 - a_6y_3 + a_7y_5 + b_2(t); \\ \dot{y}_5 &= y_6; \\ \dot{y}_6 &= -a_8(t)y_1 + a_9y_3 - a_{10}y_5 + b_3(t), \end{aligned} \quad (3)$$

в матричной форме имеющей вид

$$\frac{d}{dt}Y + A(t) \cdot Y = b, \quad (4)$$

где $Y = [\phi_2, \dot{\phi}_2, x_3, \dot{x}_3, x_4, \dot{x}_4]^T = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]^T$ — вектор состояния (вектор искомых функций);

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & a_3(t) & 0 & -a_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_5(t) & 0 & a_6 & 0 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_8(t) & 0 & a_9 & 0 & -a_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

— матрица переменных коэффициентов (в частности, a_6, a_7, a_9 и a_{10} — постоянные); $b = [0, b_1(t), 0, b_2(t), 0, b_3(t)]^T$ — вектор правых частей.

Для нахождения общего решения уравнения (4) необходимо найти какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (4) и общее решение соответствующей однородной системы [3]. Частное решение уравнения (4) найдем при однородных начальных условиях.

найдем решение уравнения (4), соответствующее установившемуся режиму движения. Задача решена методом начальных параметров [7] при следующих значениях приведенных масс и коэффициентов: $A = 284 \frac{1}{\text{М}^2}$; $B = 20,9 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{с}^2}$; $D = 94 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{М}^2 \text{с}^2}$; $E = 607 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{М}^2 \text{с}^2}$; $F = 439 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{М}^2 \text{с}^2}$; $G = 242 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{М}^2 \text{с}^2}$; $M = 463 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{с}^2}$; $P = 985 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{с}^2}$; $R = 985 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{с}^2}$; $S = 465 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{с}^2}$; $T = 207 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}^2}$; $W = 985 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{с}^2}$; $\frac{R^2}{2l} = 0,0104 \text{ м}$; $\frac{R^2}{l} = 0,0208 \text{ м}$; $\frac{2R^2}{l} = 0,0416 \text{ м}$; $m_3 = m_4 = 0,206 \text{ кг}$.

Результаты решения для движения масс в промежутке времени $(0, \frac{2\pi}{\omega})$ приведены на рис. 2. Полученный закон движения повторяется в последующих временных интервалах: $(\frac{2\pi}{\omega}, 2\frac{2\pi}{\omega})$, $(2\frac{2\pi}{\omega}, 3\frac{2\pi}{\omega})$ и т.д. Движения приведенных масс системы (см. рис. 1) определяются собственными и вынужденными колебаниями. Но в любой реальной механической системе всегда присутствуют демпфирующие элементы. В рассмотренном случае это связано с трением в кинематических парах, внутренним трением в материале звеньев, сопротивлением воздушной среды и т.п., что приводит к затуханию собственных колебаний, и на установившемся режиме работы станка движение приведенных масс механизма определяется только вынужденными колебаниями.

На рис. 2, а приведены законы движения левой массы коленчатого вала с моментом инерции относительно массы J_1 . В установившемся движении батанного механизма масса J_2 совершает крутильные колебания, обусловленные наличием в кинематической цепи передачи упругого элемента. Амплитуда колебания составляет 0,0037 рад. Эта

