

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОМ ПРОЦЕССЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Л.К. Мартинсон, О.Ю. Чигирёва

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: mathmod@bmstu.ru

Рассмотрена одномерная краевая задача для квазилинейного уравнения параболического типа. Задача описывает процесс распространения тепловых возмущений в плоском слое, заполненном средой с объемным поглощением теплоты, удельная мощность которой зависит от температуры степенным образом. Для нахождения численного решения задачи использована разностная схема. Приведены результаты расчетов температурных полей в слое в различные моменты времени при определенных значениях параметров задачи. С помощью теоретических выводов и проведенных численных расчетов установлен нелинейный эффект пространственной локализации тепловых возмущений, когда тепловые возмущения от нагретой поверхности проникают в среду лишь на конечную глубину.

Ключевые слова: краевая задача нелинейной теплопроводности, квазилинейное уравнение параболического типа, эффект пространственной локализации тепловых возмущений.

SPATIAL LOCALIZATION OF THERMAL PERTURBATIONS IN NONLINEAR PROCESS OF HEAT CONDUCTION

L.K. Martinson, O.Yu. Chigireva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: mathmod@bmstu.ru

A one-dimensional boundary problem for a quasi-linear parabolic-type equation is considered. The problem describes the thermal perturbation propagation in a planar layer filled with the medium with volume heat absorption, whose specific power presents a power function of temperature. A difference scheme is used for finding a numerical solution to the problem. Results of calculations of temperature fields in the layer at different moments of time with the certain values of the problem parameters are given. Using theoretical inferences and data of performed numerical calculations, the nonlinear effect of spatial localization of thermal perturbations is established when thermal perturbations from the heated surface penetrate the medium only to a finite depth.

Keywords: boundary problem of nonlinear heat conduction, quasi-linear parabolic-type equation, effect of spatial localization of thermal perturbations.

Введение. Из общей теории дифференциальных уравнений математической физики следует, что наличие нелинейностей в этих уравнениях не только изменяет количественные характеристики процессов, описываемых указанными уравнениями, но и качественно изменяет характер протекания таких процессов. Так, в процессах теплопроводности, описываемых нелинейными уравнениями параболического типа, могут наблюдаться эффекты конечной скорости распространения и пространственной локализации тепловых возмущений, отсутствующие в линейных процессах теплопроводности [1].

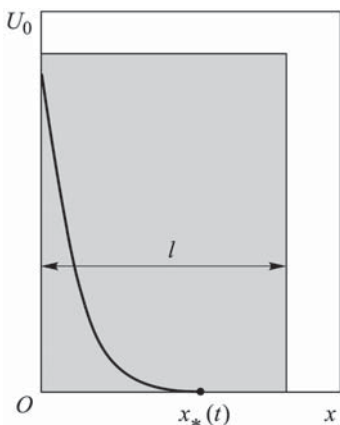


Рис. 1. Качественный вид температурного профиля тепловой волны в слое в фиксированный момент времени

этого слоя поддерживается температура U_0 , а на поверхности $x = l$ — нулевая температура. Во внутренних точках слоя происходит поглощение теплоты, удельная мощность которой составляет $f(u) = p_0 u^\alpha$, где $\alpha > 0$; $p_0 > 0$ — коэффициент поглощения.

Математическая модель процесса имеет вид

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p_0 u^\alpha, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < l; \\ u(0, t) &= U_0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , c , λ — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности.

Особенность решения такого класса задач заключается в том, что при $\alpha < 1$ наблюдаются эффекты конечной скорости и пространственной локализации возмущений. В этом случае тепловое возмущение от нагретой поверхности $x = 0$ распространяется в виде тепловой волны (рис. 1) с конечной скоростью перемещения ее фронта $x_*(t)$. Кроме того, при определенных значениях параметров задачи тепловое возмущение проникает в слой на конечную глубину и не достигает поверхности $x = l$ при $t \rightarrow \infty$.

