

А. А. Локтев, Д. А. Локтев

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УДАРНОГО  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО ТЕЛА  
И ПЛАСТИНКИ УФЛЯНДА–МИНДЛИНА  
С ПОМОЩЬЮ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА**

*Исследован процесс динамического контакта ударника в виде груза и цилиндрической упругой пружины с упругой изотропной пластиной, динамическое поведение которой описывается волновыми уравнениями, учитывающими инерцию вращения поперечных сечений и деформацию поперечного сдвига. Использован волновой подход, связанный с распространением волновых поверхностей разрыва в контактирующей плите, а в качестве метода решения применены лучевой метод, метод сращивания асимптотических разложений на границе контактной области и метод преобразований Лапласа. Получен вывод о влиянии параметров конструкции на динамическую контактную силу.*

**E-mail: prtlokt@yandex.ru**

**Ключевые слова:** динамический контакт, пластинка Уфлянда–Миндлина, лучевой метод.

Задачи ударного взаимодействия твердых тел и пластинок рассматривались неоднократно [1–9]. Поскольку любая задача динамического контакта состоит из задачи местного смятия и задачи деформирования взаимодействующих тел вне области контакта, то существует несколько подходов к решению задач такого класса. В работах [1–4] авторы пошли по пути усложнения моделей местного смятия в зоне контакта. В [3–7] применялся подход, основанный на использовании волновых уравнений Уфлянда–Миндлина, описывающих динамическое поведение пластинки, которые позволяют предполагать, что деформация материала мишени вне области контакта происходит за счет распространения с конечной скоростью нестационарной волны поперечного сдвига. Для описания основных неизвестных динамического контакта в [6] использовалось их разложение в ряд по функциям Бесселя. Степенные ряды по поверхностной координате и времени для искомых величин использованы в работах [3–5, 7]. В [4, 5] использованы одночленные лучевые разложения, которыми описывались динамические характеристики до окончания процесса взаимодействия. В работе [7] волновой подход обобщен на мишень в виде термоупругой ортотропной пластинки, обладающей криволинейной анизотропией. Усложненная модель мишени в виде многослойной пластинки из композиционных материалов рассматривалась в [8], где исследовано влияние толщин различных слоев на конечные характеристики динамического контакта.

Возрастающие потребности инженерной практики обуславливают усложнение моделей соударяемых тел и моделей деформирования ударника и мишени, в которых учитываются волновые процессы в контактирующих телах.

В данной работе реализуется подход, основанный на представлении искомых функций в виде одночленного лучевого разложения. Цель исследования — изучение влияния свойств ударника и мишени на динамическую контактную силу и сравнение с результатами, полученными при использовании других методов.

**Постановка задачи.** Упругий ударник, представляющий собой груз массой  $m$  и соединенный с ним упругий цилиндрический буфер, падает перпендикулярно со скоростью  $V_0$  в центр круглой пластинки толщиной  $h$  (рис. 1). После касания ударником пластинки в ней образуется контактная область радиусом  $r_0$ , размеры которой определяются размерами свободного конца ударяющего по ней буфера. Предполагается, что буфер не теряет устойчивости в процессе взаимодействия, а отраженные от краев пластинки волны не успевают вернуться к границам контактной области до окончания процесса взаимодействия, т.е. рассматриваемая пластинка является достаточно протяженной.

Движение ударника и движение контактной области пластинки после начала взаимодействия описываются уравнениями

$$m(\ddot{\alpha} + \ddot{w}) = -P(t), \quad \rho h \pi r_0^2 \ddot{w} = 2\pi r_0 Q_r|_{r=r_0} + P(t), \quad (1)$$

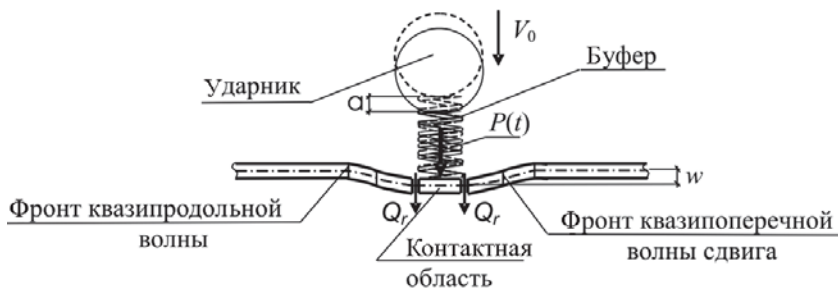
где  $\alpha$  — сжатие упругого элемента при ударе;  $w$  — прогиб пластинки;  $\rho$  — плотность материала пластинки;  $P(t)$  — контактная сила;  $h$  — толщина пластинки;  $Q_r$  — перерезывающая погонная сила на границе контактной области.

