

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НА ОПОРАХ КОЛЬЦА ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛ РЕЗАНИЯ

**А.И. Полунин**

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,  
г. Белгород, Россия  
e-mail: polynin@intbel.ru

*Сформулирована математическая модель динамики вращающегося на опорах кольца при действии на него сил резания при токарной обработке. Получены формулы, позволяющие учитывать прецессию стоячей волны при определении сил внутреннего трения. На основе анализа полученных уравнений показана возможность возникновения прецессионного резонанса. Приведены результаты расчетов.*

**Ключевые слова:** динамика вращающегося на опорах кольца, безрамная токарная обработка колец, учет сил внутреннего трения во вращающемся кольце, прецессионный резонанс во вращающемся кольце.

## MATHEMATICAL SIMULATION OF DYNAMICS OF A ROTATING RING ON SUPPORTS EXPOSED TO CUTTING FORCES

**A.I. Polunin**

Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia  
e-mail: polynin@intbel.ru

*A mathematical model of dynamics of a rotating ring on supports, which is exposed to cutting forces in the process of turning, is formulated. The formulas are derived which allow the standing wave precession to be taken into account during the determination of internal friction forces. Based on the analysis of the derived equations, the possibility of precession resonance occurrence is shown. Calculation results are given.*

**Keywords:** dynamics of a rotating ring on supports, frameless turning of the rings, consideration for internal friction forces in the rotating ring, the precession resonance in the rotating ring.

Рассмотрим динамическую задачу, возникающую при обработке колец по безрамной технологии. При ее использовании кольцо ставят в вертикальной плоскости на два опорных ролика, приводят во вращение и обрабатывают приставным токарным станочным модулем. При обработке на кольцо и станок действуют радиальная, тангенциальная и направленная по оси вращения кольца силы резания. Значения этих сил зависят от глубины резания  $t_R$ , скорости резания  $V_R$ , которая, в свою очередь, зависит от угловой скорости вращения кольца  $\Omega$  и его радиуса  $r$ , характеристик материала.

Наличие сил резания и конечная жесткость материала кольца и станка ведут к возникновению колебаний, что влияет на точность обработки. Поэтому необходима разработка математической модели этого процесса, позволяющей исследовать влияние на него всех параметров

системы. Опубликованные исследования по данному вопросу практически отсутствуют, имеются лишь работы, посвященные в основном определению собственных частот колебаний свободных колец [1].

При разработке математической модели примем, что угловая скорость вращения кольца постоянна, тогда тангенциальная сила резания, не влияя на скорость вращения кольца, вызывает его движение в тангенциальном направлении. Будем учитывать в модели радиальную и тангенциальную составляющие силы резания.

Одной из особенностей станочных модулей, используемых для обработки колец по безрамной технологии, является их меньшая жесткость по сравнению со стационарным станком вследствие того, что станок для безрамной обработки должен быть переносным и занимать небольшой объем, чтобы его можно было поместить в такое место, где обеспечивается лучшая точность обработки. Эти условия накладывают ограничения на размеры станка, а значит, и на его жесткостные характеристики.

В процессе резания на кольцо и станочный модуль действуют силы резания. Под их влиянием происходит деформация вращающегося кольца, а также изменение положения резца вследствие его деформации, деформации станочного модуля и основания базирования станка. Деформация резца по сравнению с остальными составляющими существенно меньше, поэтому ею можно пренебречь. Деформацию станочного модуля и основания его базирования заменим суммарным линейным перемещением по координате  $X_P$ , перпендикулярным средней линии кольца в точке нахождения резца. Расчетная схема для анализа динамики представлена на рис. 1, где обозначено:  $K_C$  — коэффициент жесткости, характеризующий величину отжатия резца со станочным модулем;  $m_c$  — эквивалентная масса станочного модуля;  $P_{RC}$ ,  $P_{RK}$  — силы резания, действующие соответственно на станочный модуль и кольцо в радиальном направлении;  $P_{TK}$  — тангенциальная сила резания, действующая на кольцо;  $\Omega$  — угловая скорость вращения кольца.

