УДК 539.3

Ю. И. Димитриенко, О. Ю. Димитриенко

ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Предложено обобщение уравнений механики сплошных сред для многомерного случая (n>3), основанное на специальном способе введения векторного произведения в многомерном евклидовом пространстве. Построены модели многомерных упругого, изотропного и жесткого тел. Показано, что в случае многомерного линейно-упругого изотропного тела число упругих констант равно 2, как и для 3-мерного случая. Для модели многомерного жесткого тела выведено тензорное уравнение изменения момента импульса, показано, что компонентная форма этого уравнения совпадает с известными уравнениями Эйлера–Арнольда. С помощью тензорной формы получены явные представления первых интегралов уравнения изменения момента импульса.

E-mail: dimit@serv.bmstu.ru

Ключевые слова: многомерное тело, механика сплошной среды.

Классическая механика сплошных сред (МСС) основана на аксиоме о трехмерности евклидова пространства, в котором вводятся все основные универсальные законы сохранения массы, импульса и энергии [1–6]. Существует также аксиоматика, обобщающая законы МСС для 4-мерного псевдоевклидова пространства [7], следствием которой является формулировка универсальных законов для релятивистских движений в рамках специальной (частной) теории относительности. В то же время создание общей теории относительности [8] и ее дальнейшее развитие в работах многих выдающихся ученых сразу было осуществлено для многомерных пространств произвольной размерности — евклидовых, псевдоевклидовых, римановых, аффинной связности и других [9]. В этой связи классическая МСС осталась как бы в стороне от общего магистрального движения — обобщения теорий на многомерный случай. Объясняется это, по-видимому, очевидной причиной — тем, что МСС в значительной мере наука, ориентированная на решение прикладных задач в обычном 3-мерном евклидовом пространстве и поэтому реальной необходимости в таких обобщениях нет. Однако в последнее время в связи с развитием новых научных направлений, прежде всего в физике, информатике, теории интеллектуальных систем, биотехнологиях, экономике [10] и других, снова возник интерес к многомерным обобщениям МСС, чему и посвящена настоящая работа, в которой развивается аксиоматический подход, предложенный ранее в [2–4] для классической МСС.

Многомерное евклидово пространство. Следуя систематизации аксиом МСС, предложенной в [2, 3], примем в качестве аксиомы 1 гипотезу о наличии континуумов (сплошных сред) в некотором метрическом пространстве χ, а в качестве аксиомы 2 положим, что это пространство χ является n-мерным точечно-евклидовым (аффинным) пространством E_n. Так же, как и в классической МСС, примем истинной аксиому 3 о существовании абсолютного времени t (т.е. релятивистскими эффектами пренебрегаем). Тогда, как и в 3-мерной МСС, можно ввести лагранжево-эйлерово описание движения тел (континуумов) в E_n с помощью закона движения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X^i, t)$, где $\boldsymbol{x} = x^i \mathbf{e}_i$ — радиус-вектор произвольной точки M в единой системе координат $O\mathbf{e}_i$, наличие которой гарантирует евклидовость пространства E_n ($\mathbf{e}_i$ — ортонормированный базис в E_n; x^i — декартовы (эйлеровы) координаты точки; $X^i = X^i(\overset{0}{x}{}^i)$ — лагранжевы координаты, $\overset{0}{x}{}^i$ — декартовы координаты в начальный момент времени). Здесь и далее $i = 1 \ldots n$.

Движение континуума V во времени в пространстве E_n характеризует градиент деформации $\mathbf{F}$, который связывает элементарные радиус-векторы $d\overset{0}{\boldsymbol{x}}$ и $d\boldsymbol{x}$ в начальный момент времени и в момент времени t: $d\boldsymbol{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{0}{\boldsymbol{x}}$. Полагая функции $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X^i, t)$ дифференцируемыми, стандартным образом вводим локальные векторы базиса $\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}(X^i, t)}{\partial X^j}$ и вектор скорости $\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}(X^i, t)}{\partial t}$ материальной точки, метрическую матрицу $g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j$, обратную метрическую матрицу $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, взаимные векторы базиса $\boldsymbol{r}^i = g^{ij} \boldsymbol{r}_j$ и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial X^j} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k\right)$. а также ковариантное дифференцирование в E_n [10] с помощью набла-оператора $\nabla = \boldsymbol{r}^i \dfrac{\partial}{\partial X^i}$.

Для того чтобы ввести понятия объема, нормали, ориентированной площадки и векторного произведения, введем ориентацию пространства E_n и для базисов одного класса рассмотрим в E_n полилинейные формы k-го порядка

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_k) = \sqrt{g} e_{i_1 \ldots i_n} a_1^{i_1} \ldots a_k^{i_k} \boldsymbol{r}^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{r}^{i_n}, \tag{1}$$

где $g = \det g_{ij}$; $a_1^{i_1}, \ldots, a_k^{i_k}$ — компоненты векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в базисе $\boldsymbol{r}_k$; $\otimes$ — знак операции тензорного умножения [10]; $e_{i_1 \ldots i_n}$ — n-мерные символы Леви-Чивиты [11]. Объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, определяется как полилинейная форма n-го порядка: $V = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n) = \sqrt{g} e_{i_1 \ldots i_n} a_1^{i_1} \ldots a_n^{i_n}$. Ориентированная площадка определяется как полилинейная форма $(n-1)$-го порядка $\boldsymbol{n}\Sigma = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{n-1}) = \sqrt{g} e_{i_1 \ldots i_n} a_1^{i_1} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}} \boldsymbol{r}^{i_n}$, т.е. это вектор, ортогональный к гиперплоскости S, представляющей собой линейную оболочку, натянутую на $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, где $\Sigma = |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{n-1})|$ — длина этого вектора, а $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{n-1})/\Sigma$ — вектор нормали к гиперплоскости S.

Векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ из E_n определим как полилинейную форму 1-го порядка

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2) = \sqrt{g} e_{i_1 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \boldsymbol{r}^{i_3} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{r}^{i_n}. \qquad (2)$$

Операция (2) известна в математике [12] в несколько иных обозначениях, но для обобщения МСС ранее не применялась. Формально эта операция сопоставляет двум векторам не вектор, а тензор $(n-2)$-го ранга (для случая $n = 3$ получаем тензор 1-го ранга, т.е. вектор).

С помощью тензора Леви-Чивиты

$$^n\text{э} = \sqrt{g} e_{i_1 \ldots i_n} \boldsymbol{r}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{r}^{i_n} \qquad (3)$$

векторное произведение (2) можно представить как свертку тензора 2-го ранга $\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1$ с тензором $^n\text{э}$:

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = (\boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{a}_1) \cdot \cdot {}^n\text{э}, \qquad (4)$$

в чем можно убедиться непосредственно.

Введем элементарный объем dV на элементарных радиус-векторах $d\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha dX^\alpha$ (по греческим индексам суммирования нет), ориентированных по координатным линиям X^α, и ориентированную элементарную площадку:

$$\begin{aligned} dV &= \boldsymbol{P}(d\boldsymbol{x}_1 \ldots d\boldsymbol{x}) = \sqrt{g}\, dX^1 \ldots dX^n; \\ \boldsymbol{n} d\Sigma &= \boldsymbol{P}(d\boldsymbol{x}_{i_1} \ldots d\boldsymbol{x}_{i_{n-1}}) = \sqrt{g}\, e_{i_1 \ldots i_n} \boldsymbol{r}^{i_n}. \end{aligned} \qquad (5)$$

В пространстве E_n для гладких в области V тензорных полей $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}, t)$ имеет место обобщенная теорема Гаусса–Остроградского [12] $\int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{A}\, d\Sigma.$

Законы сохранения массы и импульса. Введенные выше обозначения для "конструкций" многомерного пространства E_n позволяют достаточно формальным образом переформулировать аксиомы 3-мерной МСС на многомерный случай.

Для континуума V, состоящего из одних и тех же материальных точек, аксиоматически введем массу континуума M и вектор силы $\mathbf{f}$ взаимодействия континуума с внешними телами и подобно законам 3-мерной МСС сформулируем законы сохранения массы и импульса (аксиомы 4 и 5):

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \rho dV = 0; \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho \boldsymbol{v}\, dV = \int\limits_V \rho \boldsymbol{f}_m dV + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{t}_\Sigma d\Sigma, \tag{7}$$

где $\rho = dM/dV$ — плотность тела, $\boldsymbol{f}_m = d\boldsymbol{f}/dM$ — вектор плотности внешней массовой силы; $\boldsymbol{t}_\Sigma = d\boldsymbol{f}/d\Sigma$ — вектор поверхностных сил.

Закон изменения момента импульса. При попытке обобщения аксиомы 6 — закона изменения момента импульса — на многомерный случай возникает известная проблема: векторное произведение как операция, ставящая в соответствие паре векторов из E_n вектор (более строго — псевдовектор) из E_n, определено только для 3-мерного пространства. Разнообразные попытки обобщения этой операции на многомерный случай особого успеха, для задач обобщения МСС, не имели. Принципиально новым моментом развиваемой теории является введение в n-мерном пространстве обобщенной операции векторного произведения, определяемого соотношением (2): $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2)$.

Закон изменения момента импульса (аксиома 6) с учетом операции (3) постулирует существование следующего уравнения для каждого многомерного тела

$$\frac{d}{dt}({}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}}) = {}^{n-2}\boldsymbol{\mu}, \tag{8}$$

где ${}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}}$ — тензор момента импульса тела (тензор $(n-2)$-го ранга); ${}^{n-2}\boldsymbol{\mu}$ — тензор суммарных моментов внешних сил; при этом

$${}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}} = \int\limits_V \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\, dV; \tag{9}$$

$${}^{n-2}\boldsymbol{\mu} = {}^{n-2}\boldsymbol{\mu}_m + {}^{n-2}\boldsymbol{\mu}_\Sigma; \tag{10}$$

$${}^{n-2}\boldsymbol{\mu}_m = \int\limits_V \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}_m\, dV, \quad {}^{n-2}\boldsymbol{\mu}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_\Sigma\, d\Sigma. \tag{11}$$

Тензор напряжений Коши. Тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ для многомерного тела вводится так же, как и для 3-мерного, с помощью формулы Коши: $\boldsymbol{t}_\Sigma = \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{T}$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к площадке $d\Sigma$, на которой определен вектор поверхностных сил $\boldsymbol{t}_\Sigma$. Подставляя эту формулу в (7), стандартным способом [4] получаем уравнение движения для многомерного тела

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \boldsymbol{f}_m. \tag{12}$$

Подставляя формулу Коши в уравнение изменения моментов (8) с учетом соотношений (9)–(11), получаем

$$\int\limits_V \rho \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) dV = \int\limits_V \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}_m\, dV - \int\limits_V \nabla \cdot (\mathbf{T} \times \boldsymbol{x}) dV. \tag{13}$$

Поскольку $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}$, а также $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (это свойство непосредственно следует из определения (2)), то с учетом (4) имеем

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\times\boldsymbol{x}) = -\nabla\cdot(\mathbf{T}\otimes\boldsymbol{x})\cdot\cdot^{n}\text{э} = -((\nabla\cdot\mathbf{T})\otimes\boldsymbol{x})\cdot\cdot^{n}\text{э}-(\mathbf{e}^{i}\cdot\mathbf{T}\otimes\mathbf{e}_{i})\cdot\cdot^{n}\text{э} =$$

$$= -((\nabla\cdot\mathbf{T})\otimes\boldsymbol{x})\cdot\cdot^{n}\text{э} - \mathbf{T}^{\text{т}}\cdot\cdot^{n}\text{э} = \boldsymbol{x}\times(\nabla\cdot\mathbf{T}) - \mathbf{T}^{\text{т}}\cdot\cdot^{n}\text{э} \quad (14)$$

