

УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ НА ЭЛЕМЕНТАХ СОСТАВНОГО МУЛЬТИАТТРАКТОРА

В.Г. Прокопенко

НКБ “Миус” Южного федерального университета, Таганрог
e-mail: vadipro@yandex.ru

Рассмотрен способ управления распределением вероятностей движения на элементах мультиаттрактора, состоящего из множества одинаковых хаотических аттракторов. Показана возможность такого управления путем смещения границ между ячейками фазового пространства, содержащими отдельные аттракторы.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, автостochasticкая система, составной мультиаттрактор, реплицирующий оператор, хаотический аттрактор, аттрактор Лоренца, аттрактор Чуа.

MANAGEMENT OF DISTRIBUTION OF MOVEMENT PROBABILITIES OVER COMPONENTS OF COMPOUND MULTIATTRACTOR

V.G. Prokopenko

Mius Scientific and Design Bureau of Southern Federal University, Taganrog, Russia
e-mail: vadipro@yandex.ru

The way of management of distribution of movement probabilities over components of a multiattractor consisting of a set of identical chaotic attractors is discussed. The feasibility of such management is shown by moving borders between the phase space cells containing separate attractors.

Keywords: nonlinear dynamic system, auto stochastic system, compound multiattractor, replication operator, chaotic attractor, the Lorenz attractor, the Chua attractor.

Составной (или композиционный) хаотический мультиаттрактор представляет собой предельное множество, содержащее более или менее многочисленную группу областей притяжения (локальных хаотических аттракторов), в каждой из которых фазовая траектория остается достаточно долго, совершая хаотические колебания и время от времени — переходы между соседними областями [1]. То есть движение на таких мультиаттракторах является совокупностью двух составляющих — хаотического движения на локальных аттракторах и случайных переходов между ними [2–3]. Представляет интерес исследование возможности управления хаотическими колебаниями таких динамических систем не только путем изменения параметров локальных хаотических аттракторов-элементов, из которых состоит мультиаттрактор, но и путем изменения динамики передислокации движения с аттрактора на аттрактор.

Рассмотрим пример реализации этого подхода для составных мультиаттракторов на основе хаотического аттрактора Лоренца [4]. Начнем

с системы, имеющей мультиаттрактор, объединяющий исходный аттрактор Лоренца и его копии, упорядоченные по координате x [5]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= A(y - H_1(x)); \\ \frac{dy}{d\tau} &= H_1(x)(B - z) - y; \\ \frac{dz}{d\tau} &= H_1(x)y - Cz,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}H_k(\xi_k) &= \xi_k + \\ &+ (d_k + 1) \left\{ P\left(\xi_k + s_k + h_k + \frac{h_k}{d_k}\right) + P\left(\xi_k + s_k - h_k - \frac{h_k}{d_k}\right) - \right. \\ &- \sum_{j=0}^{M_k} \left[P\left(\xi_k + s_k - (2j - 1)\left(h_k + \frac{h_k}{d_k}\right)\right) + \frac{h_k}{d_k} \right] - \\ &\left. - \sum_{j=0}^{N_k} \left[P\left(\xi_k + s_k + (2j - 1)\left(h_k + \frac{h_k}{d_k}\right)\right) - \frac{h_k}{d_k} \right] \right\},\tag{2} \\ P(\xi_k) &= \frac{1}{2} \left(\left| \xi_k + \frac{h_k}{d_k} \right| - \left| \xi_k - \frac{h_k}{d_k} \right| \right),\end{aligned}$$

— реплицирующий оператор, отвечающий за образование копий аттрактора исходной динамической системы, упорядоченных по координате ξ_k (для системы (1) $k = 1$, $\xi_1 = x$), и их объединение в единый мультиаттрактор [6]. Число локальных аттракторов в составе мультиаттрактора системы (1), (2) равно $1 + M + N$. Каждый из них находится внутри собственной области фазового пространства (фазовой ячейки) протяженностью $2h$ по координате x . Константа s учитывает асимметрию локальных аттракторов относительно центра своей ячейки. Коэффициент d определяет расстояние между соседними ячейками (равное $2h/d$) [1, 6].

Возьмем для начала простейший мультиаттрактор, содержащий исходный аттрактор и одну его копию (рис. 1), приняв $A = 10$, $B = 30$, $C = 2,6$ и $M_1 = 1$, $N_1 = 0$, $h_1 = 17$, $s_1 = 0$, $d_1 = 10$. Так как хаотический аттрактор Лоренца симметричен по координате x , он и его копия пересекаются с границами своих фазовых ячеек строго симметрично (рис. 1, а, б). То есть границы ячеек отсекают равные доли на обращенных друг к другу сторонах обоих аттракторов. При этом переходы фазовых траекторий между аттракторами равновероятны и изображающая точка находится в обеих областях притяжения в среднем одинаковое время (рис. 1, в).