Для получения уравнений динамики используем уравнение Лагранжа второго рода. В соответствии с рис. 1 выражения для кинетической энергии системы должны учитывать кинетическую энергию

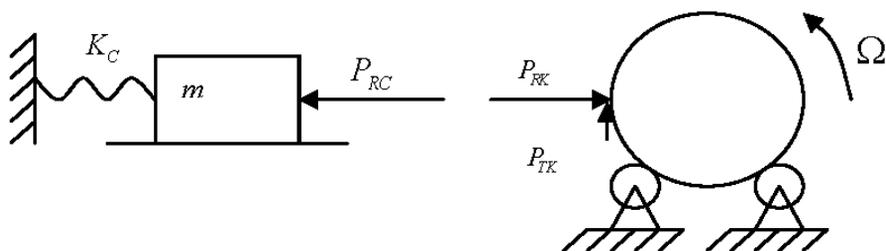


Рис. 1. Расчетная схема

станочного модуля  $T_C$  и вращающегося кольца  $T_K$ . Формулы потенциальной энергии системы должны учитывать потенциальную энергию упругой деформации станочного модуля (коэффициент  $K_C$ ), потенциальную энергию кольца. В уравнениях динамики будем учитывать силы резания и внутреннего трения.

Получим зависимости, описывающие поведение кольца с нерастяжимой средней линией, вращающегося с постоянной скоростью  $\Omega$  на двух опорных роликах. При выводе уравнений примем следующие допущения. Радиус средней линии кольца постоянен и равен  $r$ . Опорные ролики имеют форму цилиндра постоянного радиуса, их оси параллельны. Оси вращения кольца в возмущенном и невозмущенном движении совпадают. Силу внутреннего трения учитываем по закону Фойхта. Угол между опорами равен  $2\alpha$ , радиальные перемещения кольца в точках опор равны нулю. Ширина кольца  $a$ , толщина  $h$ . Перемещение точки кольца в процессе деформации зададим в лагранжевой системе координат радиальным ( $U$ ) и тангенциальным ( $V$ ) перемещениями. При разработке математической модели динамики кольца используем гипотезу плоских сечений, применяемую в теории балок.

Радиальное перемещение  $U$  точек кольца представим в виде ряда Фурье. Одной из особенностей задачи моделирования динамики вращающегося на двух опорах кольца (или оболочки) является учет возникающего при этом прецессионного движения возбужденных стоячих волн, обусловленного действием кориолисовых сил. В работе [2] показано, что скорость прецессии гармоник стоячих волн во вращающемся на опорах кольце равна скорости вращения кольца  $\dot{\varphi}_{ui} = \Omega$  ( $i = 1, \dots, N$ ). С учетом этого радиальное перемещение  $U$  точек кольца представим в виде ряда Фурье

$$U = \sum_{i=1}^N [a_{ui}(t) \cos(i(\theta + \varphi_{ui}(t))) + b_{ui}(t) \sin(i(\theta + \varphi_{ui}(t)))], \quad (1)$$

где  $a_{ui}, b_{ui}$  — обобщенные координаты, зависящие от времени;  $\varphi_{ui}$  — функции времени, задающие прецессию  $i$ -й гармоники стоячей волны по координате  $U$ .

Тангенциальное перемещение точек кольца, учитывая условие нерастяжимости средней линии  $V = - \int U d\theta$ , зададим зависимостью

$$V = - \sum_{i=1}^N \frac{a_{ui}}{i} \sin(i(\theta + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^N \frac{b_{ui}}{i} \cos(i(\theta + \varphi_{ui})). \quad (2)$$

В точках опор радиальные перемещения кольца равны нулю, поэтому имеем условия

$$\sum_{i=1}^N a_{ui} \cos(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^N b_{ui} \sin(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N a_{ui} \cos(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^N b_{ui} \sin(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{ui})) = 0. \quad (4)$$

Кинетическую и потенциальную энергии вращающегося кольца определяем по формулам

$$T = \frac{\chi}{2} \int_0^{2\pi} [(\dot{V} + \Omega r + \Omega U)^2 + (\dot{V} - \Omega V)^2] d\theta; \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} \left( U + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta,$$

где  $\chi = r\rho F$ ;  $\mu = EJ/r^3$ ;  $r, \rho, F$  — соответственно радиус средней линии кольца, удельная плотность материала, площадь поперечного сечения;  $E, J$  — соответственно модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения.