и уравнение (13) можно переписать так:

$$\int\limits_{V}(\boldsymbol{x}\times\left(\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \rho\boldsymbol{f}_{m} - \nabla\cdot\mathbf{T}\right) + \mathbf{T}^{\text{т}}\cdot\cdot^{n}\text{э})dV = 0. \quad (15)$$

Выражение во внутренних скобках равно нулю в силу уравнения (12), поэтому $\int\limits_{V}\mathbf{T}^{\text{т}}\cdot\cdot^{n}\text{э}\,dV = 0$, откуда в силу произвольности области V, получаем $\mathbf{T}^{\text{т}}\cdot\cdot^{n}\text{э} = 0$. Используя определение (3) тензора Леви-Чивиты, из этого соотношения получаем свойство симметрии тензора напряжений Коши, хорошо известное в 3-мерной МСС [2–4],

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\text{т}}. \quad (16)$$

Законы термодинамики для многомерного тела. Как и в 3-мерной МСС [1–4], с помощью аксиомы 7 (нулевой закон термодинамики) вводим абсолютную температуру $\theta > 0$ в точке тела, с помощью аксиом 8 и 9 — 1-й и 2-й законы термодинамики, постулирующие существование четырех термодинамических характеристик тела (внутренняя энергия U, скорость нагрева Q, энтропия H и производство энтропии $\bar{Q}^{*}$ за счет внутренних источников):

$$\frac{d}{dt}(U+K) = W + Q; \quad (17)$$

$$\frac{dH}{dt} = \bar{Q} + \bar{Q}^{*}, \quad \bar{Q}^{**} \geqslant 0, \quad (18)$$

где

$$U = \int\limits_{V}\rho e dV; \quad H = \int\limits_{V}\rho\eta dV; \quad \bar{Q}^{*} = \int\limits_{V}\rho q^{**}dV;$$

$$K = \int\limits_{V}\rho\frac{|\boldsymbol{v}|^{2}}{2}dV; \quad W = W_{m} + W_{\Sigma};$$

$$W_{m} = \int\limits_{V}\rho\boldsymbol{f}_{m}\cdot\boldsymbol{v}\,dV; \quad W_{\Sigma} = \int\limits_{\Sigma}t_{n}\cdot v d\Sigma;$$

$$Q = Q_{m} + Q_{\Sigma}; \quad \bar{Q} = \bar{Q}_{m} + \bar{Q}_{\Sigma}; \quad (19)$$

$$Q_m = \int\limits_V \rho q_m dV;\ Q_\Sigma = \int\limits_\Sigma q_\Sigma d\Sigma;\ \bar{Q}_m = \int\limits_V \frac{\rho q_m}{\theta} dV;\ \bar{Q}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \frac{q_\Sigma}{\theta} d\Sigma.$$

В уравнениях (17)–(19) K — кинетическая энергия; W — мощность внешних сил; $\bar{Q} = \bar{Q}_m + \bar{Q}_\Sigma$ — производство энтропии за счет внешних источников; $e = dH/dM$ и $\eta{=}dU/dM$ — плотности внутренней энергии и энтропии, $q_m{=}dQ/dM$ и $q_\Sigma = dQ/d\Sigma$ — плотности внешних массовых и поверхностных источников теплоты. Обобщенная теорема Коши [4] позволяет ввести вектор теплового потока на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$: $q_\Sigma = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}$, который полагают удовлетворяющим неравенству Фурье $\nabla\theta \cdot \boldsymbol{q} \leqslant 0$ (аксиома 10). Тогда, используя стандартные преобразования 3-мерной теории [4], из (17) и (18) получаем уравнения энергии и баланса энтропии

$$\rho \frac{de}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \mathbf{T} \cdot \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{v}^{\text{т}} + \rho q_m; \tag{20}$$

$$\rho\theta \frac{d\eta}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_m + w^*, \tag{21}$$

где $w^* = \rho q^* + \dfrac{q}{\theta} \cdot \nabla\theta \geqslant 0$ — функция диссипации.

Определяющие соотношения для многомерного тела. Вводя свободную энергию Гельмгольца $\psi = e - \theta\eta$, с помощью уравнений (20) и (21) получаем основное термодинамическое тождество

$$\rho \frac{d\psi}{dt} - \rho\eta \frac{d\theta}{dt} - \mathbf{T} \cdot \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{v}^{\text{т}} + w^* = 0. \tag{22}$$

В работах [4, 11] доказана теорема о том, что удельную мощность внутренних поверхностных сил можно представить в виде

$$\mathbf{T} \cdot \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{v}^{\text{т}} = \overset{(m)}{\mathbf{T}} \cdot \cdot \frac{d}{dt} \overset{(m)}{\mathbf{C}}, \tag{23}$$

где $\overset{(m)}{\mathbf{T}}$, $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$ — так называемые энергетические пары тензоров напряжений и деформаций, являющиеся симметричными тензорами и обладающие рядом важных свойств [3, 4]. Представление (23) имеет место и в многомерном случае.

Тензоры $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$ представляют собой степени от правого тензора искажений $\mathbf{U}$: $\overset{(m)}{\mathbf{C}} = \dfrac{1}{m-3}(\mathbf{U}^{m-3} - \mathbf{E})$, который в свою очередь определяется с помощью полярного разложения градиента деформации: $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}$ — симметричный положительно-определенный тензор, а $\mathbf{O}$ — ортогональный тензор поворота, сопровождающий деформацию.

