

**ПРИЧИННЫЙ АНАЛИЗ КВАНТОВЫХ  
ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ. Ч. 1**

*Предложено квантовое обобщение метода причинного анализа, ранее использовавшегося только для классических переменных. Выполнены расчеты параметров причинности для серии примеров двухкубитных запутанных состояний. Результаты составяются с согласованностью и степенью смешанности состояний.*

**E-mail:** korotaev@igemi.troitsk.ru;  
riot\_ek@mail.ru

**Ключевые слова:** квантовая информация, причинность, запутанные состояния.

**1. Введение.** Несмотря на то что принцип причинности повсеместно используется в физике, он обычно не означает ничего более, кроме как запаздывание следствия относительно причины воздействия. Однако запаздывание является необходимым, но не достаточным условием причинной связи (“Post hoc non est propter hoc”). Сами понятия причины и следствия остаются обычно формально не определенными. Между тем в простых ситуациях мы легко отличаем причину от следствия, подразумевая, но не измеряя запаздывание (например, без всякого измерения запаздывания очевидно причинно-следственное отношение токов в цепях лампы и фотоэлемента). В сложных ситуациях, в системах с обратными связями, обычное интуитивное понимание причинности может вести к недоразумениям и ошибкам и очевидно, что желательна его формализация. Тот факт, что в простых ситуациях положение причин и следствий очевидно без измерения запаздывания, говорит о том, что сами эти понятия асимметричны. Задача заключается в том, чтобы определить эту асимметрию формально и не прибегая к временному соотношению, которое должно быть введено после определения как аксиома. Из решения этой задачи [1], первоначально мотивированного формализацией идей причинной механики [2], развился метод причинного анализа, оказавшийся полезным в большом круге приложений (см. например, работы [3–17]). Метод дал формальное определение и количественную меру причинности для классических переменных, что оказалось плодотворным в построении моделей сложных систем с обратными связями по экспериментальным данным, а также в оценке влияния помехообразующих факторов в реальных открытых системах.

Настоящая работа посвящена развитию аналогичного подхода в квантовой механике, где решение подобных задач представляется не

менее актуальным. Особо это касается явления квантовой нелокальности, которое с момента своего открытия привлекает к себе внимание именно необычностью квантовых корреляций с точки зрения принципа причинности. Считается, что квантовые корреляции осуществляются мгновенно, но, поскольку нелокальный канал при коммуникации должен быть обязательно дополнен классическим, нарушение причинности экспериментально неverifiedируемо. Применение причинного анализа должно дать возможность изучить эту ситуацию строгим и достаточно универсальным образом. Наконец, применение причинного анализа актуально для решения конкретных вопросов физики квантовой информации (наиболее четко сформулированных в работе [18]), касающихся особенностей поведения асимметричных запутанных состояний.

В разделе 2 настоящей работы дается краткий обзор сути формализма классического причинного анализа, в разделе 3 рассматривается обобщение причинного анализа на квантовые переменные. В разделе 4 на ряде примеров демонстрируется применение метода к симметричным состояниям, где причинность отсутствует, но, тем не менее, могут быть получены количественные характеристики смешанных состояний. Раздел 5 посвящен анализу примеров асимметричных смешанных состояний нарастающей сложности, начиная от чисто иллюстративного получения меры причинности и кончая нетривиальными выводами о характере причинной связи в зависимости от внешнего магнитного поля и температуры. Общие результаты суммируются в разделе 6.

**2. Классический причинный анализ.** Рассмотрим классические переменные  $A$  и  $B$ , характеризующие соответствующие подсистемы двухсоставной системы  $AB$ , их шенноновские безусловные и условные энтропии:

$$S(A) = - \sum_{j=1}^J P(A_j) \log_2 P(A_j); \quad (1)$$

$$S(B) = - \sum_{k=1}^K P(B_k) \log_2 P(B_k);$$

$$S(A|B) = - \sum_{k=1}^K P(B_k) \sum_{j=1}^J P(A_j|B_k) \log_2 P(A_j|B_k); \quad (2)$$

$$S(B|A) = - \sum_{j=1}^J P(A_j) \sum_{k=1}^K P(B_k|A_j) \log_2 P(B_k|A_j),$$

где  $P(A_j)$ ,  $P(B_k)$  — вероятности  $j$ -го ( $k$ -го) уровня  $A$  и  $B$  соответственно;  $P(A_j|B_k)$ ,  $P(B_k|A_j)$  — соответствующие условные вероят-

ности. Определим безусловную ( $\alpha$ ) и условную ( $\beta$ ) асимметрии

$$\alpha = \frac{S(B)}{S(A)}, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty; \quad \beta = \frac{S(B|A)}{S(A|B)}, \quad 0 \leq \beta \leq \infty, \quad (3)$$

и функции независимости

$$i_{B|A} = \frac{S(B|A)}{S(B)}, \quad i_{A|B} = \frac{S(A|B)}{S(A)}, \quad 0 \leq i \leq 1. \quad (4)$$

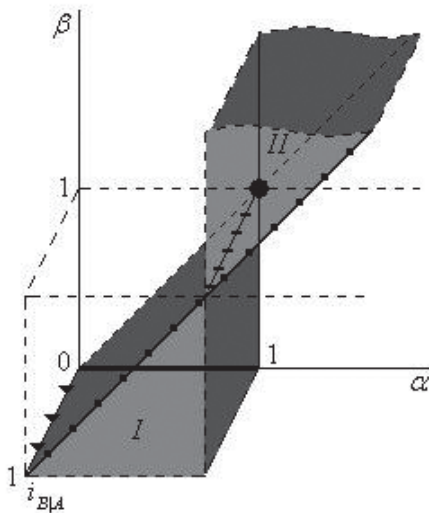
Смысл функций независимости достаточно прозрачен: при  $i_{B|A} = 1$   $B$  не зависит от  $A$ , при  $i_{B|A} = 0$   $B$  является однозначной функцией  $A$ . Другими словами, величины  $1 - i$  определяют односторонние зависимости переменных. Прямая и обратная независимости обязаны совпадать только в предельном случае, а именно,  $i_{B|A} = 1 \Leftrightarrow i_{A|B} = 1$ .

Далее введем функцию причинности  $\gamma$ , описываемую формулой

$$\gamma = \frac{i_{B|A}}{i_{A|B}}, \quad 0 \leq \gamma \leq \infty. \quad (5)$$

Смысл названия легко пояснить реперными значениями  $\gamma$ : при  $\gamma = 0$   $B$  является однозначной функцией  $A$ , но не наоборот. Можно толковать это как предельно необратимый процесс  $A \Rightarrow B$ . При  $\gamma = 1$   $A$  и  $B$  в одинаковой степени зависят друг от друга, что естественно отождествить с отсутствием причинности. При  $\gamma = \infty$   $A$  является однозначной функцией  $B$ , но не наоборот. Можно толковать это как предельно необратимый процесс  $B \Rightarrow A$ .