Найдем зависимости для обобщенных сил внутреннего трения, действующих по координатам  $a_{uj}$ ,  $b_{uj}$ . Для вычисления напряжения, возникающего в материале кольца, используем закон Фойхта  $\sigma_T = K_T E \frac{\partial e}{\partial t}$ , где  $K_T$  — коэффициент внутреннего трения,  $e$  — деформация при изгибе.

Величину деформации определим соотношением  $e = z\gamma/r^2$ ; изменения кривизны вследствие изменения переменной  $U - \frac{\gamma}{r^2} = (-U - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2})/r^2$ ; момент сил внутреннего трения  $M = \int_S z\sigma dS = \frac{JEK_T}{r^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ ; изменение элементарной работы  $\delta A_{TR}^\Delta = M\delta\alpha$  ( $\delta\alpha = \frac{\delta\gamma}{r^2} r\Delta\theta -$  изменение угла); вариацию кривизны определим соот-

ношением  $\delta\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial q_j}\delta q_j$ . Для вычисления полной работы силы внутреннего трения во всем кольце при его изгибе вследствие вариации обобщенной координаты  $\delta q_j$  используем формулу

$$\delta A_{TP} = \frac{JEK_T}{r^3} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\gamma}{\partial t} \frac{\partial\gamma}{\partial q_j} d\theta \delta q_j.$$

Величину  $F_{q_j} = \frac{JEK_T}{r^3} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\gamma}{\partial t} \frac{\partial\gamma}{\partial q_j} d\theta$  — обобщенную силу трения,

действующую по координате  $q_j$ , определим следующим образом. Используя формулу (1), для обобщенных сил трения, действующих по обобщенным координатам  $a_{uj}, b_{uj}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), получаем следующие выражения:

$$F_{a_j} = \pi\mu K_T (j^2 - 1)^2 \dot{a}_{uj} + \pi\mu K_T j (j^2 - 1)^2 b_{uj} \dot{\varphi}_{uj}, \quad (6)$$

$$F_{b_j} = -\pi\mu K_T j (j^2 - 1)^2 a_{uj} \dot{\varphi}_{uj} + \pi\mu K_T (j^2 - 1)^2 \dot{b}_{uj}. \quad (7)$$

Видно, что приведенные формулы отличаются от классических, получаемых путем дифференцирования матрицы жесткостей по времени. При наличии прецессии стоячей волны появляется дополнительная составляющая силы внутреннего трения, зависящая от скорости прецессии  $\dot{\varphi}_{uj}$ . При скорости, равной нулю, как частный случай получаем классические формулы.

Найдем обобщенные силы  $Q_{aj}, Q_{bj}$ , действующие по обобщенным координатам кольца вследствие действия сил резания. Вычисляя элементарную работу сил  $P_{RK}, P_{TK}$ , действующих соответственно в радиальном и касательном направлениях к поверхности кольца в точке  $\theta_R$ , на элементарных перемещениях обобщенных координат, получаем

$$Q_{aj} = -P_{RK} \cos(j(\theta_R - \Omega t + \varphi_{uj}(t))) + \frac{P_{TK}}{j} \sin(j(\theta_R - \Omega t + \varphi_{uj}(t))); \quad (8)$$

$$Q_{bj} = -P_{RK} \sin(j(\theta_R - \Omega t + \varphi_{uj}(t))) - \frac{P_{TK}}{j} \cos(j(\theta_R - \Omega t + \varphi_{uj}(t))). \quad (9)$$

Для сил резания, действующих на кольцо и станочный модуль, имеем

$$\begin{aligned} P_{RK} &= 10C_P^P t_R^{X_p} S^{Y_p} V^{n_p}; & P_{TK} &= 10C_P^T t_R^{X_T} S^{Y_T} V^{n_T}; \\ P_{RC} &= 10C_P^P t_R^{X_p} S^{Y_p} V^{n_p}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $t_R$  — глубина резания;  $S$  — величина подачи резца;  $V$  — скорость резания;  $C_P^P, X_P, Y_P, n_p, C_P^T, X_T, Y_T, n_T$  — коэффициенты.

