

УДК 536.2

## ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА СО СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**В.С. Зарубин, И.Ю. Савельева**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.ru

*В качестве конструкционных и функциональных материалов в различных приборных устройствах широко применяют композиты. Исследованию теплопроводности композитов посвящено значительное количество работ. Однако расчетные формулы в этих работах получены, как правило, либо в результате обработки экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо путем априорного задания распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел. В данной работе предложена математическая модель переноса тепловой энергии в композите со сфероидальными включениями. На основе этой модели найдены эффективные коэффициенты теплопроводности такого композита. Для оценки возможной погрешности полученных результатов применена двойственная вариационная формулировка задачи стационарной теплопроводности. Результаты могут быть использованы для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности композитов, модифицированных наноструктурными элементами (например, фуллеренами).*

**Ключевые слова:** композит, сфероидальные включения, эффективный коэффициент теплопроводности.

## EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENTS OF THE COMPOSITES WITH SPHEROIDAL INCLUSIONS

**V.S. Zarubin, I.Yu. Savelyeva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.ru

*Composites find broad application as structural and functional materials in different instrument devices. A substantial number of works are devoted to investigation of heat conduction of composites. However the calculation formulas in these works are obtained, as a rule, either as a result of processing of experimental data as applied to particular materials or by means of a priori specification of the temperature distribution and the heat flow in models of heterogeneous bodies. The mathematical model of thermal energy transfer in the composite with inclusions of spheroidal shape is constructed. Based on the model, the effective thermal conductivity coefficients of this composite are found. To estimate the possible error of the obtained results, the dual variational formulation of the stationary heat conduction is applied. The results can be used for prediction of effective thermal conductivity coefficients of the composites modified with nanostructural elements (e.g., with fullerenes).*

**Keywords:** composite, spheroidal inclusions, effective thermal conductivity coefficient.

**Введение.** Для повышения механических характеристик конструкционных материалов представляется перспективным их армирование высокопрочными и высокомодульными включениями. Конструкционный материал с неоднородной структурой в виде отдельных включений в основную составляющую этого материала (матрицу), имеющую преобладающее объемное содержание, можно рассматривать как композит, матрица которого модифицирована такими включениями. В настоящей работе рассмотрен композит, армированный включениями в виде сплюснутых эллипсоидов вращения (сфероидов). Такой материал достаточно широко применяется в технике. Включения могут иметь различную природу (например, образующие новые фазы в поликристаллических материалах при их термической обработке или близкие к сфероидальной форме наноструктурные элементы [1–3]).

Следует отметить, что в предельном случае при сплющивании сфероида он переходит в круглую тонкую пластинку, которую при некоторых температурных условиях можно принять за структурную форму перлита, состоящего в углеродистых сталях из феррита ( $\alpha$ -Fe) и цементита (карбида железа  $Fe_3C$ ) [1, 2]. Цементит (как и графит) имеет пластинчатую структуру, определяемую ковалентными связями в плоскостях, параллельных плоскости пластинки, между этими плоскостями существуют металлические связи. В доэвтектоидной стали с крупными зёрнами аустенита ( $\gamma$ -Fe) может присутствовать пластинчатый избыточный феррит (видманштеттова структура, возникающая при длительном перегреве или замедленной кристаллизации [1, 4]). Пластинчатую форму имеет и мартенсит (пересыщенный твердый раствор углерода в феррите) [4]. Вместе с тем цементит в перлите вследствие стремления системы к уменьшению энергии поверхностей раздела может из пластинчатой формы переходить в сфероидальную форму, приближающуюся к шаровой [1, 2]. Сфероидальные включения графита возникают при эвтектической кристаллизации чугуна [1]. Таким образом, сфероидальные включения и их предельная пластинчатая форма достаточно распространены в конструкционных материалах. При использовании таких материалов в теплонапряженных элементах конструкций, работающих в условиях одновременного интенсивного воздействия механических и тепловых нагрузок, наряду с механическими характеристиками важную роль играют и теплофизические характеристики материала (в частности, коэффициент теплопроводности). Эффективное значение коэффициента теплопроводности композита, модифицированного армирующими элементами, зависит от их объемной концентрации  $C_V$  и от соотношения между коэффициентами теплопроводности этих элементов и матрицы.