Рассмотрим пространство параметров  $\alpha, \beta, i_{B|A}$  ( $\gamma = \beta/\alpha$  эквивалентно (5)), изображенное на рис. 1. В этом пространстве можно



**Рис. 1. Классическая энтропийная диаграмма:**

$I$  — нормальная причинность;  $II$  — обращенная причинность;  $\blacktriangleleft$  — линия  $B = \text{const}$ ; — — — линия однозначных функций;  $\blacksquare$  — линия независимости; - - - адиабата;  $\bullet$  — взаимно-однозначная точка

получить классификацию любых типов взаимосвязи  $A$  и  $B$ , каждая зависимость изображается точкой. Анализируя предельные случаи и используя обратимость информации, имеем

$$I = S(B) - S(B|A) = S(A) - S(A|B), \quad (6)$$

Легко доказать, что запрещенными являются: 1) область  $\alpha < 1, \gamma \geq 1$ ; 2) область  $\alpha > 1, \gamma \leq 1$ ; 3) плоскость  $\beta = 1$ , за исключением линии пересечения с плоскостью  $\alpha = 1$ ; 4) плоскость  $\alpha = 1$ , за исключением линии пересечения с плоскостью  $\beta = 1$  и линии пересечения с плоскостью  $i_{B|A} = 0$ ; 5) плоскость  $\beta = 0$ , за исключением отрезка оси  $\alpha [0, 1]$  и оси  $i_{B|A}$ ; 6) плоскость  $\alpha = 0$ , за исключением оси  $i_{B|A}$ ; 7) плоскость  $i_{B|A} = 0$ , за исключением линии  $\alpha = 1$  и отрезка оси  $\alpha [0, 1]$ ; 8) плоскость  $i_{B|A} = 1$ , за исключением линии  $\gamma = 1$ ; 9) плоскость  $\gamma = 1$ , за исключением оси  $i_{B|A}$ , линии  $i_{B|A} = 1$  и линии  $\alpha = \beta = 1$ .

В разрешенном пространстве можно выделить, исходя из смысла параметров, следующие области:

- область нормальной причинности  $\gamma < 1, \beta < 1, \alpha < 1$ ;
- область обращенной причинности  $\gamma > 1, \beta > 1, \alpha > 1$ ;
- линия  $B$ -констант:  $B = \text{const}$  независимо от  $A$ ;
- линия однозначных функций:  $i_{B|A} = 0, \beta = 0, 0 < \alpha < 1$ . Здесь  $S(B|A) = 0$ , т.е.  $B$  полностью определяется  $A$ , но не наоборот;
- линия независимости  $i_{B|A} = 1, \gamma = 1$ ;
- взаимно-однозначная точка  $i_{B|A} = 0, \alpha = \beta = 1$ . Здесь  $S(B|A) = S(A|B) = 0$ ;
- адиабата  $\alpha = \beta = 1$ , что соответствует изоэнтропийному процессу.

Этого достаточно для формального определения причинности.

**Определение 1.** Причиной  $A$  и следствием  $B$  называются переменные, для которых  $\gamma < 1$ .

Анализируя смысл величины  $\gamma$ , нетрудно увидеть, что это определение включает обычное интуитивное понимание причинности (по крайней мере, имея в виду интуицию физика). В самом деле, если мы говорим, что  $A$  — причина, а  $B$  — следствие, то подразумеваем полностью или частично детерминированную зависимость  $B$  от  $A$ , при которой обратная зависимость отсутствует. Это определение позволяет уточнить, что обратная зависимость меньше прямой, и насколько именно (полное отсутствие обратной зависимости при конечной прямой невозможно). Известны также функциональные и статистические зависимости, не являющиеся причинными. Мы четко фиксируем этот класс:  $\gamma = 1$ . Если, изучив статистику произвольно обозначенных переменных  $A$  и  $B$ , мы нашли  $\gamma > 1$ , это просто означает, что  $B$

является причиной,  $A$  — следствием. Кроме полной формальности наше определение имеет очевидное преимущество количественной меры перед общеупотребительной качественной. На теоретических и многочисленных экспериментальных примерах классических задач (см., например, [3–12]) было показано, что такое формальное определение причинности не противоречит ее интуитивному пониманию в простых ситуациях и может быть использовано в сложных.

Далее аксиоматически вводится требование запаздывания  $\tau$  реакции следствия на причину:

$$\gamma < 1 \Rightarrow \tau > 0, \quad \gamma > 1 \Rightarrow \tau < 0, \quad \gamma \rightarrow 1 \Rightarrow \tau \rightarrow 0. \quad (7)$$

Эта аксиома является принципом сильной (локальной) причинности, впервые вербально сформулированным Крамером [19].

Отметим, что  $\gamma < 1 \Rightarrow \alpha < 1, \gamma > 1 \Rightarrow \alpha > 1$  (обратное неверно, поэтому  $\alpha$  не может использоваться для определения причинности). Это необходимое условие является отображением 7-й теоремы Шеннона [20] об убывании энтропий (1) от входа канала  $A(B)$  к его выходу  $B(A)$ .

Рассмотрим элементарное причинно-следственное звено с причиной  $A$  и следствием  $B$  с точки зрения обмена информацией. Согласно теореме о пропускной способности канала при наличии шумов, верхний предел скорости приема информации в  $B$  от  $A$

$$\sup v_{A \rightarrow B} = \frac{1}{\delta t} \frac{S(B) - S(B|A)}{S(B)}, \quad (8)$$

где  $\delta t$  — длительность элементарного сигнала, числитель максимизируется варьированием распределений  $A$ . Заменяя (8) нижним пределом времени и используя (4), имеем

$$\inf t_{A \rightarrow B} = \frac{\delta t}{1 - i_{B|A}}. \quad (9)$$

Аналогично для обратного перехода

$$\inf t_{B \rightarrow A} = \frac{\delta t}{1 - i_{A|B}}. \quad (10)$$

По условию  $\gamma < 1 \Leftrightarrow 1 - i_{B|A} > 1 - i_{A|B} \Leftrightarrow t_{A \rightarrow B} < t_{B \rightarrow A}$ . Конечная разность (10) и (9) означает, что в любой промежуток времени следствие получает от причины больше информации, чем причина от следствия. Информационный избыток в следствии означает необратимость потока информации. Тогда время получения информационного избытка

$$\Delta t = \delta t \left( \frac{1}{1 - i_{A|B}} - \frac{1}{1 - i_{B|A}} \right). \quad (11)$$

Считая, что подсистемы  $A$  и  $B$  разделены некоторым конечным эффективным расстоянием  $\Delta r$ , можно определить линейную скорость необратимого потока информации  $c_2 = \Delta r / \Delta t$  (обозначение следует работе [2], где впервые, хотя и в менее строгих терминах, вводился псевдоскалаляр хода времени того же смысла):

$$c_2 = k \frac{(1 - i_{A|B})(1 - i_{B|A})}{i_{A|B} - i_{B|A}} = k \frac{(1 - i_{B|A}/\gamma)(1 - i_{B|A})}{i_{B|A}(1/\gamma - 1)}, \quad (12)$$

где  $k = \Delta r / \delta t$ . Легко видеть, что знак  $c_2$  взаимно-однозначно связан с величиной  $\gamma$  относительно 1:

$$\gamma < 1 \Leftrightarrow c_2 > 0, \quad \gamma > 1 \Leftrightarrow c_2 < 0, \quad \gamma \rightarrow 1 \Leftrightarrow c_2 \rightarrow \pm\infty, \quad (13)$$

поэтому можно определить причину и следствие и ввести аксиому, подобную (7) в терминах  $c_2$ . Для классического случая обе формулировки полностью эквивалентны.