Контактная сила для упругого ударника имеет вид [9]

$$P(t) = E_1(\alpha - w), \quad (2)$$

где  $E_1$  — модуль упругости буфера.

**Метод решения.** Вне контактной области за фронтом волновой поверхности искомая функция представляется в виде лучевого ряда



**Рис. 1.** Схема динамического контакта тела и пластинки посредством буфера

по координате и времени [3–5]:

$$Z(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}]_{t=r/G} \left( t - \frac{r-r_0}{G} \right)^k H \left( t - \frac{r-r_0}{G} \right), \quad (3)$$

где  $[Z_{,(k)}] = [\partial^k Z / \partial t^k]$  – скачки производных  $k$ -го порядка по времени  $t$  от искомой функции  $Z$  на волновой поверхности  $\Sigma$ , при  $t = (r - r_0)/G$ ;  $r_0$  – начальный радиус;  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда;  $G$  – нормальная скорость распространения фронта волны.

Уравнения, описывающие динамическое поведение упругой изотропной пластинки в полярной системе координат с учетом инерции вращения нормали к срединной плоскости и деформации поперечно-го сдвига, имеют вид [6]

$$\frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + Q_r = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_r; \quad \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} = \rho h \dot{W}; \quad (4)$$

$$\dot{M}_r = D \left( \frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r} + \sigma \frac{\dot{\beta}_r}{r} \right); \quad \dot{M}_\varphi = D \left( \frac{\dot{\beta}_r}{r} + \sigma \frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r} \right); \quad (5)$$

$$\dot{Q}_r = K \mu h \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \dot{\beta}_r \right),$$

где  $r$  и  $\varphi$  – полярные радиус и угол;  $M_r$  и  $M_\varphi$  – изгибающие моменты;  $Q_r$  – перерезывающая сила;  $\beta_r$  – угловая скорость вращения нормали к срединной поверхности пластинки в направлении  $r$ ;  $W = \dot{w}$  – скорость прогиба;  $K = \pi^2/12$ ;  $\mu$  – модуль сдвига;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона;  $D = E(1 - \sigma^2)^{-1} h^3/12$ ;  $t$  – время; точка над величинами означает производную по времени.

Для определения переменных коэффициентов  $[Z_{,(k)}]$  необходимо записать уравнения движения точек пластинки (4), (5) в скачках и использовать условие совместности для перехода от производных по поверхностной координате к производным по времени на волновой поверхности, после чего определяются скорость сдвиговой волны и динамическое условие совместности для перерезывающей силы и скорости прогиба [5]:

$$G = \sqrt{K\mu/\rho}, \quad Q_r = -\rho GhW. \quad (6)$$

Подставляя в уравнения (1) выражения (2) и (6), получаем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно  $\alpha$  и  $w$ :

$$m \left( \ddot{\alpha} + \dot{W} \right) = -E_1 (\alpha - w); \quad (7)$$

$$\rho h \pi r_0^2 \dot{W} = -\frac{2\pi r_0 K \mu h W}{G} + E_1 (\alpha - w).$$

Используя преобразование Лапласа, запишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} mp^2(\bar{\alpha} + \bar{w}) &= -E_1(\bar{\alpha} - \bar{w}) + mV_0; \\ \rho h \pi r_0^2 p^2 \bar{w} &= -\frac{2\pi r_0 K \mu h p}{G} \bar{w} + E_1(\bar{\alpha} - \bar{w}). \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{w}$  — неизвестные, выражающие в пространстве изображений перемещения верхнего и нижнего концов буфера соответственно;  $p$  — параметр преобразования.