**Математическая модель.** Математическую модель переноса тепловой энергии в композите построим с учетом предположения, что сфероидальные включения в общем случае не находятся в контакте, т.е. отделены друг от друга слоем изотропного материала матрицы. Композит состоит из множества изотропных сфероидальных частиц с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_0$ , окруженных материалом матрицы с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$  (значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_m$  известны).

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятого сфероидального включения с неограниченным объемом окружающей его матрицы. Начало прямоугольной декартовой системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  выберем в центре включения, причем направление координатной оси  $O\xi_3$  совпадает с направлением оси вращения сфероида, уравнение поверхности которого имеет вид  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2/\bar{b}^2 = b_1^2$ , где  $\bar{b} = b_3/b_1 < 1$ ,  $b_3$  — полуось сфероида;  $b_1$  — наибольший радиус сфероида.

Примем, что на расстоянии от центра включения, значительно превышающем радиус  $b_1$ , составляющие градиента установившегося распределения температуры равны  $T_{,k}^\circ$ ,  $k = 1, 2, 3$  (запятая с последующим нижним индексом  $k$  обозначает производную по направлению оси  $O\xi_k$ ). Установившееся распределение температуры вне включения описывается дифференциальным уравнением Лапласа  $T_{,kk}^* = 0$  с частными производными второго порядка (здесь и далее использовано правило суммирования по повторяющемуся латинскому индексу). Этому уравнению удовлетворяет распределение температуры [5, 6] вида

$$T(M) = T_{,k}^\circ \xi_k + \frac{(1 - \bar{\lambda}) D_\alpha T_{,k}^\circ \xi_k}{1 + (\bar{\lambda} - 1) D_\alpha^\circ}, \quad \alpha = k, \quad (1)$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda_0/\lambda_m$ ;

$$D_1 = D_2 = \frac{\bar{b}}{2} \int_\beta^\infty \frac{du}{(1+u)f(u)}; \quad D_3 = \frac{\bar{b}}{2} \int_\beta^\infty \frac{du}{(\bar{b}^2+u)f(u)}, \quad (2)$$

$\beta$  — положительный корень уравнения

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2)/(1 + \beta) + \xi_3^2/(\bar{b}^2 + \beta) = b_1^2, \quad (3)$$

характеризующий положение точки  $M$  с координатами  $\xi_k$ ;  $D_\alpha^\circ = D_\alpha|_{\beta=0}$ ;  
 $f(u) = (1+u)\sqrt{\bar{b}^2+u}$ .

Интегралы в формуле (2) можно выразить через элементарные функции, тогда [5]

$$D_1 = D_2 = \frac{\text{arcctg } \nu - \nu/(1+\nu^2)}{2(1-\bar{b}^2)^{3/2}} \bar{b}; \quad D_3 = \frac{1/\nu - \text{arcctg } \nu}{(1-\bar{b}^2)^{3/2}} \bar{b}, \quad (4)$$

где  $\nu = \sqrt{(\bar{b}^2 + \beta)/(1 - \bar{b}^2)}$ . По мере уменьшения значения  $\bar{b}$  форма сфероида приближается к тонкой круглой пластинке. В этом случае, пренебрегая величиной  $\bar{b}^2$  по сравнению с единицей, упрощаем формулы (4) и представляем их в виде

$$D_1 = D_2 = \frac{\bar{b}}{2} \left( \operatorname{arcctg} \sqrt{\bar{b}^2 + \beta} - \frac{\sqrt{\bar{b}^2 + \beta}}{1 + \beta} \right);$$

$$D_3 = \frac{\bar{b}}{\sqrt{\bar{b}^2 + \beta}} - \bar{b} \operatorname{arcctg} \sqrt{\bar{b}^2 + \beta}.$$

Установившееся распределение температуры во включении также удовлетворяет уравнению Лапласа, но имеет фиксированные составляющие градиента температуры и может быть представлено соотношением [5, 6]