Подставляя выражение (23) в основное термодинамическое тождество (22), получаем следующую дифференциальную форму:

$$\rho\, d\psi + \rho\eta\, d\theta - \overset{(m)}{\mathbf{T}} \cdot\cdot\, \overset{(m)}{\mathbf{C}} + w^* dt = 0, \tag{24}$$

которая связывает приращения четырех величин: ψ, θ, $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$ и $\mathbf{t}$. Как и в классической МСС, полагаем, что задана модель *идеального многомерного тела*, если потенциал ψ есть функция от аргументов θ, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, т.е. $\psi = \psi(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}})$. Подставляя это выражение в (24), в силу независимости дифференциалов $d\theta$, $d\overset{(m)}{\mathbf{C}}$, dt между собой, получаем, что это тождество эквивалентно системе соотношений

$$\overset{(m)}{\mathbf{T}} = \boldsymbol{F}(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(m)}{\mathbf{C}}}; \quad \eta = \eta(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \quad w^* = 0, \tag{25}$$

которые представляют собой определяющие соотношения многомерного твердого тела. Плотность внутренней энергии e также является функцией аргументов θ, $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$: $e = e(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \psi + \theta\eta = \psi - \theta\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$. При выводе соотношений (25) так же, как и в классической МСС, приняты аксиомы 11, 12 и 13 (принцип термодинамически согласованного детерминизма, принципы равноприсутствия и локальности) [2, 4].

Модель многомерного упругого тела. Согласно фундаментальным принципам материальной симметрии и материальной индифферентности (аксиомы 14 и 15), определяющие соотношения (25) не изменяются при замене одной отсчетной конфигурации K на другую с помощью любого унимодулярного $\boldsymbol{H}$-преобразования согласно соотношению $\overset{*}{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{H} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{r}}_i$, где $\overset{*}{\boldsymbol{r}}_i$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{r}}_i$ — локальные базисы двух отсчетных конфигураций. Как и в 3-мерной теории, будем называть многомерное тело *твердым*, если его определяющие соотношения (25) не изменяются при любых $\boldsymbol{H}$-преобразованиях $\boldsymbol{H} \in G_S$, где G_S — подгруппа полной ортогональной группы (ее обозначают как $SO(n)$). Идеальную твердую среду в E_n называем *многомерной упругой средой*. Определяющие соотношения (25) согласно принципу материальной симметрии должны удовлетворять соотношению

$$\psi(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \psi(\theta, \mathbf{H} \cdot \overset{(m)}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}), \quad \forall\mathbf{H} \in G_S \subset SO(n), \tag{26}$$

где $\mathbf{H}$ — ортогональный тензор из G_S.

Соотношение (26) означает, что зависимость $\psi = \psi(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}})$ должна быть представлена в виде функций от скалярных инвариантов тензора

$I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$, которые сами удовлетворяют соотношению (26):

$$\psi(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \psi(\theta, I_1(\overset{(m)}{\mathbf{C}}) \ldots I_r(\overset{(m)}{\mathbf{C}})); \tag{27}$$

$$I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}}) = I_\alpha(\mathbf{H} \cdot \overset{(m)}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{H}^{\text{т}}), \quad \forall \mathbf{H} \in G_S \subset SO(n), \quad \alpha = 1 \ldots r. \tag{28}$$

Тело, для которого группа G_S совпадает с $SO(n)$, назовем *многомерным изотропным телом*. Число r независимых скалярных инвариантов $I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$ симметричного тензора 2-го ранга $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$ относительно группы $G_S = SO(n)$ равно числу n — размерности пространства E_n. Это следует из свойства представимости всякого инварианта $I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$ вида (28) как функции собственных значений тензора $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$, число которых равно n. В качестве функционального базиса инвариантов $I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$ можно выбрать сами собственные значения, а также скалярные полиномы от $I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$ степени от 1 до n:

$$I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \mathbf{E} \cdot\cdot \overset{(m)}{\mathbf{C}}{}^\alpha = I_1(\overset{(m)}{\mathbf{C}}{}^\alpha), \quad \alpha = 1 \ldots n, \tag{29}$$

где $\overset{(m)}{\mathbf{C}}{}^\alpha = \overset{(m)}{\mathbf{C}} \underbrace{\cdot \ldots \cdot}_{\alpha} \overset{(m)}{\mathbf{C}}$ — тензорная степень, а $\mathbf{E}$ — метрический тензор. Вместо скалярного полинома n-й степени можно выбрать детерминант тензора $\det(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$.

Подставляя соотношения (27) в (25), получаем соотношения между напряжениями и деформациями многомерного изотропного тела

$$\overset{(m)}{\mathbf{T}} = F(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha \mathbf{I}_\alpha; \tag{30}$$

$$\varphi_\alpha(\theta, I_1(\overset{(m)}{\mathbf{C}}) \ldots I_r(\overset{(m)}{\mathbf{C}})) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})}, \tag{31}$$

где $\mathbf{I}_\alpha = \dfrac{\partial I_\alpha}{\partial \overset{(m)}{\mathbf{C}}}$ — тензоры производной от скалярных инвариантов. Вычисляя тензоры производной для полиномиальных инвариантов (29) с помощью методов работы [4], соотношение (30) можно записать так:

$$\overset{(m)}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{\varphi}_\alpha \overset{(m)}{\mathbf{C}}{}^\alpha. \tag{32}$$

Соотношение (31) показывает, насколько принципиально отличие определяющих соотношений для 3-мерного изотропного тела и многомерного изотропного тела при $n > 3$: если ввести классическую гипотезу о независимости потенциала (27) от старшего инварианта (обычно от $\det(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$), то для 3-мерных тел она неминуемо приводит к квазилинейности соотношений (32): $\overset{(m)}{\mathbf{T}} = \bar{\varphi}_1\mathbf{E} + \bar{\varphi}_2\overset{(m)}{\mathbf{C}}$. Для многомерного тела эта гипотеза лишь понижает степень тензорной нелинейности определяющих соотношений на 1, а для полной квазилинейности необходимо ввести допущения о независимости потенциала (27) от всех инвариантов $I_\alpha(\overset{(m)}{\mathbf{C}})$, $\alpha > 2$. Таким образом, можно сделать предварительный вывод о том, что квазилинейность соотношений (31), которая часто вводится в классической МСС, является следствием 3-мерности пространства, в пространстве же E_n эта гипотеза может потребовать более существенных обоснований.