Решая эту систему, получаем выражения

$$\bar{w} = -\bar{\alpha} \frac{p^2 + \frac{E_1}{m}}{p^2 - \frac{E_1}{m}} + \frac{V_0}{p^2 - \frac{E_1}{m}}; \quad (9)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{(p^2 + B_0 p + A_0) V_0}{p \left( p^3 + B_0 p^2 + C_0 p + \frac{E_1}{m} B_0 \right)}, \quad (10)$$

где  $\chi = 1/\tau_1$ ;  $A_0 = \frac{E_1}{\rho h \pi r_0^2}$ ;  $B_0 = \frac{2G^{(2)}}{r_0}$ ;  $C_0 = E_1 \left( \frac{2}{\rho h \pi r_0^2} + \frac{1}{m} \right)$ .

Для обратного перехода в пространство оригиналов необходимо разложить выражения (9) и (10) на простые дроби. Для этого нужно решить характеристическое уравнение

$$p^3 + B_0 p^2 + C_0 p + \frac{E_1}{m} B_0 = 0, \quad (11)$$

которое может иметь два комплексно сопряженных и один действительный корень или три действительных корня.

Если уравнение (11) имеет действительные корни  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ , то выражение для  $\bar{\alpha}$  имеет вид

$$\bar{\alpha} = \frac{A_1}{p - a_{11}} + \frac{B_1}{p - a_{12}} + \frac{C_1}{p - a_{13}} + \frac{D_1}{p}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{V_0(a_{11}^2 + B_0 a_{11} + A_0)}{(a_{11} - a_{12})(a_{11} - a_{13})a_{11}}; & B_1 &= \frac{V_0(a_{12}^2 + B_0 a_{12} + A_0)}{(a_{12} - a_{11})(a_{12} - a_{13})a_{12}}; \\ C_1 &= \frac{V_0(a_{13}^2 + B_0 a_{13} + A_0)}{(a_{13} - a_{11})(a_{13} - a_{12})a_{13}}; & D_1 &= -\frac{A_0 V_0}{a_{11} a_{12} a_{13}}. \end{aligned}$$

Выражение для  $\alpha$  в пространстве оригиналов запишем как

$$\alpha = A_1 \exp(a_{11}t) + B_1 \exp(a_{12}t) + C_1 \exp(a_{13}t) + D_1. \quad (13)$$

Если уравнение (11) имеет один действительный корень  $a_{16}$  и два

комплексно сопряженных  $a_{14}, a_{15}$ , то

$$\bar{\alpha} = \frac{A_2 p + B_2}{p^2 + a' p + b'} + \frac{C_2}{p - a_{16}} + \frac{D_2}{p}, \quad (14)$$

где

$$A_2 = \frac{V_0 (a_{14}^2 + B_0 a_{14} + A_0)}{(a_{14} - a_{15}) (a_{14} - a_{16}) a_{14}} - \frac{V_0 (a_{15}^2 + B_0 a_{15} + A_0)}{(a_{14} - a_{15}) (a_{15} - a_{16}) a_{15}};$$

$$B_2 = \frac{V_0 (a_{14}^2 + B_0 a_{14} + A_0)}{(a_{14} - a_{16}) a_{14}} - a_{14} A_2; \quad C_2 = \frac{V_0 (a_{16}^2 + B_0 a_{16} + A_0)}{(a_{16}^2 + a' a_{16} + b') a_{16}},$$

$$D_2 = -\frac{A_0 V_0}{b' a_{16}}; \quad a' = (B_0 + a_{16}); \quad b' = [C_0 + a_{16} a'].$$

Выражение для  $\alpha$  в пространстве оригиналов примет вид

$$\alpha = \exp(-1/2 a' t) \left\{ \xi'^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2} \xi'^{1/2} t\right) [2B_2 - a' A_2] + \right.$$

$$\left. + A_2 \cos\left(\frac{1}{2} \xi'^{1/2} t\right) \right\} + C_2 \exp(a_{16} t) + D_2, \quad (15)$$

где  $\xi' = 4b' - a'^2$ .