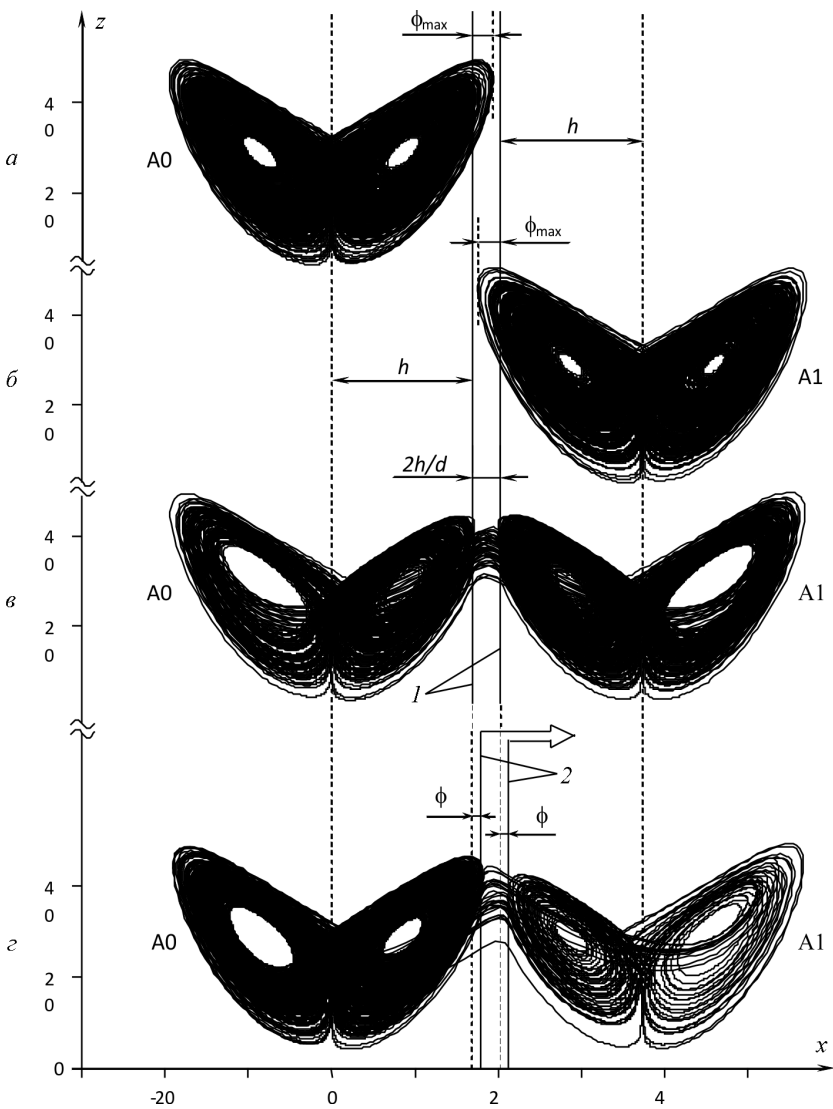


Рис. 1. Виды аттракторов:

a – исходный аттрактор Лоренца; *б* – копия аттрактора Лоренца; *в* – составной мультиаттрактор при симметричном положении границ ячеек фазового пространства; *г* – составной мультиаттрактор при одинаковом смещении границ в сторону аттрактора A1; *1* – симметричное положение границ; *2* – границы, смещенные относительно симметричного положения на интервал ϕ

Теперь введем отклонения ϕ границ от симметричного положения (рис. 1, *г*). Для этого преобразуем оператор (2) к виду

$$H_k(\xi_k) = \xi_k + (d_k + 1) \left\{ P\left(\xi_k + s_k + h_k + \frac{h_k}{d_k} - \phi m_{k,0}\right) + \right. \\ \left. + P\left(\xi_k + s_k - h_k - \frac{h_k}{d_k} - \phi n_{k,0}\right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=0}^{M_k} \left[P \left(\xi_k + s_k - (2j-1) \left(h_k + \frac{h_k}{d_k} \right) - \phi m_{k,j} \right) + \frac{h_k}{d_k} \right] - \\
 & - \sum_{j=0}^{N_k} \left[P \left(\xi_k + s_k + (2j-1) \left(h_k + \frac{h_k}{d_k} \right) - \phi n_{k,j} \right) - \frac{h_k}{d_k} \right] \} \quad (3)
 \end{aligned}$$

и положим $\phi m_{1,0} = \phi n_{1,0} = 0$, $\phi m_{1,1} = \phi$. В таком случае положительным значениям ϕ будет соответствовать одинаковое смещение обеих границ в сторону аттрактора А1 (как показано на рис. 1, ε), отрицательным — их смещение в сторону аттрактора А0.