Как и в классической МСС, можно ввести простейшее многомерное изотропное линейно-упругое тело, для которого зависимость (27) является квадратичной функцией от $\overset{(m)}{\mathbf{C}}$, а соотношение (31) — линейным:

$$\overset{\circ}{\rho}\psi(\theta, \overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{\lambda_1}{2} I_1^2(\overset{(m)}{\mathbf{C}}) + \lambda_2 I_2(\overset{(m)}{\mathbf{C}}); \tag{33}$$

$$\overset{(m)}{\mathbf{T}} = J(\lambda_1 I_1(\overset{(m)}{\mathbf{C}})\mathbf{E} + 2\lambda_2\overset{(m)}{\mathbf{C}}), \quad J = \rho/\overset{\circ}{\rho}. \tag{34}$$

Формально эти соотношения совпадают с аналогичными из 3-мерной теории, поэтому для многомерного линейно-упругого изотропного тела число упругих констант λ_1, λ_2 такое же, как и для 3-мерного тела, — оно равно 2. Этот вывод согласуется с известным в теории упругости переходом от 2-мерного случая к 3-мерному — число упругих констант в этом переходе остается неизменным, равным 2.

Растяжение многомерного бруса. Рассмотрим простейшую задачу нелинейной упругости с конечными деформациями — задачу о растяжении бруса, представляющего собой многомерный параллелепипед с длиной ребра l_0^i в начальной конфигурации и l^i в актуальной. Закон движения бруса задается в виде $x^\alpha = k_\alpha(t)X^\alpha$ (по α суммирования нет), где $k_\alpha(t)$ — коэффициенты кратности растяжения. Ему соответствует градиент деформации $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$, а тензоры деформации и их инварианты (29) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\overset{(m)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{m-3}\sum_{\alpha=1}^{n}(k_\alpha^{m-3}-1)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\mathbf{e}_\alpha;\\
&I_\gamma(\overset{(m)}{\mathbf{C}}) = \frac{1}{(m-3)^\gamma}\sum_{\alpha=1}^{n}(k_\alpha^{m-3}-1)^\gamma, \quad \gamma = 1\ldots n.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Подставляя эти выражения в (34), находим энергетический тензор напряжений

$$
\begin{aligned}
&\overset{(m)}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{n}\overset{(m)}{T}_{\alpha\alpha}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\alpha;\\
&\overset{(m)}{T}_{\alpha\alpha} = \frac{J}{m-3}\Big(\lambda_1\sum_{\gamma=1}^{n}(k_\gamma^{m-3}-1)+2\lambda_2(k_\alpha^{m-3}-1)\Big).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

С помощью формул из работы [4] и выражения (36) вычисляем тензор напряжений Коши:

$$
\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha\alpha}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\alpha, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = k_\alpha^{m-3}\overset{(m)}{T}_{\alpha\alpha},
\tag{37}
$$

который, как и в 3-мерном случае, не зависит от координат и, следовательно, автоматически удовлетворяет уравнениям квазистатического равновесия (12) при отсутствии массовых сил: $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$. Граничные условия положим следующими: гиперповерхность $x^1 = 0$ неподвижна, на гиперповерхности $x^1 = l_1$ задано ее растяжение, “боковые” гиперповерхности бруса $x^i = l^i$, $x^i = 0$, $i \neq 1$ свободны от нагрузок. Тогда все компоненты $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\alpha \neq 1$ обращаются в нуль, а коэффициенты k_α, $\alpha \neq 1$ совпадают между собой. В результате из (37) получаем систему двух уравнений

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{Jk_\alpha^{m-3}}{m-3}\Big(\lambda_1\sum_{\gamma=1}^{n}(k_\gamma^{m-3}-1)+2\lambda_2(k_\alpha^{m-3}-1)\Big);\\
&\lambda_1\sum_{\gamma=1}^{n}(k_\gamma^{m-3}-1)+2\lambda_2(k_\alpha^{m-3}-1) = 0.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Выражая из второго уравнения k_α, $\alpha \neq 1$, через k_1

$$
k_\alpha^{m-3} = 1-\nu(k_1^{m-3}-1), \quad \nu = \frac{\lambda_1}{(n-1)\lambda_1+2\lambda_2}, \quad \alpha = 2\ldots n,
\tag{39}
$$

и подставляя получившееся выражение в первое уравнение, получаем искомую зависимость напряжения σ_{11} от кратности удлинения k_1 в виде

$$\sigma_{11} = 2\lambda_2(1+\nu)\frac{k_1^{m-4}}{m-3}(k_1^{m-3}-1)(1-\nu(k_1^{m-3}-1))^{-\frac{n-1}{m-3}}. \qquad (40)$$

Здесь изменение плотности бруса $J = \rho/\overset{\circ}{\rho}$ получено с помощью уравнения неразрывности:

$$J = \rho/\overset{\circ}{\rho} = \overset{\circ}{V} = 1/(k_1 k_2^{n-1}) = k_1^{-1}(1-\nu(k_1^{m-3}-1))^{-\frac{n-1}{m-3}}.$$

Из формулы (40) следует, что размерность пространства n в задаче о растяжении бруса проявляется в виде двух эффектов, а именно: в виде зависимости многомерного коэффициента Пуассона ν от n (с увеличением n коэффициент Пуассона стремится к нулю) и виде зависимости изменения плотности J от n.