Аппарат причинного анализа далее был обобщен на причинную сеть в многосоставной системе [7] и проанализировано влияние на все параметры  $(\alpha, \beta, i_{B|A}, i_{A|B}, \gamma)$  различных видов помехообразующего воздействия со стороны неконтролируемого окружения, возможностей иных определений классической энтропии, отличных от шенноновского, и расслоенных пространств определения вероятностей [12]. Метод был тестирован на задачах классической электродинамики [3–6] и на данных разнообразных классических экспериментов (см., например, [4–12]).

**3. Квантовый причинный анализ.** Для квантовых переменных используется энтропия фон Неймана. Вместо (1) и (2) имеем:

$$S(A) = -\text{Tr} \rho_A \log_2 \rho_A; \quad S(B) = -\text{Tr} \rho_B \log_2 \rho_B; \quad (14)$$

$$S(B|A) = S(AB) - S(A); \quad S(A|B) = S(AB) - S(B), \quad (15)$$

где  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ ;  $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ ;  $S(AB) = -\text{Tr} \rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}$ . Отметим, что, хотя условные энтропии могут быть, в принципе, непосредственно вычислены через условные плотности по аналогии с (2) [21], практически проще их вычислять косвенным образом согласно (15).

Для запутанных состояний условные энтропии могут быть отрицательны [21, 22]. Поэтому  $-\infty \leq \beta \leq \infty$ ,  $-1 \leq i \leq 1$ ,  $-\infty \leq \gamma \leq \infty$ . В частности, для двухсоставных чистых запутанных состояний из разложения Шмидта следует  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $i_{B|A} = i_{A|B} = -1$ . По сравнению с классическим случаем энтропийная диаграмма расширяется (рис. 2). К двум классическим разрешенным областям  $S$  добавляются четыре квантовых  $Q$ :

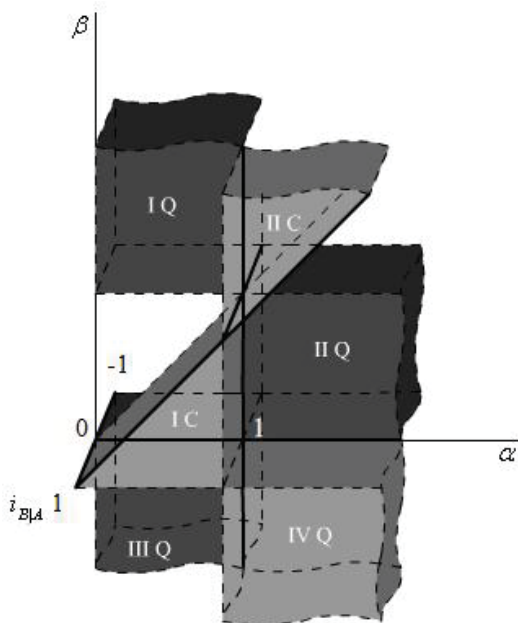


Рис. 2. Квантовая энтропийная диаграмма

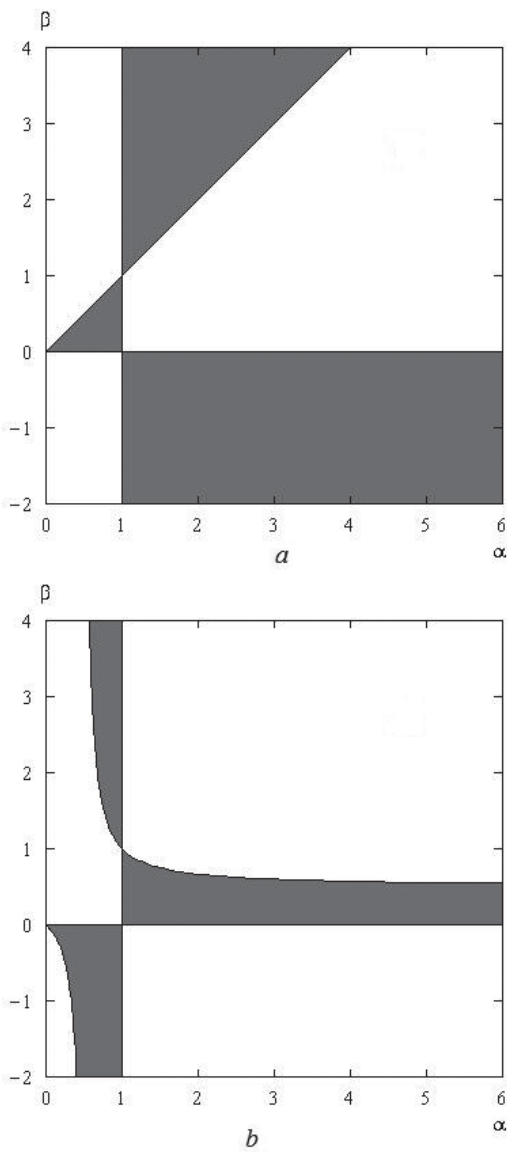
- IC,  $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq i_{B|A} \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1, c_2 > 0$ ;  
 PC,  $1 \leq \alpha \leq \infty, 1 \leq \beta \leq \infty, 0 \leq i_{B|A} \leq 1, 1 \leq \gamma \leq \infty, c_2 < 0$ ;  
 IQ,  $0 \leq \alpha \leq 1, 1 \leq \beta \leq \infty, -1 \leq i_{B|A} \leq 0, 1 \leq \gamma \leq \infty, c_2 > 0$ ;  
 PQ,  $1 \leq \alpha \leq \infty, 0 \leq \beta \leq 1, -1 \leq i_{B|A} \leq 0, 0 \leq \gamma \leq 1, c_2 < 0$ ;  
 IIIQ,  $0 \leq \alpha \leq 1, -\infty \leq \beta \leq 0, -1 \leq i_{B|A} \leq 0, -\infty \leq \gamma \leq 0, c_2 > 0$ ;  
 IVQ,  $1 \leq \alpha \leq \infty, -\infty \leq \beta \leq 0, 0 \leq i_{B|A} \leq 1, -\infty \leq \gamma \leq 0, c_2 < 0$ .

На трехмерной диаграмме рис. 2 трудно, однако, точно показать границы разрешенных областей. Для их указания воспользуемся тем, что (легко проверить) функцию независимости  $i_{B|A}$  можно представить в виде

$$i_{B|A} = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha(\beta - 1)}. \quad (16)$$

В областях IC, PC и IVQ  $0 \leq i_{B|A} \leq 1$ , что, согласно (16), приводит к системе двух неравенств относительно  $\alpha, \beta$ . Их решения в виде сечений  $i_{B|A} = \text{const}$  показаны на рис. 3, а. Разрешенные области примыкают к граничным плоскостям. В областях IQ, PQ и IIIQ  $-1 \leq i_{B|A} \leq 0$ . Решения соответствующей пары неравенств показаны на рис. 3, б. Разрешенные области отделены от части граничных плоскостей гиперболическими поверхностями.