Для глубины резания получим  $t_R = t_{R0} + U(\theta_R) + X_P$ , где  $t_{R0}$  — расчетная глубина резания; радиальное перемещение кольца в точке резца равно

$$U(\theta_R) = \sum_{i=1}^N \left[ a_{ui}(t) \cos(i(\theta_R - \Omega t + \varphi_{ui}(t))) + b_{ui}(t) \sin(i(\theta_R - \Omega t + \varphi_{ui}(t))) \right];$$

$X_P$  — смещение резца вследствие динамики станочного модуля.

Используя зависимости (1)–(10), вычисляя производные кинетической и потенциальной энергий, исключая неопределенные множители Лагранжа и учитывая соотношения  $\dot{\varphi}_{ui}(t) = \Omega$ ,  $\varphi_{ui}(t) = \Omega t$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), получаем уравнения динамики кольца при действии сил резания

$$Q_j \ddot{a}_1 + C_j \ddot{a}_j + \nu K_T n_j^2 \dot{a}_j + 2\Omega l_j \dot{b}_j + M_j a_j + \nu K_T j n_j^2 \Omega b_j = P_{aj};$$

$$X_j \ddot{b}_1 + C_j \ddot{b}_j - 2\Omega l_j \dot{a}_j + \nu K_T n_j^2 \dot{b}_j - \nu K_T j n_j^2 \Omega a_j + M_j b_j = P_{bj} \\ (j = 2, 3, \dots, N - 1);$$

$$Q_N \ddot{a}_1 + \sum_{i=1}^{N-1} C_N P_{1i} \ddot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} C_N R_{1i} \ddot{b}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (\nu K_T n_N^2 P_{1i} + 2\Omega l_N P_{2i}) \dot{a}_i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (\nu K_T n_N^2 R_{1i} + 2\Omega l_N R_{2i}) \dot{b}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (M_N P_{1i} + \gamma_N P_{2i}) a_i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (M_N R_{1i} + \gamma_N R_{2i}) b_i = P_{aN};$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_N P_{2i} \ddot{a}_i + X_N \ddot{b}_1 + \sum_{i=1}^{N-1} C_N R_{2i} \ddot{b}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (\nu K_T n_N^2 P_{2i} - 2\Omega l_N P_{1i}) \dot{a}_i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (\nu K_T n_N^2 R_{2i} - 2\Omega l_N R_{1i}) \dot{b}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (M_N P_{2i} - \gamma_N P_{1i}) a_i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (M_N R_{2i} - \gamma_N R_{1i}) b_i = P_{bN};$$

$$m_C \ddot{X}_P + K_T \dot{X}_P + K_C X_P + P_{RC} = 0.$$

В этих уравнениях

$$P_{aj} = -P_{RK} \left[ \frac{\cos(j\theta_R)}{\pi\chi} + \frac{(-1)^{j+1} \cos(j\alpha) \cos\theta_R}{\pi\chi \cos(\pi - \alpha)} \right] + \\ + P_{TK} \left[ \frac{\sin(j\theta_R)}{j\pi\chi} + \frac{(-1)^{j+1} \cos(j\alpha) \sin\theta_R}{\pi\chi \cos(\pi - \alpha)} \right];$$

$$P_{bj} = -P_{RK} \left[ \frac{\sin(j\theta_R)}{\pi\chi} + \frac{(-1)^j \sin(j\alpha) \sin\theta_R}{\pi\chi \sin(\pi - \alpha)} \right] - \\ - P_{TK} \left[ \frac{\cos(j\theta_R)}{j\pi\chi} + \frac{(-1)^j \sin(j\alpha) \cos\theta_R}{\pi\chi \sin(\pi - \alpha)} \right];$$

$$M_j = \nu n_j^2 - l_j^2 \Omega^2, \quad \nu = \frac{EJ}{\rho F R^4}, \quad \gamma_j = \nu K_T j n_j^2 \Omega,$$

$$Q_j = \frac{(-1)^{j+1} 2 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)}; \quad X_j = \frac{(-1)^j 2 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} \quad (j = 1, 2, \dots, N);$$