При ненулевом значении ϕ границы ячеек будут отсекают уже неравные доли аттракторов А0 и А1. Чем больше площадь области пересечения аттрактора с границей ячейки, тем больше вероятность того, что фазовая траектория попадет в эту область и покинет аттрактор. В результате изображающая (фазовая) точка станет в среднем чаще переходить с аттрактора, имеющего бóльшую площадь пересечения с границей, на аттрактор, от которого отсечена меньшая доля.

Следствием этого является существование зависимости вероятностей пребывания фазовой точки на локальных аттракторах А0 и А1 от величины и направления смещения границ фазовых ячеек относительно симметричного положения (рис. 2). При увеличении ϕ вероятность найти фазовую точку на одном из этих двух аттракторов перераспределяется в пользу того из них, от которого отсечена меньшая часть. В случае системы (1), (3) эта зависимость хорошо аппроксимируется функциями (рис. 2, сплошные линии)

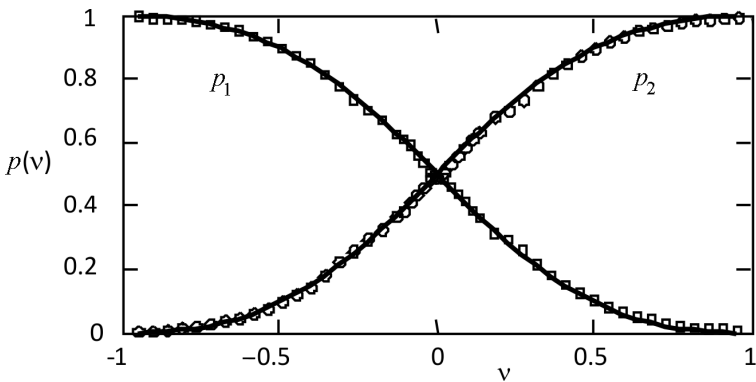


Рис. 2. Зависимость распределения вероятностей на локальных аттракторах двухэлементного мультиаттрактора системы (1) от величины смещения границ ячеек фазового пространства, содержащих локальные аттракторы, относительно симметричного положения:

○, □ — числовые данные; сплошные линии — аппроксимация функциями (4)

$$\begin{aligned}
 p_0(\nu) &= \frac{(1 + \nu)^\alpha}{(1 + \nu)^\alpha + (1 - \nu)^\alpha}; \\
 p_1(\nu) &= \frac{(1 - \nu)^\alpha}{(1 + \nu)^\alpha + (1 - \nu)^\alpha}; \\
 \nu &= \frac{\phi}{\phi_{\max}},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где p_0 и p_1 — вероятности обнаружения изображающей точки на аттракторах A_0 и A_1 , соответственно, определяемые как $p_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T}$ ($T = \sum_i T_i$, T_i — время пребывания фазовой траектории на i -м локальном аттракторе); ϕ_{\max} — величина заглупления границ фазовых ячеек в аттракторы при симметричном положении границ; значения ν лежат в интервале $] -1; 1[$; $\alpha = 2$.

Выражения (4) в интервале $] -1; 1[$ весьма близки к функциям

$$\begin{aligned}
 p_0(\nu) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha\nu} e^{-(Dt)^2} dt; \\
 p_1(\nu) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha\nu} e^{-(Dt)^2} dt,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где $D = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$; $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция [7].

При $\alpha = 2$ максимальное расхождение функций (5) и (1) в интервале $] -1; 1[$ составляет приблизительно 0,01, т.е. распределение вероятностей дислокации движения на элементах простейшего мультиаттрактора Лоренца по ν весьма близко к нормальному закону [7].

Впрочем, это совпадение, скорее всего, является формальным, так как нормальное распределение по ν не совсем соответствует свойствам движения системы (1). Оно не ограничено по аргументу, а в данном случае (вследствие конечных размеров локальных аттракторов) распределение по ν замкнуто в пределах ограниченного интервала, на нижней границе которого $p_0 \equiv 0$, $p_1 \equiv 1$, на верхней $p_0 \equiv 1$, $p_1 \equiv 0$. В отличие от нормального закона выражения (4) удовлетворяют данным граничным условиям.