На квантовом уровне величина  $\gamma$  недостаточна для различия причин и следствий. Но пользуясь соответствием  $c_2$  и  $\gamma$  в обеих классических областях и необходимым условием выполнения 7-й теоремы Шеннона во всех шести областях ( $c_2 > 0 \Rightarrow \alpha < 1, c_2 < 0 \Rightarrow \alpha > 1$ ),



**Рис. 3. Разрешенные области в сечениях  $i_{B|A} = \text{const}$ :**

$a$  – области IC, IIC и IVQ;  $b$  – области IQ, PIQ и IIIQ

можно дать определение причинности, пригодное для квантовых переменных.

**Определение 2.** Причиной  $A$  и следствием  $B$  называются подсистемы, для которых  $c_2 > 0$ .

Тогда принцип (сильной [19]) причинности, охватывающий локальные и нелокальные корреляции, может быть сформулирован так:

$$c_2 > 0 \Rightarrow \tau > 0, \quad c_2 < 0 \Rightarrow \tau < 0, \quad |c_2| \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow 0. \quad (17)$$

Отметим, что квантовые корреляции часто трактуются как мгновенные и не причинные. Рассматриваемый подход включает такую



трактовку, но только как частный случай. В силу параллелизма классической и квантовой теории информации [22] соотношения (8)–(12) остаются справедливыми. Дополнительный физический смысл им придает обоснованная в работе [23] интерпретация запутанности квантовой системы как ресурса, служащего передаче информации через нее. Показано [23], что отрицательная условная энтропия — это “количество информации, которое может быть передано через подсистемы 1 и 2 от системы, взаимодействующей с 1, к другой системе, взаимодействующей с 2. Передаточная среда есть квантовая запутанность между 1 и 2”. Причинность, характеризуемая величиной  $c_2$ , отражает асимметрию этого процесса (причинность тем более выражена, чем меньше  $|c_2|$ ).

Хотя определенный в (12) ход времени  $c_2$  с точностью до коэффициента  $k$  сам по себе представляет интерес, желательно показать путь его полного определения для естественных процессов. Для этого нельзя рассматривать  $\delta t$  только как длительность “элементарного сигнала”, что уместно только для технического канала. Поскольку  $\delta t$  в любом случае играет роль некоторого элементарного времени, естественно положить его [24] временем брахистохронной эволюции. В случае не зависящего от времени гамильтониана, это время легко выражается в явном виде:

$$\delta t = \frac{\hbar\theta}{2\omega}, \quad (18)$$

где  $2\omega$  — разность наибольшего и наименьшего собственных значений гамильтониана;  $\theta$  — длина геодезической (согласно метрике Фабини–Стади) линии, соединяющей начальное и конечное состояния, если они ортогональны, то  $\theta = \pi$ . В реалистичном гамильтониане  $\omega$  зависит от расстояния  $\Delta r$  и величина  $k$  становится полностью определенной. Так, легко показать [1], что при простом кулоновском взаимодействии  $k = e^2/\hbar$ , что соответствует оценке порядка величины  $c_2$ , полученной в [2] из полуклассических соображений.

В описываемой далее серии примеров, чтобы избежать усложнений, ограничимся расчетами  $c_2$  с точностью до  $k = 1$ . Только в последнем примере будет дана более полная оценка с учетом  $\delta t$ , которая является переменной, зависимой от собственных значений гамильтониана (оставляя  $\Delta r = 1$ ).

**4. Симметричные состояния.** Под симметричными двухсоставными состояниями мы понимаем состояния с равными энтропиями подсистем:  $S(A) = S(B)$ . В этом случае  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $|c_2| \rightarrow \infty$ ; причинность отсутствует (адиабатическая связь состояний). Однако величина  $i_{B|A} = i_{A|B}$  конечна и может быть сопоставлена с мерами

смешанности, характеризуемыми  $\text{Tr}\rho_{AB}^2$  или  $S(AB)$ , и со стандартной мерой запутанности — согласованностью  $C$  [25], равной

$$C = \max(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0), \quad (19)$$

где  $\lambda_i$  — собственное значение матрицы  $\rho\tilde{\rho}$ . Матрица перевернутых спинов  $\tilde{\rho}$  определяется как

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (20)$$

Ниже показано, что применение причинного анализа имеет смысл только для смешанных состояний. Вначале рассматриваются элементарные системы, когда смешанность возникает в результате вычленения двух подсистем из трехсоставного чистого состояния, затем — более содержательные ситуации, когда смешанность является результатом взаимодействия с неконтролируемым окружением. Поскольку такое взаимодействие ведет к декогеренции, анализ этих ситуаций начнем с основных механизмов декогеренции — деполяризации и дефазирования (диссипация, которая может вести к асимметрии, рассматривается в разделе 5.1). Затем рассматриваются типовые смешанные состояния в их исходном и асимптотическом виде (после длительной диссипации системы).

**4.1. Чистые состояния.** Энтропийная симметрия следует просто из разложения Шмидта. Рассматриваются произвольные чистые запутанные состояния

$$|\Phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad (21)$$

или

$$|\Psi\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle, \quad (22)$$

где  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Поскольку состояние чистое —  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = 1$ ,  $S(AB) = 0$ , согласованность  $C$  меняется в зависимости от соотношения  $\alpha$  и  $\beta$ . Но при любых отличных от нуля  $\alpha$  и  $\beta$  функция независимости постоянна:  $i_{B|A} = -1$ . Поэтому для чистых двухсоставных состояний причинный анализ не представляет интереса, поскольку он констатирует лишь их чистоту.

**4.2. Состояние Гринберга–Хорна–Цайлингера (ГХЦ).** Как известно, ГХЦ-состояние

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (23)$$

характерно тем, что несмотря на максимальную запутанность трех частиц ( $ABC$ ), парная запутанность ( $AB$ ) полностью отсутствует и  $C = 0$ . Двухчастичное состояние является смешанным:  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \frac{1}{2}$ ,  $S(AB) = 1$ . При этом  $i_{B|A} = 0$ . Запутанность отсутствует, но частицы  $A$  и  $B$  максимально классически коррелированы.

### 4.3. $W$ -состояние.

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (24)$$

Подобно ГХЦ-состоянию,  $W$ -состояние является запутанным трехчастичным состоянием, но парная запутанность  $C = \frac{2}{3}$  (более того, состояние (24) и вообще  $N$ -частичное  $W$ -состояние представляет собой случай попарной и равной запутанности всех  $N$  частиц [26]). Смешанность двухчастичной подсистемы несколько слабее, чем для ГХЦ-состояния:  $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = \frac{5}{9}$ ,  $S(AB) = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} \approx 0,918$ . Однако, как в случае ГХЦ-состояния,  $i_{B|A} = 0$ .