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{T_{,k}^\circ \xi_k}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_\alpha^\circ}, \quad \alpha = k.$$

Таким образом, согласно формуле (1), наличие сфероидального включения создает в матрице возмущение температурного поля относительно линейного распределения  $T_{,k}^\circ \xi_k$  на большом расстоянии от этого включения. Возмущение температурного поля описывается соотношением

$$\Delta T^* = \frac{(1 - \bar{\lambda})D_\alpha T_{,k}^\circ \xi_k}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_\alpha^\circ}. \quad (5)$$

**Случай одинаковой ориентации включений.** При одинаковой ориентации оси  $O\xi_3$  всех сфероидальных включений сначала рассмотрим случай, когда  $T_{,1}^\circ = T_{,2}^\circ = 0$ . С учетом этого для возмущения температурного поля в матрице, создаваемого одним включением, из формулы (5) получим

$$\Delta T^* = \frac{(1 - \bar{\lambda})D_3 T_{,3}^\circ \xi_3}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_3^\circ}. \quad (6)$$

Пусть  $N$  одинаковых по форме и размерам включений находятся в объеме  $V_N = 4\pi B_1^2 B_3/3$ , ограниченном поверхностью геометрически подобной этим включениям сфероида с уравнением поверхности  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2/\bar{B}^2 = B_1^2$ ,  $\bar{B} = B_3/B_1$ , где  $B_1/b_1 = B_3/b_3 = C_0 = \text{const} \gg 1$ . Поскольку объем каждого включения равен  $4\pi b_1^2 b_3/3$ , объемную концентрацию включений в объеме  $V_N$  можно определить по формуле  $C_V = N/C_0^3$ .

Для точки, удаленной от каждого включения на весьма большое расстояние по сравнению с радиусом  $B_1$ , примем для всех включений

$|\xi_3| \gg B_1$ . Тогда, согласно формуле (6),  $N$  весьма удаленных включений, расположенных в объеме  $V_N$ , вызовут в этой точке возмущение температурного поля, равное

$$\Delta T = N\Delta T^* = N \frac{(1 - \bar{\lambda})D_3 T_3^\circ \xi_3}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_3^\circ}. \quad (7)$$

Если принять сфероид объемом  $V_N$  представительным элементом композита с рассматриваемыми включениями, то этот элемент с искомым эффективным коэффициентом теплопроводности  $\lambda_3$  в направлении оси  $O\xi_3$  создаст в той же весьма удаленной точке (см. (6)) такое же возмущение температурного поля:

$$\Delta T = \frac{(1 - \tilde{\lambda}_3)D_3^* T_3^\circ \xi_3}{1 + (\tilde{\lambda}_3 - 1)D_3^\circ}, \quad (8)$$

где  $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3/\lambda_m$ ;

$$D_3^* = \frac{1}{2} \int_{\beta_*}^{\infty} \frac{du}{(\bar{B}^2 + u)F(u)},$$

причем  $\beta_*$  — положительный корень уравнения  $(\xi_1^2 + \xi_2^2)/(1 + \beta) + \xi_3^2/(\bar{B}^2 + \beta) = B_1^2$ ;  $F(u) = (1 + u)\sqrt{\bar{B}^2 + u}$ .

Приравняв правые части формул (7) и (8), запишем

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{1 + (\bar{\lambda} - 1)(D_3^\circ + (1 - D_3^\circ)ND_3/D_3^*)}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_3^\circ(1 - ND_3/D_3^*)}. \quad (9)$$

В работе [6] для общего случая включений в виде произвольного трехосного эллипсоида показано, что  $ND_3/D_3^* = C_V$ . Это равенство справедливо и для частных случаев эллипсоидальной формы включений. Таким образом, формула (9) принимает вид

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{1 + (\bar{\lambda} - 1)(D_3^\circ + (1 - D_3^\circ)C_V)}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_3^\circ(1 - C_V)}. \quad (10)$$

Отметим, что для шаровых включений  $D_3^\circ = 1/3$  [6], тогда композит будет изотропным, а формула (10) совпадет с формулой Максвелла [5, 7].