При действительных корнях (11) функция  $\bar{w}$  представляется как

$$\bar{w} = \frac{A_3}{p - a_{11}} + \frac{B_3}{p - a_{12}} + \frac{C_3}{p - a_{13}} + \frac{D_3}{p} + \frac{2mV_0}{mp^2 - E_1}, \quad (16)$$

где

$$A_3 = \frac{V_0 (ma_{11}^2 + E_1) (a_{11}^2 + A_0 + B_0 a_{11})}{(a_{11} - a_{12}) (a_{11} - a_{13}) a_{11} (ma_{11}^2 - E_1)};$$

$$B_3 = \frac{V_0 (ma_{12}^2 + E_1) (a_{12}^2 + A_0 + B_0 a_{12})}{(a_{12} - a_{11}) (a_{12} - a_{13}) a_{12} (ma_{12}^2 - E_1)};$$

$$C_3 = \frac{V_0 (ma_{13}^2 + E_1) (a_{13}^2 + A_0 + B_0 a_{13})}{(a_{13} - a_{11}) (a_{13} - a_{12}) a_{13} (ma_{13}^2 - E_1)}; \quad D_3 = \frac{A_0 V_0}{a_{11} a_{12} a_{13}}.$$

Переходя к пространству оригиналов, получаем

$$w = A_3 \exp(a_{11} t) + B_3 \exp(a_{12} t) + C_3 \exp(a_{13} t) +$$

$$+ D_3 + 2m \left(\frac{E_1}{m}\right)^{-1/2} V_0 \operatorname{sh} \left( \left(\frac{E_1}{m}\right)^{1/2} t \right). \quad (17)$$

В случае двух комплексно сопряженных корней характеристического уравнения выражение (9) примет вид

$$\bar{w} = \frac{A_4 p + B_4}{p^2 + ap + b} + \frac{C_4}{p - a_{16}} + \frac{D_4}{p} + \frac{2mV_0}{mp^2 - E_1}, \quad (18)$$

где

$$A_4 = \frac{V_0 (ma_{14}^2 + E_1) (a_{14}^2 + A_0 + B_0 a_{14})}{(a_{14} - a_{15}) (a_{14} - a_{16}) a_{14} (ma_{14}^2 - E_1)} - \frac{V_0 (ma_{15}^2 + E_1) (a_{15}^2 + A_0 + B_0 a_{15})}{(a_{15} - a_{14}) (a_{15} - a_{16}) a_{15} (ma_{15}^2 - E_1)};$$

$$B_4 = \frac{V_0 (ma_{14}^2 + E_1) (a_{14}^2 + A_0 + B_0 a_{14})}{(a_{14} - a_{16}) a_{14} (ma_{14}^2 - E_1)} - A_4 a_{14};$$

$$C_4 = \frac{V_0 (ma_{16}^2 + E_1) (a_{16}^2 + A_0 + B_0 a_{16})}{(a_{16}^2 + a' a_{16} + b') a_{16} (ma_{16}^2 - E_1)}; \quad D_4 = \frac{A_1 V_0}{b' a_{16}}.$$

Совершая обратное преобразование Лапласа, находим

$$w = \exp(-a't/2) \times$$

$$\times \left\{ \xi'^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi'^{1/2}t\right) [2B_4 - a'A_4] + A_4 \cos\left(\frac{1}{2}\xi'^{1/2}t\right) \right\} +$$

$$+ C_4 \exp(a_{16}t) + D_4 + 2mC_0^{-1/2}V_0 \operatorname{sh}\left(C_0^{1/2}t\right). \quad (19)$$

После подстановки величин  $w$  и  $\alpha$  в (2) можно получить выражение для контактной силы  $P(t)$ . В случае действительных корней уравнения (11) она может быть представлена в виде

$$P(t) = E_1 \left[ (A_1 - A_3) \exp(a_{11}t) + \right.$$

$$+ (B_1 - B_3) \exp(a_{12}t) + (C_1 - C_3) \exp(a_{13}t) +$$

$$\left. + (D_1 - D_3) - 2m(E_1/m)^{-1/2} V_0 \operatorname{sh}\left((E_1/m)^{1/2}t\right) \right]. \quad (20)$$