**4.4. Деполяризация.** Процесс деполяризации сводится к следующему преобразованию в матричных элементах [27, 28]:

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &\rightarrow (1-p)|0\rangle\langle 0| + p\frac{I}{2}; \\ |1\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 1| + p\frac{I}{2}; \\ |1\rangle\langle 0| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 0|; \\ |0\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|0\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $0 \leq p \leq 1$  — степень декогеренции. Возьмем в качестве исходного состояния синглет

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (26)$$

и положим, что деполяризации подвержена только вторая частица ( $B$ ). Деполяризованная плотность

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = &\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}|00\rangle\langle 00| + \left(1 - \frac{p}{2}\right)|01\rangle\langle 01| + \frac{p}{2}|11\rangle\langle 11| + \right. \\ &\left. \left(1 - \frac{p}{2}\right)|10\rangle\langle 10| - (1-p)|01\rangle\langle 10| - (1-p)|10\rangle\langle 01|\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Редуцированные плотности, несмотря на то что деполяризовалась только одна частица, равны, т.е. система симметрична:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \quad (28)$$

Находя собственные значения, получаем

$$S(AB) = -\frac{3p}{4}\log_2\frac{p}{4} - \left(1 - \frac{3p}{4}\right)\log_2\left(1 - \frac{3p}{4}\right); \quad (29)$$

$$S(A) = S(B) = 1. \quad (30)$$

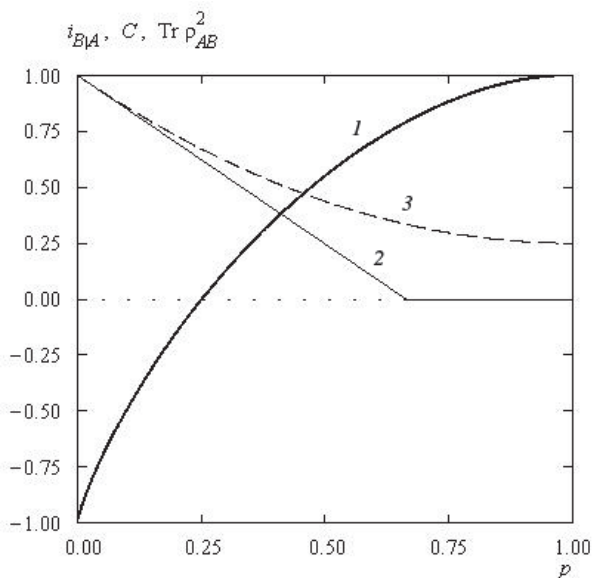


Рис. 4. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от степени деполяризации  $p$  состояния (26)

Функция независимости равна

$$i_{B|A} = S(AB) - 1, \quad (31)$$

согласованность

$$C = \max\left(1 - \frac{3p}{2}, 0\right). \quad (32)$$

На рис. 4 показана зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$ ,  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  от  $p$ . Видно, что в зависимости от степени декогеренции  $i_{B|A}$  меняется в полном диапазоне от  $-1$  при  $p = 0$  до  $+1$  при  $p = 1$  (полной деполяризации), когда корреляция подсистем полностью исчезает. Независимость увеличивается согласно увеличению смешанности в обеих мерах (для  $S(AB)$  — точно пропорционально) и уменьшению согласованности. Наиболее интересно, что имеется интервал  $\frac{1}{4} < p < \frac{2}{3}$ , где  $i_{B|A} > 0$  и  $C > 0$ . В этом интервале система в энтропийном смысле представляется классической [18], но тем не менее является запутанной.

**4.5. Дефазирование.** Процесс дефазирования дает только преобразование [27, 28]:

$$\begin{aligned} |1 \rangle \langle 0| &\rightarrow (1-p)|1 \rangle \langle 0|; \\ |0 \rangle \langle 1| &\rightarrow (1-p)|0 \rangle \langle 1|. \end{aligned} \quad (33)$$

Состояние (26) после дефазирования частицы  $B$

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|01 \rangle \langle 01| - (1-p)|01 \rangle \langle 10| - (1-p)|10 \rangle \langle 01| + |10 \rangle \langle 10|). \quad (34)$$

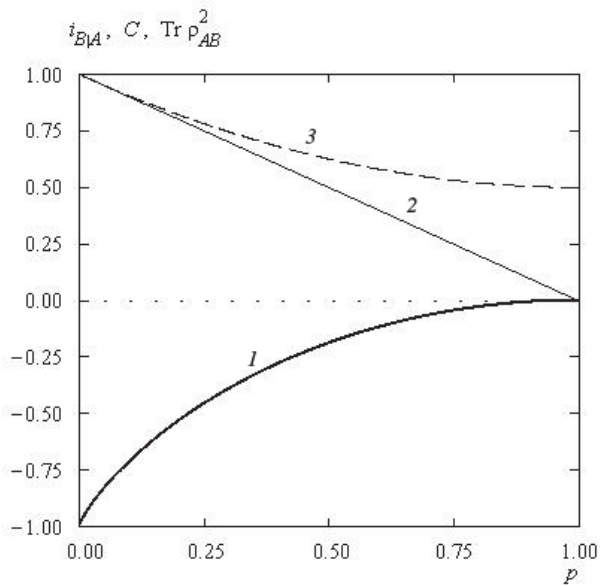


Рис. 5. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от степени дефазирования  $p$  состояния (26)

Вновь справедливы соотношения (28), (30) и (31), но

$$S(AB) = -\left(1 - \frac{p}{2}\right) \log_2 \left(1 - \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{2} \log_2 \frac{p}{2}; \quad (35)$$

$$C = 1 - p. \quad (36)$$

Поэтому при полном дефазировании  $i_{B|A} = 0$ , т.е. подсистемы остаются классически максимально коррелированными. При частичном дефазировании  $C$  и отрицательная  $i_{B|A}$  являются равноправными характеристиками квантовой коррелированности (рис. 5).

**4.6. Белловские диагональные состояния.** Исходные белловские диагональные состояния определяются как

$$\rho_{AB} = p_1 |\Phi^+ \rangle \langle \Phi^+| + p_2 |\Phi^- \rangle \langle \Phi^-| + p_3 |\Psi^+ \rangle \langle \Psi^+| + p_4 |\Psi^- \rangle \langle \Psi^-|, \quad (37)$$

где

$$|\Phi^\pm \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00 \rangle \pm |11 \rangle); \quad |\Psi^\pm \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10 \rangle \pm |01 \rangle). \quad (38)$$

По-прежнему справедливы (28), (30) и (31), но

$$S(AB) = -\sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i; \quad (39)$$

$$C = \max(2 \max\{p_i\} - 1, 0). \quad (40)$$

Поведение  $i_{B|A}$ ,  $C$  и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  при выборе  $p_4 = p$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = (1-p)/3$  показано на рис. 6. Видно, что  $i_{B|A}$  отражает смешанность состояния,