Модель многомерного жесткого тела. Рассмотрим теперь модель *многомерного жесткого тела* в пространстве E_n, расстояния между отдельными точками которого считаются постоянными. Закон движения жесткого тела имеет вид $x^j = x^{0j}(t) + Q_i^j(t)X^i$, где X^i — лагранжевы координаты; $x^{0j}(t)$ — координаты вектора поступательного движения центра масс; $Q_i^j(t)$ — ортогональная матрица поворота. В векторном представлении закон движения имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0(t) + \mathbf{Q}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}', \qquad (41)$$

где $\mathbf{Q} = Q^{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ — тензор поворота; $\tilde{\boldsymbol{x}}' = X^i\mathbf{e}_i$ — локальный радиус-вектор точек; $\bar{\mathbf{e}}_i' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_i$ — подвижный базис, который движется вместе с телом.

Дифференцируя (41) по времени t, получаем обобщение классической формулы Эйлера на n-мерный случай:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0 + \tilde{\boldsymbol{x}}\cdot\mathbf{W}, \qquad (42)$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0$ — относительный радиус-вектор в подвижной системе отсчета; $\boldsymbol{v}^0 = \dot{\boldsymbol{x}}^0$ — скорость движения центра вращения кластера;

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \qquad (43)$$

— кососимметричный тензор вращения тела.

Если подвижная система отсчета $M_0\mathbf{e}_i'$ выбрана так, что центр вращения M_0 совпадает с центром масс $\boldsymbol{x}^0 = \dfrac{1}{M}\int\limits_V \rho\boldsymbol{x}\,dV$, то средняя скорость тела совпадает с $\boldsymbol{v}^0$: $\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{1}{M}\int\limits_V \rho\boldsymbol{v}\,dV = \boldsymbol{v}^0$.

Подставляя формулу (42) в (7) и учитывая, что $\dfrac{1}{M}\int\limits_V \rho\tilde{\boldsymbol{x}}\,dV =$

$= \dfrac{1}{M}\int\limits_V \rho \boldsymbol{x}\, dV - \boldsymbol{x}^0 = 0$, получаем следующее уравнение:

$$M\frac{d\boldsymbol{v}^0}{dt} = \mathbf{f}, \tag{44}$$

где

$$\mathbf{f} = \int\limits_V \rho \boldsymbol{f}_m dV + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{t}_\Sigma d\Sigma. \tag{45}$$

Подставим формулу (42) в (9) и с учетом формулы (4) получим выражение для тензора моментов

$$ {}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}} = \int\limits_V \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\, dV = \int\limits_V \rho \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}^0 dV + \int\limits_V \rho \boldsymbol{x} \times (\tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{W}) dV =$$

$$= \boldsymbol{x}^0 \times \boldsymbol{v}^0 + \int\limits_V (\mathbf{W}^{\mathrm{т}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{x}^0)) \cdot \cdot {}^n\text{э}\, dV + \int\limits_V (\mathbf{W}^{\mathrm{т}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{x}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}})) \cdot \cdot {}^n\text{э}\, dV. \tag{46}$$

Поскольку $\boldsymbol{x}^0$ и $\mathbf{W}$ не зависят от координат, то формула (46) преобразуется к окончательному виду

$$ {}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}} = M\boldsymbol{x}^0 \times \boldsymbol{v}^0 + (\mathbf{W}^{\mathrm{т}} \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^n\text{э}, \tag{47}$$

где $\mathbf{I} = \int\limits_V \rho \tilde{\boldsymbol{x}} \otimes \tilde{\boldsymbol{x}}\, dV$ — тензор моментов инерции многомерного тела.

Подставляя выражение (47) в уравнение моментов (8), получаем дифференциальное уравнение для тензора вращения $\mathbf{W}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{W}^{\mathrm{т}} \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^n\text{э} = {}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tag{48}$$

где

$$ {}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \int\limits_V \rho \tilde{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{f}_m dV + \int\limits_\Sigma \tilde{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{t}_\Sigma\, d\Sigma. \tag{49}$$

Уравнения движения жесткого тела в подвижном базисе. Представим тензоры $\mathbf{W}$ и $\mathbf{I}$ в подвижном базисе $\bar{\mathrm{e}}'_i$: $\mathbf{W} = W'^{ij}\bar{\mathrm{e}}'_i \otimes \bar{\mathrm{e}}'_j$ и $\mathbf{I} = I'^{ij}\bar{\mathrm{e}}'_i \otimes \bar{\mathrm{e}}'_j$. Скорость подвижного базиса определяется тензором вращения $\dot{\bar{\mathrm{e}}}'_i = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{т}} \cdot \bar{\mathrm{e}}'_i = -\mathbf{W} \cdot \bar{\mathrm{e}}'_i$. Скорость изменения тензоров 2-го ранга можно представить с помощью производной Яуманна $\mathbf{I}^J = \dfrac{dI'^{ij}}{dt}\bar{\mathrm{e}}'_i \otimes \bar{\mathrm{e}}'_j$ [4]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{I} = \mathbf{I}^J - \mathbf{W} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{W}^{\mathrm{т}}; \quad \frac{d}{dt}\mathbf{W}^{\mathrm{т}} = \mathbf{W}^{TJ} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{\mathrm{т}} + \mathbf{W}^{\mathrm{т}} \cdot \mathbf{W}; \tag{50}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I})=\mathbf{W}^{TJ}\cdot\mathbf{I}-\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I}+\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{W}, \tag{51}$$

поскольку $\mathbf{I}^J=0$. Подставляя (51) в (48), получаем

$$(\mathbf{W}^{TJ}\cdot\mathbf{I}-\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I})\cdot\cdot\,{}^n\text{э}={}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}. \tag{52}$$