Фронт тепловой волны. Отметим, что существует точное стационарное решение уравнения в задаче (1), которое имеет вид

$$u_{st}(x) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}, & x < L; \\ 0, & x \geq L. \end{cases}$$

Необходимо отметить, что в работе [2] был обоснован следующий вывод: такие нелинейные эффекты могут наблюдаться и при наличии нелинейностей только в младших членах квазилинейных параболических уравнений. Результаты настоящей работы подтверждают этот вывод.

Физическая постановка задачи и математическая модель процесса. Рассмотрим задачу о нахождении нестационарного температурного поля $u(x, t)$ в плоском слое конечной толщины l . В начальный момент времени ($t = 0$) температура слоя равна нулю. При $t > 0$ на поверхности $x = 0$

Здесь

$$L = \left[\frac{2U_0^{1-\alpha} a^2 (1 + \alpha)}{p(1 - \alpha)^2} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (2)$$

$$a^2 = \lambda / (\rho c); p = p_0 / (\rho c).$$

Далее исследуем задачи, для которых $L < l$, когда в задаче (1) наблюдается эффект пространственной локализации тепловых возмущений.

Согласно теоремам сравнения, приведенным в работе [3], существование стационарного решения (2) означает следующее: для любого $t \in [0, \infty)$ решение задачи (1) мажорируется стационарным решением, т.е. $u(x, t) \leq u_{st}(x)$. Это позволяет записать приближенное решение задачи (1) в форме тепловой волны с конечной скоростью перемещения ее фронта

$$u(x, t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x}{x_*(t)} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}}, & x < x_*(t); \\ 0, & x \geq x_*(t). \end{cases} \quad (3)$$

Для нахождения закона движения фронта тепловой волны запишем интегральное условие теплового баланса

$$\int_0^{x_*(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} - p \int_0^{x_*(t)} u^\alpha(x, t) dx, \quad (4)$$

в котором учтено условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_*(t)} = 0,$$

соответствующее равенству нулю теплового потока на фронте $x = x_*(t)$.

Подставляя предполагаемую форму решения (3) в (4) и вычисляя интегралы в обеих частях равенства (4), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d(x_*^2(t))}{dt} = b_0 - b_1 x_*^2(t), \quad (5)$$

где b_0, b_1 — постоянные, определяемые по выражениям $b_0 = 4a^2 \frac{3 - \alpha}{(1 - \alpha)^2}$,

$$b_1 = 2U_0^{\alpha-1} p \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Очевидно, что искомая функция должна удовлетворять начальному условию

$$x_*(0) = 0. \quad (6)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (5) и учитывая начальное условие (6), находим

$$x_*(t) = \sqrt{\frac{b_0}{b_1}} (1 - \exp(-b_1 t)).$$

Отметим, что $b_0/b_1 = L^2$ (значение L вычисляется по (2)), тогда

$$x_*(t) = L\sqrt{1 - \exp(-b_1 t)}. \quad (7)$$

При рассматриваемых в задаче (1) значениях параметра α ($0 < \alpha < 1$) выражение $(3 - \alpha) / (1 + \alpha)$, определяющее знак постоянной b_1 , принимает положительные значения.

Решение (3) описывает тепловое возмущение, распространяющееся в виде тепловой волны, фронт $x_*(t)$ которой перемещается с конечной скоростью. Закон движения $x_*(t)$ имеет вид (7) и представлен на рис. 2. Особенность этой зависимости — при $t \rightarrow \infty$ координата фронта x_* стремится к конечному значению L .

Разностная схема. Для численного решения исходной задачи используем разностную схему. В области $D = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ зададим равномерную сетку $\omega_{h\tau} = \left\{ (x_n, t_m) : x_n = nh, t_m = m\tau, n = \overline{0, N}, m = \overline{0, M} \right\}$ с шагами $h = l/N$ и $\tau = T/M$ по переменным x и t соответственно.

Обозначим $y_n = y(x_n, t_m)$, $\hat{y}_n = y(x_n, t_{m+1})$, $f_n = f(y_n)$, $\hat{f}_n = f(\hat{y}_n)$ и, используя шеститочечный шаблон (рис. 3), запишем разностную схему с полусуммой [4]:

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = \frac{a^2}{2} \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \frac{a^2}{2} \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - \hat{f}_n, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (8)$$

Из граничных условий находим $\hat{y}_0 = U_0$, $\hat{y}_N = 0$.