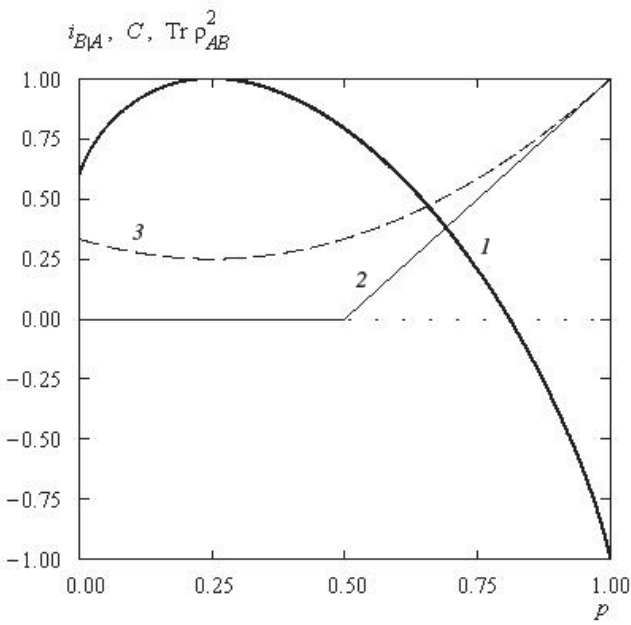


Рис. 6. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от  $p = p_4$  исходного белловского диагонального состояния (37)

достигая 1 при равенстве всех  $p_i$ . Но более важно, что имеется интервал  $0,5 < p < 0,81$ , где  $i_{B|A} > 0$  и  $C > 0$ . На этом интервале система запутана, несмотря на энтропийную классичность.

Теперь рассмотрим диссипацию состояния (37) в присутствии общего термостата. Известно, что вопреки ранее принятым взглядам диссипация может не сводиться к декогеренции, а, напротив, играть конструктивную роль в возникновении запутанности [29–36]. Следуя работе [34], положим, что кубиты представляют двухуровневые атомы, расположенные близко по сравнению с длиной волны. Диссипация происходит за счет спонтанной эмиссии фотонов, которые имеют существенную вероятность поглотиться соседним атомом. В [34] решается уравнение динамики матрицы плотности и подробно анализируются асимптотические решения  $t \rightarrow \infty$  для различных исходных состояний. В частности, асимптотическая матрица плотности при исходном состоянии (37) имеет вид

$$\rho_{AB}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_4}{2} & -\frac{p_4}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{p_4}{2} & \frac{p_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - p_4 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Отсюда

$$S(AB) = -p_4 \log_2 p_4 - (1 - p_4) \log_2(1 - p_4); \quad (42)$$

$$S(A) = S(B) = -\frac{p_4}{2} \log_2 \frac{p_4}{2} - (1 - \frac{p_4}{2}) \log_2(1 - \frac{p_4}{2}); \quad (43)$$

$$i_{B|A} = \frac{S(AB)}{S(A)} - 1; \quad (44)$$

$$C = p_4. \quad (45)$$

Конструктивная роль диссипации заключается в том, что даже когда исходное состояние сепарабельно ( $C = 0$ ), оно асимптотически запутано во всем диапазоне конечных  $p_4$ . На рис. 7 показано, что функция независимости в этом случае не отражает степени смешанности, как в предыдущих случаях, а является нелинейным отображением согласованности. При этом  $i_{B|A} \leq 1$ , т.е. система коррелирована при любых  $p_4$  ( $\max i_{B|A} = 1$  достигается при  $p_4 = 0$ ). На интервале  $0 \leq p_4 < 0,67$   $i_{BA} > 0$  система классична при довольно сильной запутанности.

#### 4.7. Состояния Вернера. Исходные состояния Вернера

$$\rho_{AB} = p \frac{I}{4} + (p - 1) |\Phi^+ \rangle \langle \Phi^+| \quad (46)$$

представляют деполаризованный триплет, для которого так же, как для синглета, справедливы выражения (28)–(32) и рис. 4.

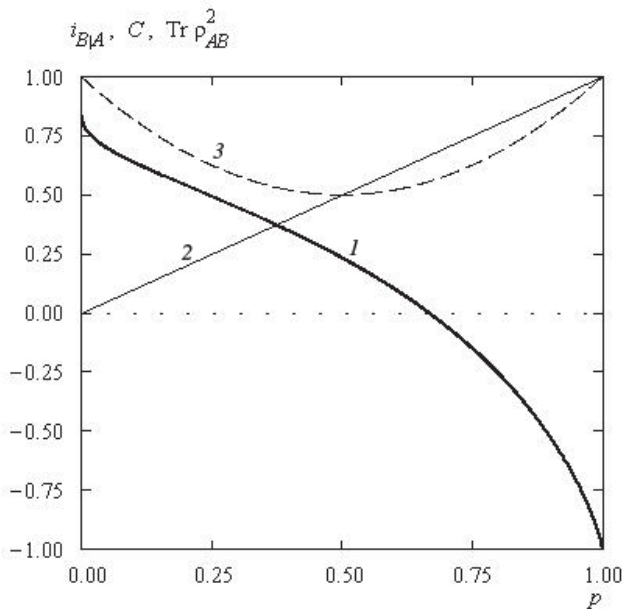


Рис. 7. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от  $p = p_4$  асимптотического белловского диагонального состояния (41)

Рассмотрим результат процесса диссипации, описанного в предыдущем разделе, состояния (46). Согласно [34] в асимптотическом пределе  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$\rho_{AB}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{8} & -\frac{p}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{8} & -\frac{p}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{p}{4} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

откуда

$$S(AB) = -\frac{p}{4} \log_2 \frac{p}{4} - \left(1 - \frac{p}{4}\right) \log_2 \left(1 - \frac{p}{4}\right); \quad (48)$$

$$S(A) = S(B) = -\frac{p}{8} \log_2 \frac{p}{8} - \left(1 - \frac{p}{8}\right) \log_2 \frac{p}{8}; \quad (49)$$

$$C = \frac{p}{4}. \quad (50)$$

На рис. 8 показано, что асимптотическое диссипированное состояние Вернера радикально отличается от исходного — оно не только запутано при любом  $p > 0$ , но согласованность растет с ростом  $p$ : чем менее запутано исходное состояние (включая его полную сепарабельность), тем более запутано диссипированное. При этом  $i_{B|A}$  положительна

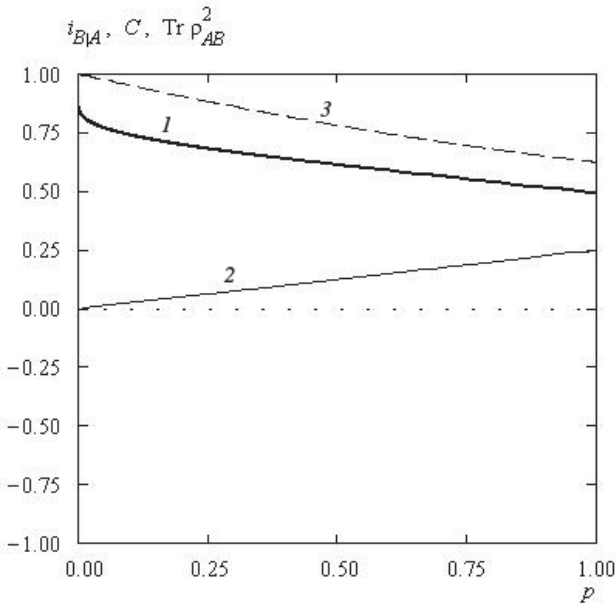


Рис. 8. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от  $p$  асимптотического состояния Вернера (47)



(классична) при любом  $p$  ( $\max i_{B|A} \approx 0,819$  при  $p = 0$ ;  $\min i_{B|A} \approx 0,493$  при  $p = 1$ ), уменьшение  $i_{B|A}$  при росте  $p$  почти линейно отображает увеличение запутанности. Примечательно, что это уменьшение  $i_{B|A}$  и рост  $C$  происходят практически пропорционально увеличению смешанности.