Распределения (4) справедливы также для всех других вариантов простейших (содержащих только два локальных аттрактора) мультиаттракторов на основе аттрактора Лоренца, в частности, получаемых при копировании исходного аттрактора:

по направлению $y + \mu x$ в динамической системе [1]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A [H_2(y + \mu x) - (1 + \mu)x]; \\ \frac{dy}{d\tau} &= x [B - z + \mu] - H_2(y + \mu x); \\ \frac{dz}{d\tau} &= [H_2(y + \mu x) - \mu x]x - Cz \end{aligned} \quad (6)$$

(например, при $A = 10$, $B = 30$, $C = 2,6$, $M_2 = 1$, $N_2 = 0$, $h_2 = 21$, $s_2 = 0$, $d_2 = 10$, $\mu = -0,2$)

или по направлению z в системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A(y - x); \\ \frac{dy}{d\tau} &= x(B - H_3(z)) - y; \\ \frac{dz}{d\tau} &= xy - CH_3(z) \end{aligned} \quad (7)$$

(например, при $A = 10$, $B = 30$, $C = 2,6$, $M_3 = 1$, $N_3 = 0$, $h_3 = 19,1$, $s_3 = 27,3$) [1].

Для простейших мультиаттракторов на основе аттрактора Лоренца распределения вероятностей инвариантны к изменению ϕ_{\max} , причем коэффициент α сохраняет значение 2.

В случае большего, чем два, числа локальных аттракторов в составе мультиаттрактора системы (1), (3) также наблюдается перераспределение вероятностей в пользу наименее "усеченных" локальных аттракторов. На рис. 3 приведена зависимость распределения вероятностей пребывания фазовой точки на элементах мультиаттрактора

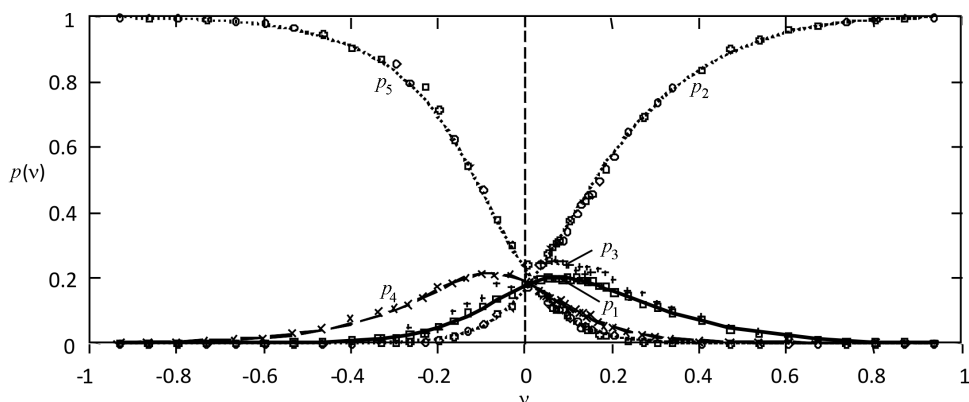


Рис. 3. Зависимость распределения вероятностей на элементах мультиаттрактора системы (1), состоящего из пяти аттракторов Лоренца, от величины смещения границ ячеек фазового пространства, содержащих локальные аттракторы, относительно симметричного положения:

○, □, +, × — числовые данные; линии — аппроксимирующие сглаженные функции

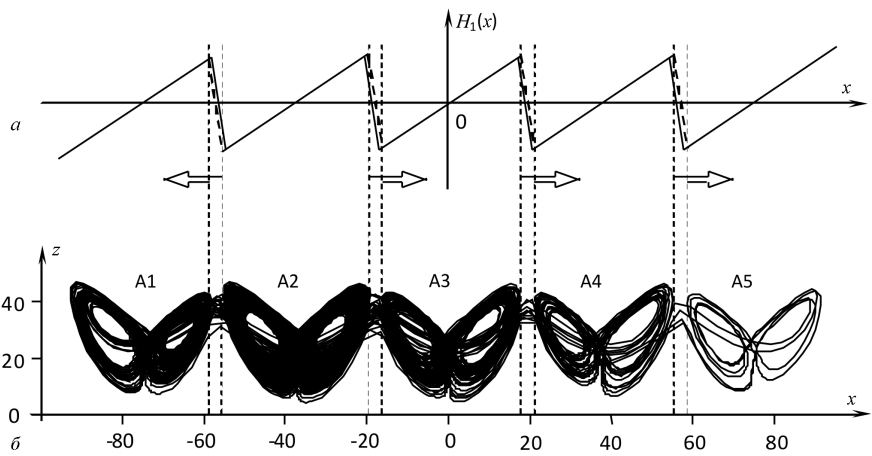


Рис. 4. Влияние смещения на параметры мультиаттрактора:

a — изменение реплицирующего оператора, отвечающее показанному стрелками смещению границ фазовых ячеек; *б* — пример пятиэлементного мультиаттрактора системы (1), соответствующего такому смещению границ на интервал $\phi = 0,7$