При наличии комплексно сопряженных корней (11) получим

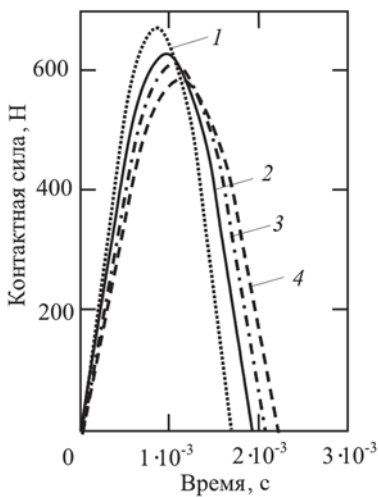
$$P(t) =$$

$$= E_1 \left[ \exp(-a't/2) \left\{ \xi'^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi'^{1/2}t\right) [2(B_2 - B_4) + a'(A_2 - A_4)] - \right. \right.$$

$$\left. - (A_4 - A_2) \cos\left(\frac{1}{2}\xi'^{1/2}t\right) \right\} + (C_2 - C_4) \exp(a_{16}t) + (D_2 - D_4) -$$

$$\left. - 2m(E_1/m)^{-1/2} V_0 \operatorname{sh}\left((E_1/m)^{1/2}t\right) \right]. \quad (21)$$

В работе [5] задача об ударе шаром по пластинке была решена без учета инерции контактной области ( $\rho = 0$ ), что связано со значительными трудностями при решении полного интегро-дифференциального



**Рис. 2.** Зависимость контактной силы от времени для разных подходов к описанию процесса взаимодействия

ем зависимость контактной силы от свойств ударника и мишени. Параметры взаимодействия приняты следующими:  $m = 10$  г,  $h = 13$  мм,  $V_0 = 10$  м/с,  $E_1 = 250$  кН/м. С использованием соотношений (20) и (21) на рис. 2 построены зависимости контактной силы от времени: кривая 1 построена по результатам работы [9] без учета волновых процессов в плите; кривая 2 соответствует подходу, примененному в данной работе; кривая 3 получена по результатам работы [7], где неизвестные величины были представлены в виде многочленных лучевых разложений и при этом использовалось дополнительное граничное условие на границе области контакта; кривая 4 получена без учета инерции контактной области при прогибе. Из рис. 2 следует, что учет волновых явлений приводит к снижению максимального значения контактной силы по сравнению с силой, полученной при использовании неволнового уравнения колебаний плиты; без учета инерции контактной области контактная сила уменьшается на 8%, что может считаться существенной величиной при решении практических задач. На рис. 3 приведены зависимости контактной силы от времени для разных материалов мишени; видно уменьшение максимальной контактной силы и увеличение времени взаимодействия для материала с меньшим модулем сдвига. На рис. 4 показана зависимость максимальной контактной силы от толщины стальной и алюминиевой пластинок и начальной скорости удара. Из рис. 4 следует, что значение максимальной контактной силы увеличивается с увеличением начальной скорости удара и толщины мишени. Можно также отметить, что при одинаковых значениях начальной скорости удара и толщины пластинки максимум

уравнения, полученного из системы (1). Для определения вклада инерции контактного пятна в конечные динамические характеристики рассмотрим частный случай решенной задачи при  $\rho = 0$ .

Характеристическое уравнение (11) преобразуется в следующее:

$$p^2 + 2C'_0 p + E_1 m^{-1} = 0, \quad (22)$$

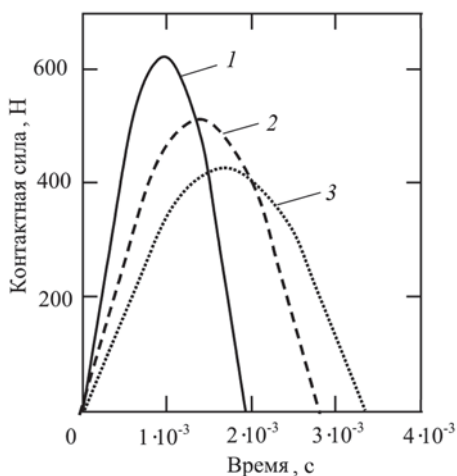
где  $C'_0 = \frac{E_1}{MB_0}$ .