$P_{1i}, P_{2i}, R_{1i}, R_{2i}$  – соответственно первая и вторая строки матриц

$$P = ZD, \quad R = ZF, \quad \text{где } Z = \begin{bmatrix} \cos(N(\pi - \alpha)) & \sin(N(\pi - \alpha)) \\ \cos(N(\pi + \alpha)) & \sin(N(\pi + \alpha)) \end{bmatrix}^{-1}.$$

Элементы матриц  $D$  и  $F$  соответственно равны  $d_{1i} = -\cos(i(\pi - \alpha))$ ,  $d_{2i} = -\cos(i(\pi + \alpha))$ ,  $f_{1i} = -\sin(i(\pi - \alpha))$ ,  $f_{2i} = -\sin(i(\pi + \alpha))$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ),  $C_j = 1 + 1/j^2$ ,  $K_j = j + 1/j$ ,  $n_j = j^2 - 1$ ,  $l_j = j - 1/j$ .

Полученная система является системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, она может использоваться при проектировании станочных модулей и выборе режимов обработки крупногабаритных колец и оболочек по безрамной технологии, позволяет учитывать их динамику.

В таблице приведены результаты расчетов изменения глубины резания в зависимости от коэффициента упругости  $K_C$  станочного модуля и толщины кольца, полученные с использованием приведенной модели. Даны максимальное и минимальное перемещения кромки резца в процессе резания в миллиметрах. Расчеты проведены для кольца радиусом 3 м, шириной 1 м, с углом между опорами  $80^\circ$ , при угловой скорости вращения кольца 0,5 рад/с, коэффициенте внутреннего трения  $10^{-4}$  Н·с/м, расчетной глубине резания 2 мм. Полученные результаты показывают, как выход резца из зоны резания, а значит, и точность

обработанной поверхности зависят от толщины кольца и жесткости станка. Так, при коэффициенте  $K_C = 10^5$  выход резца из зоны резания происходит при толщинах кольца 0,05, 0,1, 0,2 м.

Таким образом, полученные уравнения позволяют рассчитывать динамику процесса обработки крупногабаритных колец по безрамной технологии при разных режимах, а также могут быть использованы при проектировании станочных модулей.

| Толщина кольца, м | Перемещение кромки резца, мм |             |                      |             |              |             |
|-------------------|------------------------------|-------------|----------------------|-------------|--------------|-------------|
|                   | максимальное                 | минимальное | максимальное         | минимальное | максимальное | минимальное |
|                   | $K_C = 10^5$                 |             | $K_C = 5 \cdot 10^5$ |             | $K_C = 10^6$ |             |
| 0,05              | 2                            | -0,06       | 2                    | 1,20        | 2            | 1,48        |
| 0,1               | 2                            | -0,003      | 2                    | 1,32        | 2            | 1,62        |
| 0,2               | 2                            | -0,005      | 2                    | 1,34        | 2            | 1,64        |
| 0,3               | 2                            | 0,004       | 2                    | 1,35        | 2            | 1,65        |
| 0,4               | 2                            | 0,013       | 2                    | 1,36        | 2            | 1,65        |
| 0,5               | 2                            | 0,02        | 2                    | 1,36        | 2            | 1,66        |

Дадим анализ полученной системы. Среди коэффициентов уравнений имеется выражение  $M_j = \nu n_j^2 - l_j^2 \Omega^2$  ( $j = 2, \dots, N$ ), зависящее от прочностных характеристик материала кольца  $\nu$  и угловой скорости вращения  $\Omega$ . Оно характеризует упругую силу, возвращающую кольцо в положение равновесия, от значения которой зависит частота его собственных колебаний. При  $\Omega = 0$  кольцо не вращается, возбужденные в нем колебания представляют собой при наличии трения затухающий колебательный процесс, описываемый полученной системой. При увеличении  $\Omega$  от нуля величина  $M_j$  уменьшается, а значит, уменьшается возвращающая в положение равновесия упругая сила и увеличивается период собственных колебаний кольца. С увеличением  $\Omega$  период увеличивается и при некоторой скорости величина  $M_j$  делается равной нулю. Значение этой критической скорости — свое для каждой гармоники и равно  $\Omega_j^2 = \nu n_j^2 / l_j^2$ . При дальнейшем увеличении  $\Omega$  значения  $M_j$  становятся отрицательными и матрица при координатах имеет отрицательные элементы, что влияет на решение. Система уравнений описывает теперь расходящийся колебательный процесс, т.е. возникает резонанс. Энергия, необходимая для возбуждения резонанса, появляется в системе вследствие допущения, что скорость вращения кольца постоянна. На первом этапе, до критической скорости вращения, работа этой энергии направлена на противодействие силам упругости, на втором — способствует возникновению резонанса.