**4.8. Максимально запутанные смешанные состояния.** В работе [37] обосновано предположение, что при фиксированном  $\text{Tr}\rho_{AB}^2$  максимально запутанным является состояние

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} h(\delta) & 0 & 0 & \frac{\delta}{2} \\ 0 & 1 - 2h(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{2} & 0 & 0 & h(\delta) \end{pmatrix}; \quad h(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \delta \in \left[0, \frac{2}{3}\right]; \\ \frac{\delta}{2}, & \delta \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases} \quad (51)$$

Отсюда

$$S(AB) = -(1 - 2h) \log_2(1 - 2h) - \left(h - \frac{\delta}{2}\right) \log_2\left(h - \frac{\delta}{2}\right) - \left(h + \frac{\delta}{2}\right) \log_2\left(h + \frac{\delta}{2}\right); \quad (52)$$

$$S(A) = S(B) = -h \log_2 h - (1 - h) \log_2(1 - h); \quad (53)$$

$i_{B|A}$  определяется соотношением (44); согласованность

$$C = \delta. \quad (54)$$

На рис. 9 показана зависимость  $i_{B|A}$ ,  $C$ ,  $\text{Tr}\rho_{AB}^2$  от  $\delta$ ;  $i_{B|A}$  меняется от  $+0,725$  при  $\delta = 0$  до  $-1$  при  $\delta = 1$ , и ее уменьшение в целом, отражает уменьшение смешанности. При этом в интервале  $0 < \delta < \frac{2}{3}$   $i_{BA} > 0$  при  $C > 0$ , т.е. состояние запутано, несмотря на энтропийную классичность.

Согласно решению, полученному в [34], асимптотический результат диссипации (51)

$$\rho_{AB}^{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1 - 2h) & -\frac{1}{4}(1 - 2h) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(1 - 2h) & \frac{1}{4}(1 - 2h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} + h \end{pmatrix}. \quad (55)$$

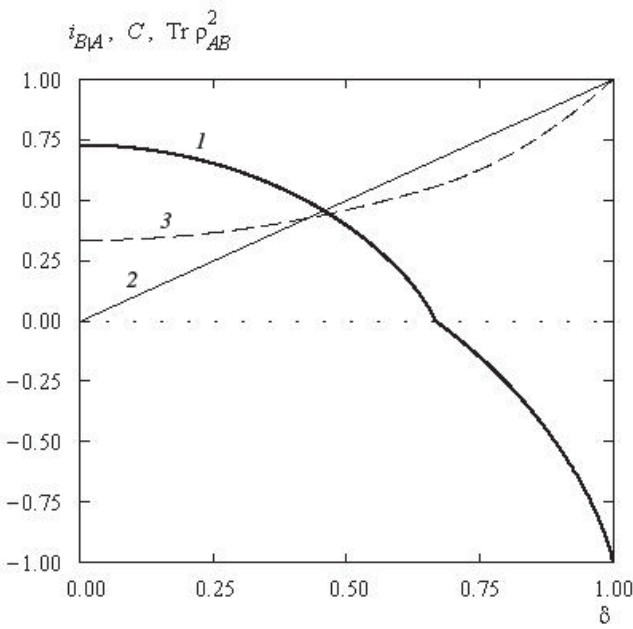


Рис. 9. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от  $\delta$  исходного максимально запутанного смешанного состояния (51)

Отсюда

$$S(AB) = -\left(\frac{1}{2} + h\right) \log_2\left(\frac{1}{2} + h\right) - \left(\frac{1}{2} - h\right) \log_2\left(\frac{1}{2} - h\right); \quad (56)$$

$$S(A) = S(B) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right) \log_2\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{h}{2}\right) \log_2\left(\frac{3}{4} + \frac{h}{2}\right); \quad (57)$$

$i_{B|A}$  определяется соотношением (44); согласованность

$$C = \frac{1}{2}(1 - 2h). \quad (58)$$

На рис. 10 показано, что диссипированное максимальное запутанное смешанное состояние характеризуется совершенно иной зависимостью  $C$  от  $\delta$ , поэтому при любых  $\delta$  оно более запутано, чем исходное. В энтропийном же смысле в результате диссипации система стала классической ( $0,571 \leq i_{B|A} \leq 1$  при всех  $\delta$ ). В противоположность исходному состоянию функция независимости меняется обратно степени смешанности. В пределе чистого состояния  $\delta \rightarrow 0$   $S(AB) \rightarrow 0$ ,  $\text{Tr} \rho_{AB}^2 \rightarrow 1$ , но также  $S(A) = S(B) \rightarrow 0$ , поэтому  $i_{B|A} = i_{A|B} \rightarrow 1$ .

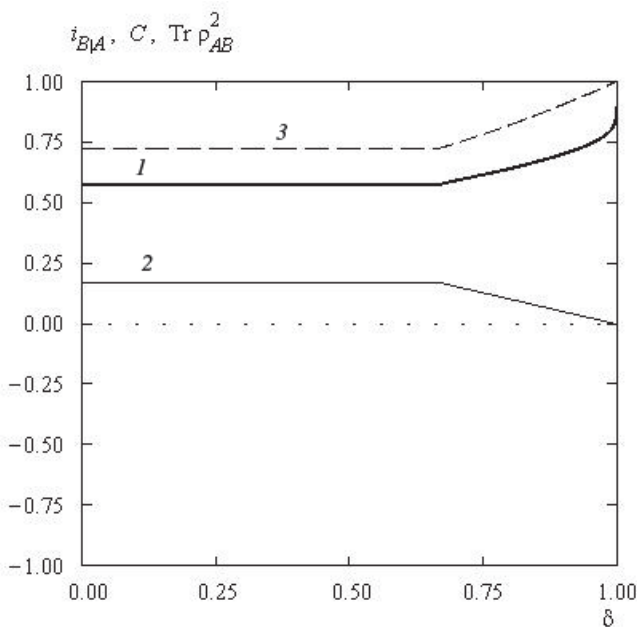


Рис. 10. Зависимость  $i_{B|A}$  (1),  $C$  (2) и  $\text{Tr} \rho_{AB}^2$  (3) от  $\delta$  асимптотически максимально запутанного смешанного состояния (51)