Корни этого уравнения

$$a_{19,20} = -C'_0 \pm \sqrt{(C'_0)^2 - E_1/m}. \quad (23)$$

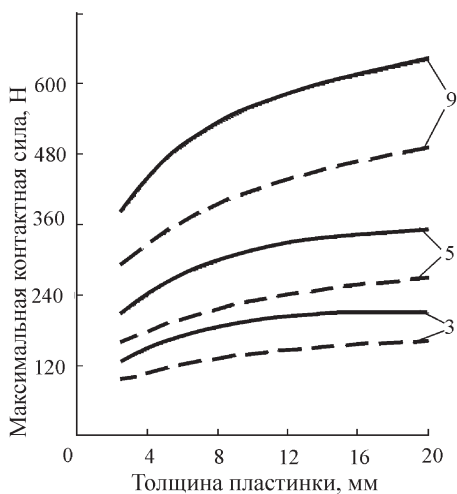
Выражения для динамического прогиба, контактной силы получаются из выражений (12)–(21) при  $\rho = 0$ .

**Численные исследования.** Исследу-



**Рис. 3. Зависимость контактной силы от времени для различных материалов мишени:**

1 — сталь; 2 — медь; 3 — алюминий



**Рис. 4. Зависимость максимальной контактной силы от безразмерной толщины пластинки для различных значений начальной скорости удара, м/с (цифры у кривых):**

сплошные кривые соответствуют стальной пластине, штриховые — алюминиевой

контактной силы для мишени, выполненной из стали, больше максимального значения контактной силы для мишени из алюминия, что также подтверждает выводы, сделанные из анализа графических зависимостей рис. 3.

**Выводы.** 1. Учет волновых процессов уменьшает максимальное значение контактной силы. 2. Необходимо учитывать инерционный член в уравнении движения контактной области в задачах, в которых погрешность не должна превышать 8%. 3. При увеличении модуля сдвига контактная сила увеличивается, а время контакта уменьшается. 4. При увеличении толщины мишени и скорости удара максимальная контактная сила увеличивается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Phillips J. W., Calvit H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate // Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34, № 4. – P. 873–878.
2. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении – М.: Машиностроение, 1986. – 362 с.
3. Россихин Ю. А., Шитикова М. В., Локтев А. А. Удар шара о нелинейно упругий буфер, установленный на плите перекрытия // Изв. вузов. Строительство. – 2004. – № 11. – С. 16–22.
4. Локтев А. А. Уругопластическая модель взаимодействия цилиндрического ударника и пластинки // Письма в журнал технической физики. – 2007. – Т. 33, вып. 16. – С. 72–77.



5. R o s s i k h i n Y u. A., S h i t i k o v a M. V. A ray method of solving problems connected with a shock interaction // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 102, nos. 1–4. – P. 103–121.
6. Ф и л и п п о в А. П. Поперечный упругий удар тяжелым телом по круглой плите // Механика твердого тела. – 1971. – № 6. – С. 102–109.
7. Л о к т е в А. А. Динамический контакт ударника и упругой ортотропной пластинки при наличии распространяющихся термоупругих волн // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, вып. 4. – С. 652–658.
8. S h e n P., X i o n g J., S h e n Z. Thickness effect on the contact behavior of a composite laminate indented by a rigid sphere // Mechanics of Materials. – 2008. – V. 40. – P. 183–194.
9. S o n w a y H. D., L e e H. C. Impact of an indenter on a large plate // Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1970. – Vol. 37, no. 1. – P. 234–235.

Статья поступила в редакцию 18.11.2009

Алексей Алексеевич Локтев окончил Воронежский государственный архитектурно-строительный университет в 2001 г. Канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой Московской финансово-юридической академии. Автор около 60 научных работ в области механики контактного взаимодействия, теории упругости, волновых процессов в твердых телах, математического моделирования в механике и информационных технологий.

A.A. Loktev graduated from the Voronezh State University for Architecture and Civil Engineering in 2001. Ph. D. (Phys.-Math.), head of department of the Moscow Academy of Finance and Law. Author of about 60 publications in the field of mechanics of contact interaction, theory of elasticity, wave processes in solid bodies, mathematical simulation in mechanics and information technologies.

Даниил Алексеевич Локтев — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор семи научных работ в области механики контактного взаимодействия, теории упругости, волновых процессов в телах, вычислительной техники и информатики.

D.A. Loktev — student of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 7 publications in the field of mechanics of contact interaction, theory of elasticity, wave processes in bodies, computing hardware and information technologies.