Здесь учтено, что тензор $\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{W}$ симметричен и, следовательно, $(\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{W})\cdot\cdot\,{}^n\text{э}=0$. Примем во внимание, что

$${}^n\text{э}\cdot\underbrace{\ldots}_{n-2}\cdot\,{}^n\text{э}=k_{(n-2)}(\Delta_{II}-\Delta_{III}),$$

где $\Delta_{II}=\boldsymbol{r}^{i_1}\otimes\boldsymbol{r}^{i_2}\otimes\boldsymbol{r}_{i_1}\otimes\boldsymbol{r}_{i_2}$ и $\Delta_{III}=\mathbf{e}^{i_1}\otimes\mathbf{e}^{i_2}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\mathbf{e}_{i_1}$ — второй и третий единичные тензоры 4-го ранга [2], $k_{(n-2)}=(-1)^{|n\ldots1|}(n-2)!$ ($|n\ldots1|$ — число инверсий подстановки). Тогда, умножая уравнение (52) скалярно на ${}^n\text{э}$, получаем

$$(\mathbf{W}^{TJ}\cdot\mathbf{I}-\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I})\cdot\cdot(\Delta_{II}-\Delta_{III})=\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tag{53}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{k_{(n-2)}}{}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\underbrace{\ldots}_{n-2}\cdot\,{}^n\text{э}=$$
$$=\frac{1}{k_{(n-2)}}\left(\int\limits_V\rho(\tilde{\boldsymbol{x}}\otimes\boldsymbol{f}_m-\boldsymbol{f}_m\otimes\tilde{\boldsymbol{x}})dV+\int\limits_\Sigma(\tilde{\boldsymbol{x}}\otimes\boldsymbol{t}_\Sigma-\boldsymbol{t}_\Sigma\otimes\tilde{\boldsymbol{x}})d\Sigma\right)$$

— кососимметричный тензор 2-го ранга.

Принимая во внимание свойства единичных тензоров 4-го ранга $\mathbf{A}\cdot\cdot\Delta_{II}=\mathbf{A}^{\text{т}}$, $\mathbf{A}\cdot\cdot\Delta_{III}=\mathbf{A}$, получаем окончательный вид уравнения (53)

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{W}^J+\mathbf{W}^J\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^{\text{т}}-\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^{\text{т}}\cdot\mathbf{I}+\tilde{\boldsymbol{\mu}}. \tag{54}$$

Тензорное уравнение (54) является обобщением динамических уравнений Эйлера на n-мерный случай. В компонентах в подвижном базисе уравнение (54) записывается так:

$$(I'^i_k\delta^j_l+I'^j_l\delta^i_k)\frac{dW'^{kl}}{dt}=(I'^i_k\delta^j_s-I'^j_s\delta^i_k)W'^{kl}W'^s_l+\tilde{\mu}'^{ij}. \tag{55}$$

В таком виде это уравнение известно как уравнение Эйлера–Арнольда [14–16]. Если подвижный базис $\bar{\mathrm{e}}'_i$ выбрать совпадающим с собственным базисом $\overset{\circ}{\mathbf{e}}{}'_i$ тензора моментов инерции $\mathbf{I}$, то матрица компонент I'^i_k тензора моментов инерции в этом базисе — диагональная: $I'^i_\alpha=I_\alpha\delta^i_\alpha$, где $I_\alpha=$ const >0, $\alpha=1\ldots n$ — собственные значения, вещественные и положительные. Тогда уравнение (55) примет вид

$$\frac{dW'^{\alpha\beta}}{dt}=\frac{I_\alpha-I_\beta}{I_\alpha+I_\beta}\sum_{k=1}^n W'^{\alpha k}W'^{\beta k}+\frac{\tilde{\mu}'^{\alpha\beta}}{I_\alpha+I_\beta}. \tag{56}$$

Из (43) следуют обобщенные уравнения Пуассона для определения тензора $\mathbf{Q}$

$$\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} = 0. \qquad (57)$$

Первые интегралы при отсутствии внешних сил. Вопросы нахождения первых интегралов уравнений (56) при различных допущениях о виде моментов внешних сил $\tilde{\mu}'^{\alpha\beta}$ рассматривались в ряде работ [15–18] . Покажем, что полученные тензорные формы (54) и (48) уравнения изменения момента импульса иногда более предпочтительны, чем компонентная форма (56), поскольку позволяют получить явные представления первых интегралов.

Пусть момент внешних сил ${}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ равен нулю. Поиск ненулевого решения уравнений (56) в этом случае далеко не очевиден. В то же время тензорное уравнение (48) имеет очевидное решение

$$(\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^{n}\text{э} = {}^{n-2}\mathbf{b}, \qquad (58)$$

где ${}^{n-2}\mathbf{b}$ — постоянный (не зависящий от времени) тензор $(n-2)$-го ранга, компоненты $b_{i_3\ldots i_n}$ этого тензора в неподвижном базисе $\mathbf{e}_j$ также не зависят от времени, а в подвижном $\bar{\mathbf{e}}'_i$ являются функциями от t: ${}^{n-2}\mathbf{b} = b'_{i_3\ldots i_n}(t)\bar{\mathbf{e}}'^{i_3}(t) \otimes \ldots \otimes \bar{\mathbf{e}}'^{i_n}(t) = b_{i_3\ldots i_n}\mathbf{e}^{i_3} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{i_n}$. Если заданы начальные данные

$$t = 0: \quad \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}_0^0, \quad \boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}_0^0, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0, \quad {}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}} = {}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}}_0 \equiv \int\limits_{\mathring{V}} \mathring{\rho}\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}_0 \, d\mathring{V}, \qquad (59)$$

то можно явным образом найти ${}^{n-2}\mathbf{b} = {}^{n-2}\bar{\boldsymbol{m}}_0 - M\boldsymbol{x}_0^0 \times \boldsymbol{v}_0^0$.