Разностная схема (8) является нелинейной. Для ее решения применим метод последовательных приближений

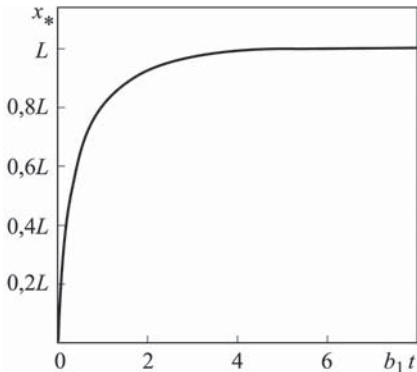


Рис. 2. Характер изменения положения фронта тепловой волны

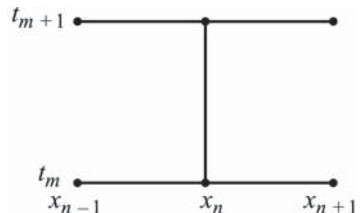


Рис. 3. Шеститочечный шаблон разностной схемы

$$\frac{\widehat{y}_n^{(k)} - y_n}{\tau} = \frac{a^2}{2} \frac{\widehat{y}_{n-1}^{(k)} - 2\widehat{y}_n^{(k)} + \widehat{y}_{n+1}^{(k)}}{h^2} + \frac{a^2}{2} \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - \widehat{f}_n^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\widehat{y}_n^{(0)} = y_n.$$

Опишем итерационную процедуру нахождения решения на временном слое t_{m+1} .

Шаг 1 ($k = 1$). За нулевое приближение $\widehat{f}_n^{(0)}$ принимаем значение f_n с предыдущего временного слоя t_m и определяем первое приближение $\widehat{y}_n^{(1)}$ решения \widehat{y}_n .

Шаг 2 ($k = 2$). Используя значение $\widehat{y}_n^{(1)}$, вычисляем $\widehat{f}_n^{(1)} = f(\widehat{y}_n^{(1)})$, а затем – второе приближение $\widehat{y}_n^{(2)}$ решения \widehat{y}_n и т.д.

Шаг k. Величины $\widehat{y}_n^{(k)}$, $n = 1, N - 1$, могут быть найдены методом прогонки из решения трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & -2 \left(a^2 + \frac{h^2}{\tau} \right) \widehat{y}_1^{(k)} + a^2 \widehat{y}_2^{(k)} = \\ & = 2 \left(a^2 - \frac{h^2}{\tau} \right) y_1 - a^2 (y_0 + y_2) + 2h^2 \widehat{f}_1^{(k-1)} - a^2 \widehat{y}_0^{(k)}; \\ & a^2 \widehat{y}_{n-1}^{(k)} - 2 \left(a^2 + \frac{h^2}{\tau} \right) \widehat{y}_n^{(k)} + a^2 \widehat{y}_{n+1}^{(k)} = 2 \left(a^2 - \frac{h^2}{\tau} \right) y_n - \\ & \quad - a^2 (y_{n-1} + y_{n+1}) + 2h^2 \widehat{f}_n^{(k-1)}, \quad n = 2, N - 2; \\ & a^2 \widehat{y}_{N-2}^{(k)} - 2 \left(a^2 + \frac{h^2}{\tau} \right) \widehat{y}_{N-1}^{(k)} = \\ & = 2 \left(a^2 - \frac{h^2}{\tau} \right) y_{N-1} - a^2 (y_{N-2} + y_N) + 2h^2 \widehat{f}_{N-1}^{(k-1)} - a^2 \widehat{y}_N^{(k)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Элементы матрицы системы (9) удовлетворяют условиям диагонального преобладания, которые являются достаточными условиями того, что в формулах для определения прогоночных коэффициентов ни один из знаменателей не обращается в нуль, а обратная прогонка устойчива по входным данным [5].

Для выбора значений шагов h и τ может быть применена методика, изложенная в работе [6].