системы (1), (3), состоящего из пяти локальных аттракторов Лоренца, от величины смещения границ содержащих их ячеек фазового пространства относительно симметричного положения в том случае, когда все границы одновременно смещаются на одинаковое расстояние в направлениях, показанных на рис. 4, *a* (направление смещения границ соответствует положительным значениям ϕ , а отрицательным — обратное направление). Чтобы получить такой вариант смещения границ, следует в выражении (3) принять $\phi m_{1,0} = \phi n_{1,0} = 0$, $\phi m_{1,1} = \phi m_{1,2} = \phi n_{1,1} = \phi$, $\phi n_{1,2} = -\phi$. Пример проекции соответствующего мультиаттрактора на плоскость (x, z) показан на рис. 4, *б*. Он соответствует $A = 10$, $B = 30$, $C = 2,6$, $M_1 = 2$, $N_1 = 2$, $h_1 = 17$, $s_1 = 0$, $d_1 = 10$, $\phi = 0,7$ (при этом $\phi_{\max} \approx 2,14$ и $\nu \approx 0,33$).

Аналогичная картина наблюдается в случае более сложно устроенных мультиаттракторов — с двумерным и пространственным расположением локальных аттракторов. На рис. 5 показан пример двумерного мультиаттрактора на основе аттрактора Лоренца динамической системы [1]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A [H_2(y + \mu x) - (1 + \mu) H_1(x)]; \\ \frac{dy}{d\tau} &= H_1(x) [B - z + \mu] - H_2(y + \mu x); \\ \frac{dz}{d\tau} &= [H_2(y + \mu x) - \mu H_1(x)] H_1(x) - Cz, \end{aligned} \quad (8)$$

в которой границы фазовых ячеек смещены относительно симметричного положения в направлениях, показанных стрелками, на одинаковое расстояние $\phi = 0,6$. Аттрактор на рис. 5 образуется при $A = 10$,

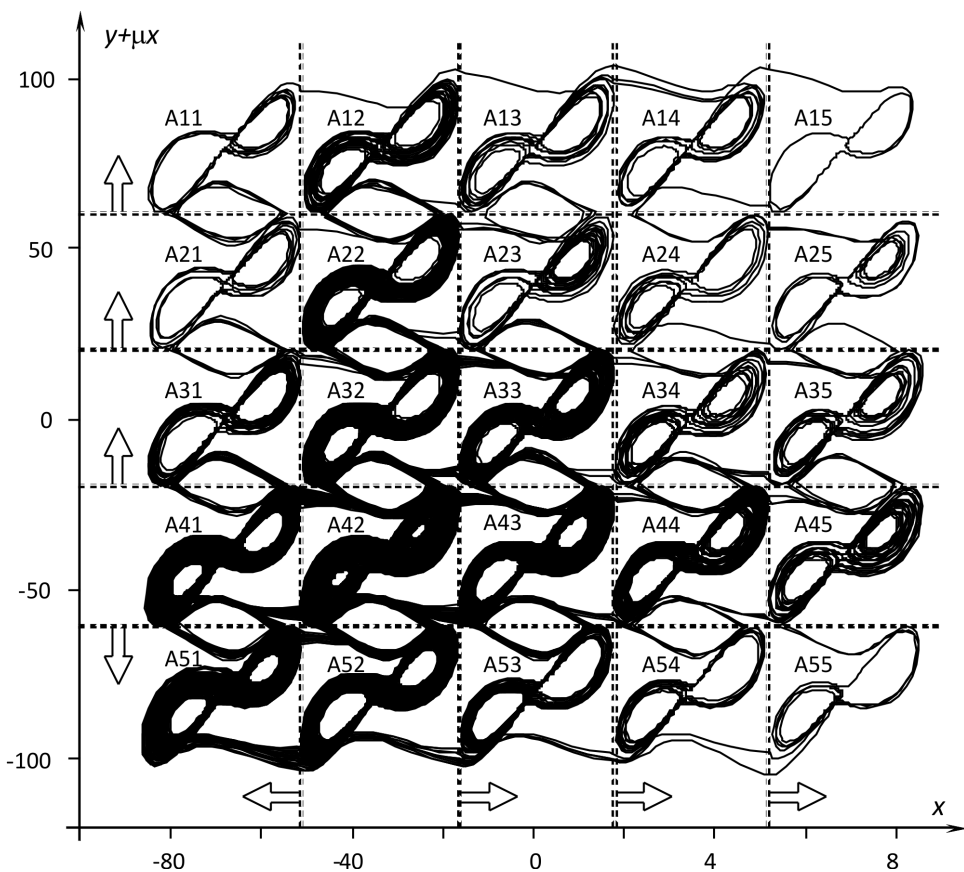


Рис. 5. Пример мультиаттрактора системы (8), соответствующего смещению границ фазовых ячеек на интервал $\phi = 0,6$ (показано стрелками)