Умножим уравнения (58) на тензор ^{n}э, тогда получим следующее алгебраическое уравнение относительно тензора $\mathbf{W}$:

$$(\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot (\Delta_{II} - \Delta_{III}) = \mathbf{b}, \qquad (60)$$

при этом

$$\mathbf{b} = \frac{1}{k_{(n-2)}} {}^{n-2}\mathbf{b} \underbrace{\cdots}_{n-2} \cdot {}^{n}\text{э} = \frac{1}{k_{(n-2)}} ({}^{n-2}\bar{\mathbf{m}}_0^0 - M\mathbf{x}_0^0 \times \mathbf{v}_0^0) \underbrace{\cdots}_{n-2} \cdot {}^{n}\text{э}; \qquad (61)$$

$$\mathbf{b} = b^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = b'^{ij}(t)\bar{\mathbf{e}}'_i(t) \otimes \bar{\mathbf{e}}'_j(t); \qquad (62)$$

$$k_{(n-2)}b^{ij} = J_0^{ij} - J_0^{ji} - M(x_0^{0i}v_0^{0j} - x_0^{0j}v_0^{0i}); \qquad (63)$$

$$b'^{kl}(t) = b^{ij}Q_i^k(t)Q_j^l(t), \qquad (64)$$

где $\mathbf{x}_0^0 = x_0^{0i}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_0^0 = v_0^{0i}\mathbf{e}_i, \; J_0^{ij} = \int\limits_{\mathring{V}} \mathring{\rho}x^i v_0^j \, d\mathring{V}$. Записывая уравнение (60) в подвижном базисе, с учетом соотношений (64) получаем явное решение для компонент тензора вращения

$$W'^{\alpha\beta} = \frac{1}{I_\alpha + I_\beta} b^{ij} Q_{\alpha i} Q_{\beta j}; \tag{65}$$

здесь по α, β суммирования нет, а по i, j есть.

Подставляя теперь выражение (65) в уравнение Пуассона (57), получаем уравнение для вычисления элементов матрицы поворота $Q_{\beta p}$

$$\dot{Q}_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma,s,p=1}^{n} \frac{b^{sp}}{I_\gamma + I_\beta} Q_{\alpha\gamma} Q_{\gamma s} Q_{\beta p} = 0. \tag{66}$$

В этой системе только $\dfrac{n^2 - n}{2}$ независимых уравнений, т.е. столько же, сколько независимых элементов у ортогональной матрицы Q_p^β.

Выводы. Предложенный способ введения векторного произведения в многомерном евклидовом пространстве позволил обобщить аксиомы и основные уравнения механики сплошных сред для многомерного случая ($n > 3$), формально записывая их по тем же самым правилам, что и для классического 3-мерного случая. Предложены модели многомерного твердого, многомерного упругого, многомерного изотропного и многомерного жесткого тел. Показано, что для многомерного линейно-упругого изотропного тела число упругих констант равно 2, как и для 3-мерного случая. Решена задача о растяжении многомерного бруса. Для модели многомерного жесткого тела выведено тензорное уравнение изменения момента импульса и показано, что компонентная форма этого уравнения совпадает с известными уравнениями Эйлера–Арнольда. С помощью тензорной формы получены явные представления первых интегралов уравнения изменения момента импульса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Т р у с д е л л К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
3. D i m i t r i e n k o Y u. I. Tensor analysis and nonlinear tensor functions. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 662 p.
4. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. – М.: Физматлит, 2009. – 624 с.
5. П о б е д р я Б. Е., Г е о р г и е в с к и й Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М.: Физматлит, 2006. – 272 с.
6. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2008.
7. С е д о в Л. И., Ц ы п к и н А. Г. Основы макроскопической теории гравитации и электромагнетизма. – М.: Наука, 1989. – 272 с.

8. П е т р о в А. З. Пространства Эйнштейна. – М.: Физматгиз, 1961. – 464 с.
9. Д у б р о в и н Б. А., Н о в и к о в С. П., Ф о м е н к о А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
10. Д и м и т р и е н к о О. Ю. Мультиагентная модель для стратегического маркетингового планирования / Актуальные проблемы фундаментальных наук. Сб. тр. III науч.-методич. конф. аспирантов и молодых исследователей, февраль 2009. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2009. – С. 9–12.
11. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
12. Е ф и м о в Н. В., Р о з е н д о р н Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
13. С х о у т е н Я. А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965. – 465 с.
14. А р н о л ь д В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости // УМН. – 1969. – Т. 24. – № 3. – С. 225–226.
15. З е н к о в Д. В., К о з л о в В. В. Геометрическое представление Пуансо в динамике многомерного твердого тела // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – 1988. – Вып. XXIII. – С. 202–204.
16. М а н а к о в С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – Т. 10. – Вып. 4. – С. 93–94.
17. Б е л я е в А. В. О движении многомерного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести // Математический сборник. – 1981. – Т. 114. – № 3. – С. 465–470.
18. J o v a n o v i c B. Some multidimensional integrable cases of nonholonomic rigid body dynamics // Regular and chaotic dynamics. – 2003. – Vol. 8. No. 1. – P. 125–132.

Статья поступила в редакцию 29.03.2010

Юрий Иванович Димитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 160 научных работ в области вычислительной механики, нелинейного тензорного анализа, термомеханики композитов, математического моделирования в материаловедении.

Yu.I. Dimitrienko (b.1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Full member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of more than 160 publications in the field of computational mechanics, nonlinear tensor analysis, thermomechanics of composite materials, mathematical simulation in science of materials.

Ольга Юрьевна Димитриенко родилась в 1985 г., окончила в 2007 г. Российскую экономическую академию им. Г.В. Плеханова. Аспирантка МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда работ в области математического моделирования в экономике.

O.Yu. Dimitrienko (b. 1985) graduated from the Russian Economical Academy n.a. G.V. Plekhanov in 2007. Post-graduate of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of mathematical simulation in economics.