Пример численного расчета. Приведем результаты численного расчета для задачи вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 48u^{1/2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < 1; \\ u(0, t) &= 1, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

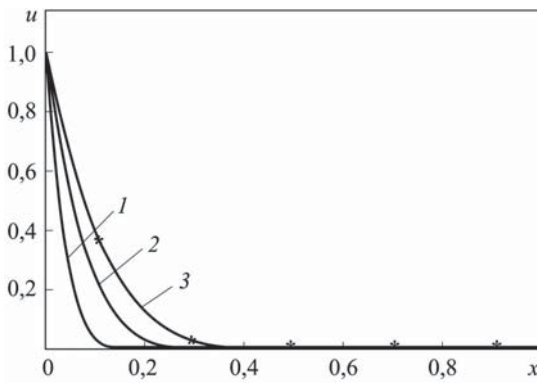


Рис. 4. Распределения температуры в фиксированные моменты времени при $t_1 = 0,001$ (1), $t_2 = 0,005$ (2) и $t_3 = 0,1$ с (3) (--- — стационарный профиль)

В примере $\alpha = 1/2 < 1$, поэтому наблюдаются все эффекты, которые были рассмотрены ранее.

Распределения температуры для трех моментов времени приведены на рис. 4. Для этих кривых значения фронтовых точек равны: $x_{1*} = 0,10$; $x_{2*} = 0,37$; $x_{3*} = 0,49$.

Расчеты показали, что при $t > t_3$ процесс выходит на стационарный режим

$$u_{st}(x) = \begin{cases} (1 - 2x)^4, & x < 0,5; \\ 0, & x \geq 0,5. \end{cases}$$

Следует отметить, что значение относительной погрешности приближенного решения при $t = t_3$ по сравнению со стационарным решением, не превышает 0,1% и в последующие моменты времени не увеличивается.

В задаче (10) при $t \rightarrow \infty$ тепловое возмущение проникает в слой на конечную глубину ($L = 0,5$), причем за пределами этой глубины ($0,5 \leq x \leq 1$), температура равна нулю, т.е. тепловое возмущение, распространяющееся от левой поверхности $x = 0$, не достигает правой поверхности $x = 1$.

Выводы. Численное решение краевой задачи (1) для квазилинейного параболического уравнения подтверждает теоретический вывод, что при некоторых значениях параметров в задаче наблюдается эффект пространственной локализации возмущений. При наличии этого эффекта тепловые возмущения от нагретой поверхности проникают в слой лишь на конечную глубину даже за неограниченный промежуток времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
2. Мартинсон Л.К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением / В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 279–309.

3. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
4. Баквалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. 624 с.
5. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
6. Матус П.П. О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщенными решениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.

REFERENCES

- [1] Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, MGТУ im. N.E. Bauman Publ., 2002. 368 p.
- [2] Martinson L.K. The study of the mathematical model of the nonlinear heat conduction in media with volume absorption (in: Samarskiy A.A., Kurdyumov S.P., Galaktionov V.A. *Matematicheskoe modelirovanie. Protssy v nelineynykh sredakh* [Mathematical modeling. Processes in nonlinear media]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 308 p.), pp. 279–309 (in Russ.).
- [3] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Sharpening regimes in problems for quasi-linear parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 480 p.
- [4] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Laboratoriya Bazovykh Znaniy Publ., 2000. 624 p.
- [5] Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* [Computational methods for engineers]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1994. 544 p.
- [6] Matus P.P. Well-posedness of difference schemes for semilinear parabolic equations with weak solutions. *J. Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 12, pp. 2044–2063.

Статья поступила в редакцию 20.03.2013

Леонид Карлович Мартинсон — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области математического моделирования нелинейных процессов переноса, соавтор трех учебников по математике и физике для вузов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

L.K. Martinson — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 150 publications in the field of mathematical simulation of nonlinear transfer process, co-author of three textbooks in mathematics and physics for higher education institutions.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Ольга Юрьевна Чигирёва — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области математической физики и математического моделирования.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

O.Yu. Chigireva — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of mathematical physics and mathematical simulation.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.