$B = 30$, $C = 2,6$, $M_1 = 2$, $N_1 = 2$, $h_1 = 17$, $s_1 = 0$, $d_1 = 10$, $M_2 = 2$, $N_2 = 2$, $h_2 = 21$, $s_2 = 0$, $d_2 = 10$, $\mu = -0,2$. Хорошо видно, что в данной динамической системе также предпочтительным является движение в пределах локальных аттракторов, имеющих минимальную площадь сечения с границами своей фазовой ячейки.

Аналогичное поведение демонстрируют и другие динамические системы, имеющие составные хаотические мультиаттракторы [6, 8, 9]. В них тоже наблюдается сходная зависимость распределения вероятностей по элементам мультиаттрактора от положения границ фазовых ячеек. На рис. 6 и 7 показаны такие зависимости соответственно для двух- и пятиэлементного мультиаттрактора системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A[H_2(y) - x - f(x)]; \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - H_2(y) + z; \\ \frac{dz}{d\tau} &= -BH_2(y), \end{aligned} \quad (9)$$

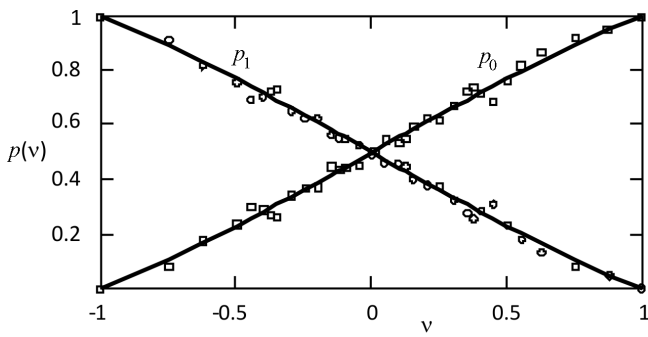


Рис. 6. Зависимость распределения вероятностей на локальных аттракторах двухэлементного мультиаттрактора системы (9) от величины смещения границ ячеек относительно симметричного положения:

○, □ — числовые данные; линии — аппроксимирующие функции (4)

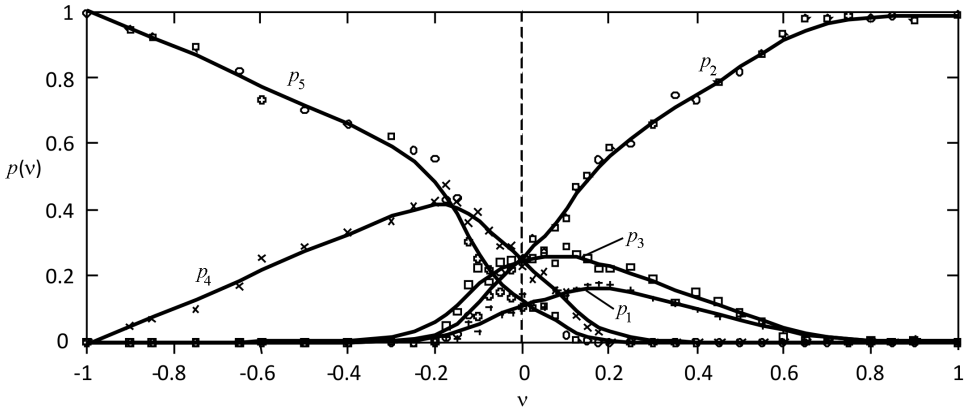


Рис. 7. Зависимость распределения вероятностей на элементах мультиаттрактора системы (9), состоящего из пяти аттракторов Чуа, от величины показанного на рис. 4 смещения границ ячеек относительно симметричного положения:

○, □, +, × — числовые данные; линии — аппроксимирующие сплаженные функции

где $f(x) = bx + \frac{a-b}{2} (|x+1| - |x-1|)$, с параметрами $A = 9,4$, $B = 15$, $a = -2,6$, $b = -0,4$, $h = 2,14$, $s = 0$, в которой элементами мультиаттрактора являются аттракторы Чуа, упорядоченные по координате y [9]. Интересно, что показанная на рис. 6 зависимость распределения вероятностей для двухэлементного мультиаттрактора ($M_2 = 1$, $N_2 = 0$) системы (8) также может быть аппроксимирована выражениями (4) при $\alpha = 1,1$. Зависимости на рис. 7 для пятиэлементного мультиаттрактора ($M_2 = 2$, $N_2 = 2$) системы (8) соответствуют такому же варианту смещения границ фазовых ячеек относительно симметричного положения, что и зависимости на рис. 3. Сравнение рис. 3 и 7 показывает, что, несмотря на существенные различия в динамике систем (1) и (9), эти зависимости качественно подобны.