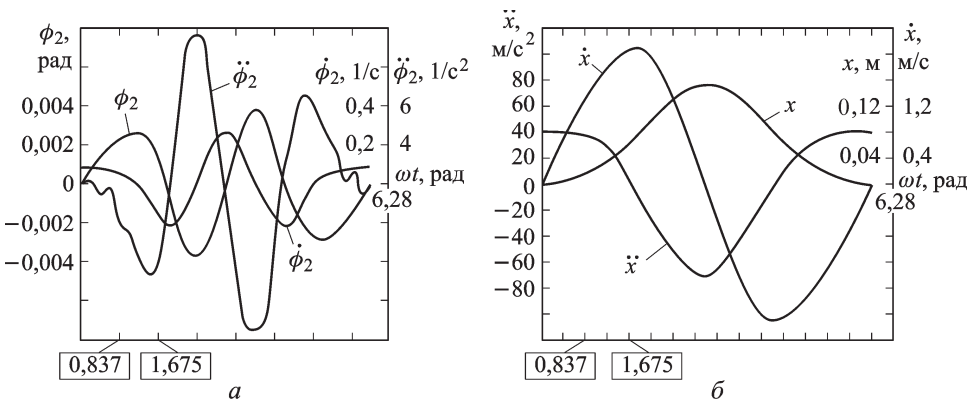


Рис. 2. Графики изменения обобщенных координат, скоростей и ускорений при установившемся движении:

а — движение массы J_2 относительно J_1 ; б — движение масс m_1, m_2, m_3, m_4

величина мала и не может существенно повлиять на движение массы m_2 . Но скорость $\dot{\phi}_2$ достигает заметной величины $0,24 \text{ с}^{-1}$. Велика и амплитуда ускорения $-\ddot{\phi}_2 = 15,4 \text{ с}^{-2}$.

Результаты расчета законов движения масс m_2 , m_3 и m_4 , выполненные с учетом упругости звеньев, показывают, что они незначительно отличаются от идеальных законов движения массы m_1 (см. рис. 2, б). Это связано с большой жесткостью упругих звеньев и малой угловой скоростью движения ведущего звена ($n = 250$ об/мин).

Основная цель исследования установившегося режима движения – определение параметров движения батанного механизма в момент его удара в замки. В результате расчетов (см. рис. 2) получены начальные условия для уравнений, описывающих процесс удара батана в замки: $\phi_1 = 1,9198$ рад; $\dot{\phi}_1 = 26,2 \text{ с}^{-1}$; $\phi_2 = -0,000758$ рад; $\dot{\phi}_2 = -0,210545 \text{ с}^{-1}$; $x_3 = 9,156517$ см; $\dot{x}_3 = 208,26885$ см/с; $x_4 = 9,166565$ см; $\dot{x}_4 = 206,08894$ см/с.

Выводы. Разработаны методика и программа решения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих движение батанного механизма с учетом упругости звеньев, что позволяет детально исследовать кинематику и динамику батанного механизма в течение всего цикла работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К о ж е в н и к о в С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. – Киев, 1961. – 260 с.
2. В е й ц В. Л. Динамические расчеты приводов машин. – М.: Машгиз, 1971. – 324 с.
3. К о б р и н с к и й А. Е. Механизмы с упругими связями. – М.: Наука, 1964. – 232 с.
4. М а л ы ш е в А. П., В о р о б ь е в П. А. Механика и конструктивные расчеты ткацких станков. – М.: Машгиз, 1960. – 390 с.
5. Е г о д у р о в Г. С., У ш а к о в В. С. Математическое описание движения батанного механизма ткацких станков типа АТ с учетом упругости звеньев // Известия вузов. Машиностроение. – 1972. – № 10. – С. 32–37.
6. П о н т р я г и н Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
7. Т у р ч а к Л. И. Основы численных расчетов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
8. Р а с ч е т ы на прочность элементов машиностроительных конструкций в среде Mathcad / Р.К. Вафин, Г.С. Егодуров и др. – Старый Оскол: ООО “ТНТ”, 2006. – 580 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2009

Георгий Сагадарович Егодуров — канд. техн. наук, профессор кафедры “Сопrotивление материалов” Восточно-Сибирского государственного технологического университета (г. Улан-Удэ).

G.S. Yegodurov — Ph. D. (Eng.), professor of “Strength of Materials” department of the East-Siberian State Technological University (Ulan-Ude).

Андрей Григорьевич Пнёв — аспирант Восточно-Сибирского государственного технологического университета (г. Улан-Удэ).

A.G. Pnyov — post-graduate of the East-Siberian State Technological University (Ulan-Ude).