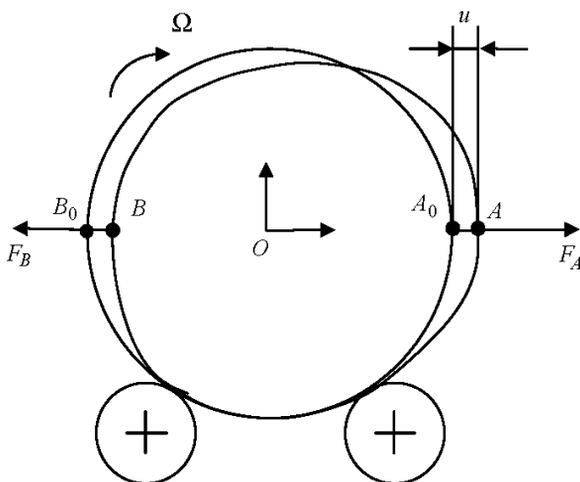


Рис. 2. Силы, возникающие в кольце

Рассмотрим возникновение этого эффекта с точки зрения механики. Получим зависимости для сил в случае появления колебаний по первой собственной частоте во вращающемся на двух опорах кольце радиуса  $r$  (рис. 2). Для этого найдем зависимости для центробежных сил, действующих на элементарные массы, находящиеся в точках  $A_0$  и  $B_0$ , расположенные симметрично относительно оси вращения (точка  $O$ ). Пусть в результате колебания масса в точке  $A_0$  из нейтрального положения сместилась в положение  $A$  на величину  $U$ . Тогда ее радиус относительно оси вращения  $O$  стал  $r_A = r + U$ , а центробежная сила, действующая на элементарную массу  $\Delta m$ , равна  $F_A = \Delta m \Omega^2 (r + U)$ . Для точки  $B_0$  радиус уменьшится примерно на величину  $U$  и станет  $r_B = r - U$ , а центробежная сила, действующая на такую же элементарную массу, равна  $F_B = \Delta m \Omega^2 (r - U)$ . Суммарная результирующая центробежная сила от этих элементарных масс  $F = F_A - F_B = 2\Delta m \Omega^2 U$ .

Суммарная сила, действующая на кольцо и возвращающая его в нейтральное положение, которая учитывает силу упругости и центробежные силы от элементарных масс в точках  $A$  и  $B$ , выражается как

$$F_{\Delta m} = F_y - F = F_y(U) - 2\Delta m \Omega^2 U.$$

Здесь  $F_y$  — сила упругости кольца, возвращающая его в нейтральное положение, зависит от отклонения  $U$ .

Из последней формулы видно, что результирующая сила, от которой зависит частота собственных колебаний, определяется угловой скоростью вращения кольца  $\Omega$ , с увеличением которой она уменьшается. Вычисляя интеграл для этой силы по всему кольцу, получаем, что с увеличением угловой скорости вращения кольца сила, возвращающая кольцо в нейтральное положение, уменьшается, а значит, и

уменьшается частота собственных колебаний:

$$F_m = F_y - 2\Omega^2 \int_S \Delta m U(\theta) d\theta.$$

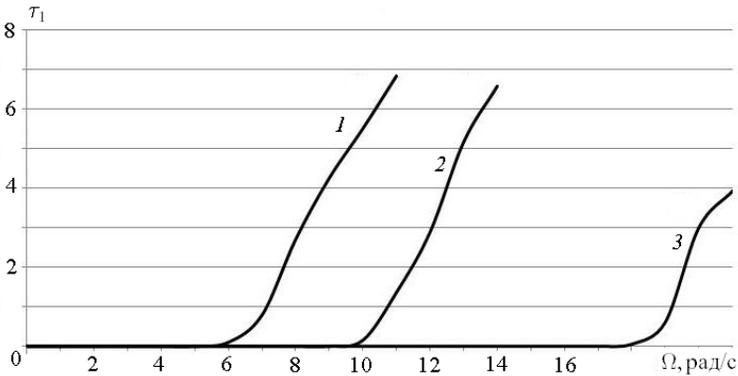
Здесь  $\theta$  — угловое положение на кольце элемента массы.