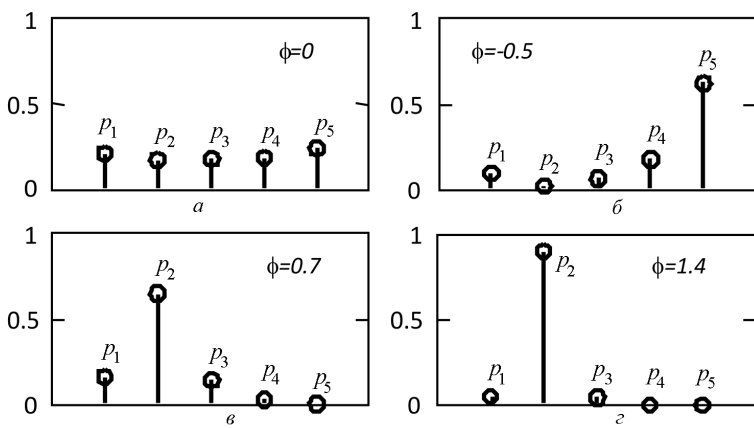


Рис. 8. Распределения вероятностей на элементах мультиаттрактора системы (1) при различных значениях ϕ , соответствующие зависимостям рис. 3: а – $\phi = 0$; б – $\phi = -0,5$ ($\nu \approx -0,23$); в – $\phi = 0,7$ ($\nu \approx 0,33$); г – $\phi = 1,4$ ($\nu \approx 0,65$)

Итак, в самых различных вариантах составных мультиаттракторов — от простейших, содержащих только два локальных аттрактора, до значительно более сложных, с большим числом элементов, существует зависимость вероятностей локализации движения на локальных аттракторах от положения границ содержащих их ячеек фазового пространства.

При этом уже в простейшем случае одинакового по модулю смещения положения границ между соседними локальными аттракторами, можно получать значительное разнообразие распределений вероятностей на множестве локальных аттракторов, в частности: переходить от распределения, близкого к равномерному (рис. 8, а и 9, а), к локализации движения преимущественно на одном из локальных аттракторов (рис. 8, б–г и 9, б, в), а также реализовать некоторые более сложные ситуации (рис. 9, г).

Очевидно, что в более общем случае произвольных по величине и направлению смещениях границ каждой фазовой ячейки возможна реализация практически любого априорного распределения вероятностей на множестве локальных аттракторов. Причем для этого достаточно модифицировать только операторы редупликации без какого-либо специального вмешательства в динамику движения на хаотических аттракторах, образующих мультиаттрактор.

Соответствие между параметрами реплицирующих операторов, определяющими величину смещения границ фазовых ячеек, и распределениями вероятностей на элементах составного мультиаттрактора является детерминированным и задает закон управления. Однако объектом управления являются не элементы самого движения, а вероятности их осуществления. Состояние такой динамической системы, независимо от управляющего воздействия, может самопроизвольно