По соотношению независимости, согласованности и смешанности асимптотическое максимально запутанное состояние качественно близко к асимптотическому состоянию Вернера.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К о р о т а е в S. M. Formal definition of causality and Kozyrev's axioms // Galilean Electrodynamics. – 1993. – Vol. 4. – No. 5. – P. 86–90.
2. К о з ы р е в N. A. On the possibility of experimental investigation of the properties of time // Time in Science and Philosophy. – Prague, Academia, 1971. – P. 111–132.
3. К о р о т а е в С. М. О возможности причинного анализа геофизических процессов // Геомагнетизм и аэрономия. – 1992. – Т. 32. – № 1. – С. 27–33.
4. К о р о т а е в С. М., Х а ч а й О. А., Ш а б е л я н с к и й С. В. Применение причинного анализа к процессу вертикальной диффузии магнитного поля в океане // Геомагнетизм и аэрономия. – 1992. – Т. 32. – № 1. – С. 48–53.
5. К о р о т а е в С. М., Х а ч а й О. А. Причинный анализ и его применение для изучения электромагнитных процессов в море // Известия АН. Физика Земли. – 1992. – № 4. – С. 52–61.
6. К о р о т а е в С. М., Х а ч а й О. А., Л о у Л. К. Результаты применения причинного анализа к наблюдениям переменного магнитного поля в море // Известия АН. Физика Земли. – 1992. – № 5 – С. 35–44.
7. К о р о т а е в С. М., Ш а б е л я н с к и й С. В., С е р д ю к В. О. // Известия АН. Физика Земли. – 1992. – № 6. – С. 77–66.
8. Х а ч а й О. А., К о р о т а е в С. М., Т р о я н о в А. К // Вулканология и сейсмология. – 1992. – № 3. – С. 92–100.
9. К о р о т а е в С. М., Х а ч а й О. А. Роль запаздывания в причинном анализе геофизических процессов // Геомагнетизм и аэрономия. – 1992. – Т. 32. – № 4. – С. 119–121.

10. Коротаяев С. М., Хачай О. А., Шабелянский С. В. Причинный анализ процесса горизонтальной информационной диффузии электромагнитного поля в океане // Геоматнетизм и аэрономия. – 1993. – Т. 33. – № 2. – С. 128–133.
11. Арушанов М. Л., Коротаяев С. М. Причинный анализ и его применение для изучения физических процессов в атмосфере // Метеорология и гидрология. – 1994. – № 6. – С. 15–22.
12. Коротаяев С. М. Роль различных определений энтропии в причинном анализе геофизических процессов и их приложение к электромагнитной индукции в морских течениях // Геоматнетизм и аэрономия. – 1995. – Т. 35. – № 3. – С. 116–125.
13. K o r o t a e v S. M., S e r d y u k V. O., N a l i v a i k o V. I., N o v y s h A. V., G a i d a s h S. P., G o r o k h o v Y u. V., P u l i n e t s S. A., K a n o n i d i K h. D. Experimental estimation of macroscopic nonlocality effect in solar and geomagnetic activity // Phys. of Wave Phenomena. – 2003. – Vol. 11. – No. 1. – P. 46–55.
14. Коротаяев С. М., Морозов А. Н., Сердюк В. О., Горохов J. V., Мачинин В. А. Experimental study of macroscopic nonlocality of large-scale geomagnetic dissipative processes // NeuroQuantology. – 2005. – Vol. 3. – P. 275–294.
15. Коротаяев С. М. Experimental study of advanced correlation of some geophysical and astrophysical processes // Int. J. of Computing Anticipatory Systems. – 2006. – Vol. 17. – P. 61–76.
16. K o r o t a e v S. M., S e r d y u k V. O., G o r o h o v J. V. Forecast of solar and geomagnetic activity on the macroscopic nonlocality effect // Hadronic Journal. – 2007. – Vol. 30. – No. 1. – P. 39–56.
17. K o r o t a e v S. M., S e r d y u k V. O. The forecast of fluctuating large-scale natural processes and macroscopic correlations effect // Int. J. of Computing Anticipatory Systems. – 2008. – Vol. 29. – P. 31–46.
18. Z y c z k o w s k i K., H o r o d e c k i P., H o r o d e c k i M., H o r o d e c k i R. Dynamics of quantum entanglement // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 65. – P. 012101.
19. C r a m e r J. G. Generalized absorber theory and Einstein-Podolsky-Rosen paradox // Phys. Rev D. – 1980. – Vol. 22. – P. 362–376.
20. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.
21. C e r f N. J., A d a m i C. Quantum extension of conditional probability // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60. – P. 863–897.
22. C e r f N. J. Entropic bounds on coding for noisy quantum channels // Phys. Rev. A. – 1998. – Vol. 57. – P. 3330–3347.
23. M u k o h y a m a S. Comments on entanglement entropy // Phys. Rev D. – 1998. – Vol. 58. – P. 104023.
24. B o r r a s A., P l a s t i n o A. R., C a s a s M., P l a s t i n o A. Quantum brachistochrone evolution of systems of two identical particles: The role of entanglement // Phys. Rev. A. – 2008. – Vol. 78. – P. 052104.
25. W o t t e r s W. K. Entanglement of formation of an arbitrary states of two qubits // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 80. – P. 2245–2248.
26. D ü r W. Multipartite entanglement that is robust against disposal of the particles // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 63. – P. 020303.
27. J a n g S. S., C h e o n g Y. W., K i m J. L e e H. -W. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence // Phys. Rev. A. – 2006. – Vol. 74. – P. 062112.
28. S o n g W., C h e n Z. -B. Invariant information and complementary in high-dimensional states // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 76. – P. 014307.
29. P l e n i o M. B., H u e l g a S. F., B i e g e A., K n i g h t P. L. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 59. – P. 2468–2475.
30. Башаров А. М. Декогеренция и перепутывание при радиационном распаде двухатомной системы // ЖЭТФ. – 2002. – Т. 59. – Вып. 6 – С. 1249–1260.

31. P l e n i o M. B., H u e l g a S. F. Entangled light from white noise // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88. – P. 197901.
32. K i m M. S., L e e J., A h n D., K n i g h t P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // Phys. Rev. A. – 2002. – Vol. 65. – P. 040101.
33. B r a u n D. Creation of entanglement by interaction with a common heat bath // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89. – P. 277901.
34. J a k o b c z y k L. Entangling two qubits by dissipation // J. Phys. A. – 2002. – Vol. 35. – P. 6383–6392.
35. B e n a t t i F., F l o r e a n i n i R., P i a n i M. Environment induced entanglement in Markovian dissipative dynamics // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91. – P. 070402.
36. C h o i T., L e e H. J. Quantum entanglement induced by dissipation // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 76. – P. 012308.
37. M u n r o W. J., J a m e s D. F. V., W h i t e A. G. K w i a t P. G. Maximizing the entanglement of two mixing qubits // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 64. – P. 030302.

Статья поступила в редакцию 09.06.2010

Сергей Маратович Коротаев родился в 1950 г., окончил ЛГМИ в 1972 г. Д-р. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией ЦГЭМИ ИФЗ РАН, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 180 научных работ в области физики необратимых процессов, физических приложений теории информации, электродинамики и геофизики.

S.M. Korotaev (b. 1950) graduated from the Leningrad Hydro-Meteorological Institute in 1972. D. Sc. (Phys.-Math.), head of laboratory of the Earth’s Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 180 publications in the field of physics of irreversible processes, physical applications of theory of information, electrodynamics, and geophysics.

Евгений Олегович Киктенко родился в 1986 г., студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области физики квантовой информации.

Ye.O. Kiktenko (b. 1986) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of physics of quantum information.