При превышении критического значения угловой скорости

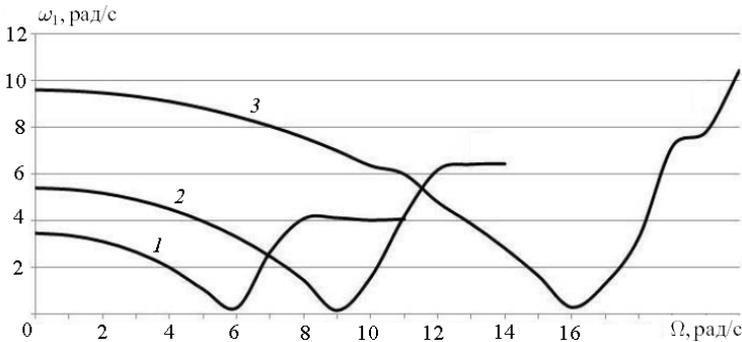
$$\Omega_{кр} = \sqrt{F_y \left( 2 \int_S \Delta m U(\theta) d\theta \right)^{-1}}$$

центробежная сила становится больше силы упругости и возникает расходящийся процесс — прецессионный резонанс.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости коэффициента  $\tau_1$  расходимости колебательного процесса для колец разного радиуса, а также первой собственной частоты  $\omega_1$ , рад/с, от скорости вращения кольца  $\Omega$ , рад/с. Число гармоник ряда Фурье равно шести. Эти харак-



**Рис. 3. Зависимость показателя расходимости колебательного процесса от скорости вращения кольца радиусом 5 м (1), 4 м (2), 3 м (3)**



**Рис. 4. Зависимость первой собственной частоты колебаний кольца радиусом 5 м (1), 4 м (2), 3 м (3) от скорости вращения**

теристики находились при решении частотного уравнения численным методом. Коэффициент внутреннего трения принят равным нулю, толщина колец 0,05 м, угол между опорами 40°. На рис. 3, 4 видно, что с увеличением скорости вращения собственная частота уменьшается. При некоторой скорости вращения кольца коэффициент  $\tau_1$  становится положительным, т.е. возникает прецессионный резонанс и частота собственных колебаний возрастает. Аналогичные расчеты, проведенные при коэффициенте внутреннего трения, равном  $1,5 \cdot 10^{-4}$  Н·с/м, дали практически полное совпадение с результатами, полученными при коэффициенте внутреннего трения, равном нулю.

**Выводы.** Получена математическая модель динамики кольца, вращающегося на опорах, при его обработке по безрамной технологии, которая может быть использована при выборе режимов обработки, а также при проектировании станочных модулей для безрамной обработки деталей. Получены зависимости для учета внутреннего трения в кольце при наличии прецессии стоячих волн. На основе анализа полученных уравнений сделан вывод, что при увеличении скорости вращения кольца его первая собственная частота уменьшается до нуля, при дальнейшем увеличении возникает расходящийся колебательный процесс — прецессионный резонанс. Дано физическое объяснение этого явления, подтвержденное результатами расчетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б и д е р м а н В. Л. Теория механических колебаний. – М: Высш. шк., 1980. – 408 с.
2. П о л у н и н А. И. Динамика прецессионного движения стоячих волн во вращающемся кольце с опорами // Труды VIII Международной научно-технической конференции “Вибрация-2008. Вибрационные машины и технологии”. – Курск: КГТУ, 2008. – С. 106–112.

Статья поступила в редакцию 12.05.2012

Александр Иванович Полуниин — канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры программного обеспечения Белгородского государственного технологического университета им. В.Г.Шухова.

A.I. Polunin — Ph. D. (Eng.), assoc. professor, professor of software department of the Belgorod State Technological University n.a. V.G. Shukhov.