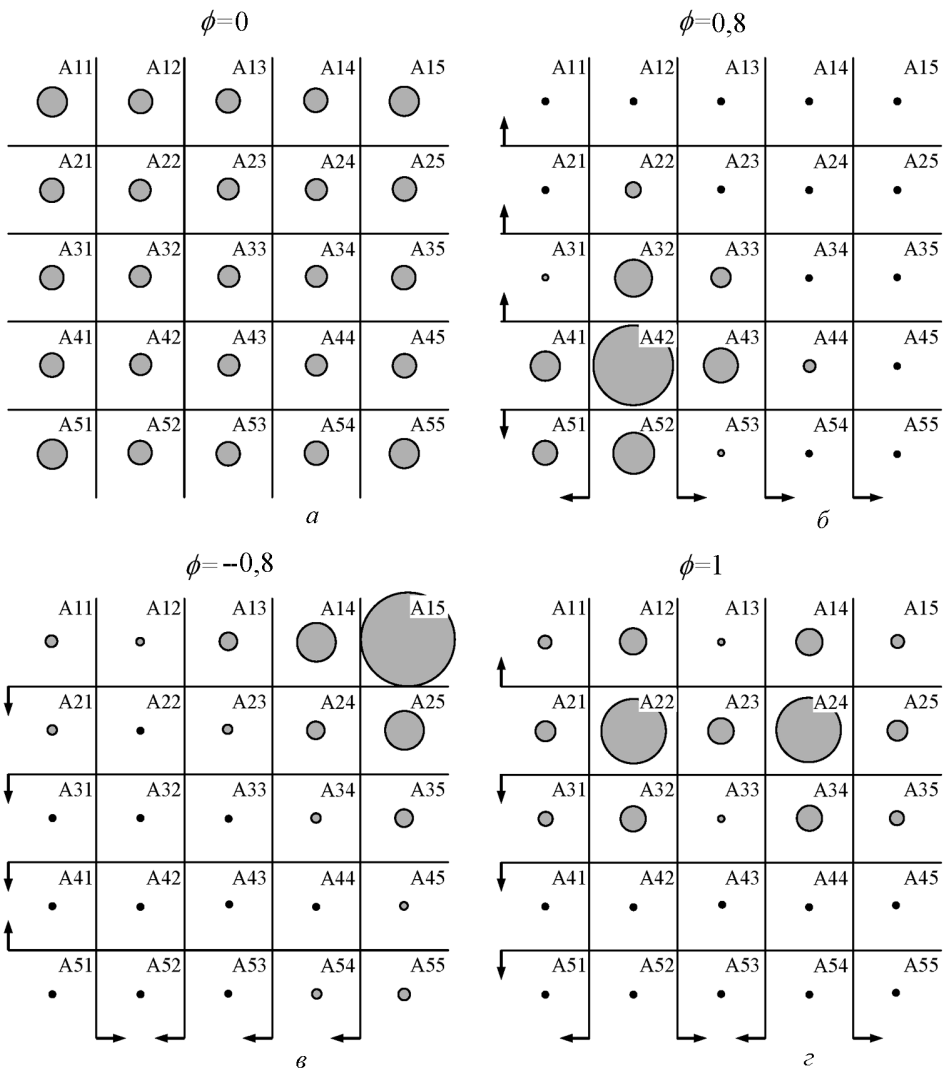


Рис. 9. Распределения вероятностей на элементах мультиаттрактора системы (8) при указанных в тексте значениях констант и различных вариантах вариантов одинакового по величине смещения (направления смещения показаны стрелками) границ фазовых ячеек относительно симметричного положения. Вероятности движения на элементах мультиаттрактора пропорциональны площадям кругов (1 – 225 мм², • соответствуют вероятностям менее 0,003)

изменяться по всему набору разрешенных состояний. Роль управляющего воздействия в данном случае состоит в том, чтобы, задав распределение вероятностей, назначить предпочтительное состояние системы, в котором она будет находиться в течение большей части времени своей эволюции. Способность системы время от времени спонтанно изменять свое состояние может использоваться, например, для корректировки поведения системы путем сравнения результативности различных стратегий поведения (если им сопоставлены те

или иные элементы мультиаттрактора) в условиях непредсказуемого или плохо идентифицируемого изменения параметров операционной среды по “собственной инициативе” такой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П р о к о п е н к о В. Г. Редупликация хаотических аттракторов и построение составных мультиаттракторов // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – № 3. – С. 483–496.
2. А н и щ е н к о В. С. Взаимодействие странных аттракторов. Перемежаемость “хаос-хаос” // Письма в ЖТФ. – 1984. – Т. 10. – Вып. 10. – С. 629–633.
3. А н и щ е н к о В. С. Сложные колебания в простых системах. – М.: URSS, 2009. – 320 с.
4. E d w a r d N. L o r e n z. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.
5. П р о к о п е н к о В. Г. Статистические характеристики хаотических колебаний в автостохастических системах с многосегментной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – № 4. – С. 106–119.
6. П р о к о п е н к о В. Г. Генератор хаотических колебаний // Пат. РФ № 2403672, Опубл. 10.11.2010. Бюл. 31.
7. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике. – М., 1977. – 832 с.
8. П р о к о п е н к о В. Г. Генератор хаотических колебаний // Пат. РФ № 2421877. Опубл. 20.06.2011. Бюл. 17.
9. П р о к о п е н к о В. Г. Хаотические автоколебания в автостохастических системах с гладкой многосегментной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2012. – № 1. – С. 93–105.

Статья поступила в редакцию 26.06.2012

Вадим Георгиевич Прокопенко — ведущий конструктор НКБ “Миус” Южного федерального университета, канд. техн. наук. Автор более 100 научных работ в области теории автономных автостохастических систем, полупроводниковой электроники, высокостабильных источников опорной частоты.

V.G. Prokopenko — Ph. D. (Eng.), leading designer of the design bureau “Mius” of the Taganrog State Radio Engineering University. Author of more than 100 publications in the field of the theory of independent auto stochastic systems, semiconductor electronics, highly-stable sources of reference frequency.