Аналогично можно найти формулы для  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1/\lambda_m$  и  $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2/\lambda_m$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — эффективные коэффициенты теплопроводности композита в направлении осей  $O\xi_1$  и  $O\xi_2$ , причем в силу равенства  $D_1^\circ = D_2^\circ$  получим  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ . С учетом этого при  $\alpha = 1, 2, 3$  имеем

$$\tilde{\lambda}_\alpha = \frac{1 + (\bar{\lambda} - 1)(D_\alpha^\circ + (1 - D_\alpha^\circ)C_V)}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_\alpha^\circ(1 - C_V)}. \quad (11)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае композит обладает трансверсальной изотропией по отношению к свойству теплопроводности.

Предположим, что все сфероидальные включения в композите подобны по форме и одинаково ориентированы относительно выбранной системы координат, однако размеры включений могут быть различными. Пусть  $N$  таких включений также находятся в объеме  $V_N$ , но  $B_1/b_1^{(n)} = B_3/b_3^{(n)} = C_n = \text{const} \gg 1$ , где  $b_1^{(n)}$  и  $b_3^{(n)}$  – геометрические параметры сфероидального включения с номером  $n = \overline{1, N}$  при выполнении условия подобия  $b_3^{(n)}/b_1^{(n)} = \bar{b}$ . Поскольку объем  $n$ -го включения равен  $4\pi(b_1^{(n)})^2 b_3^{(n)}/3$ , объемную концентрацию этих включений в объеме  $V_N$  можно определить по формуле

$$C_V = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n^3}. \quad (12)$$

Согласно (2), для подобных по форме сфероидальных включений при  $\bar{b} = \text{const}$  значения  $D_\alpha$  не зависят от размеров включений. Следовательно, возмущение температурного поля в точке с координатами  $\xi_k$ , удаленной от каждого из  $N$  включений на весьма большое расстояние (при выполнении неравенств  $|\xi_k|/B_1 \gg 1$ ), будет определено равенством вида (7), т.е. формула (11) применима и в рассматриваемом случае при условии, что объемную концентрацию включений находят по (12).

**Построение двусторонних оценок.** Для получения двусторонних оценок эффективных коэффициентов теплопроводности изучаемого композита применим двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [8, 9]. С этой целью используем трехфазную модель композита в виде цилиндрической области объемом  $V$ , имеющей в направлении координатной оси  $O\xi_3$  высоту  $H$  и ограниченной параллельными основаниями (каждое с достаточной большой площадью  $S_0$ ). Эта область содержит половину сфероидального включения с геометрическими параметрами  $b_1$  и  $b_3$ , покрытого слоем матрицы, ограниченным половиной поверхности соосного включения сфероида с параметрами  $\hat{b}_1 = C_* b_1$  и  $\hat{b}_3 = C_* b_3$ ,  $C_* > 1$ , центр которого совпадает с началом выбранной выше системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  (рис. 1). Плоскости симметрии половины включения и слоя матрицы совпадают с основанием цилиндрической области, лежащим в координатной плоскости  $\xi_1 O \xi_2$ . В остальной части области находится однородный материал с искомыми свойствами композита.

Боковую поверхность цилиндра примем идеально теплоизолированной, температура первого основания при  $\xi_3 = 0$  равна нулю, а второго основания при  $\xi_3 = H - T_{;3}^\circ H$ . Таким образом, в неоднородной

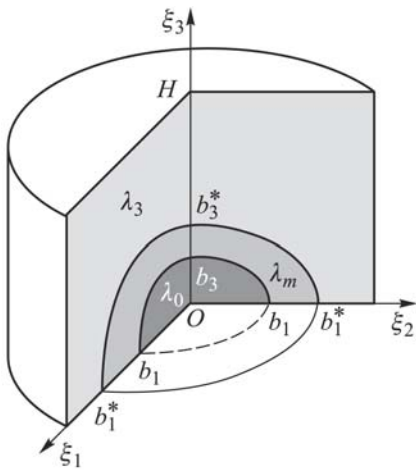


Рис. 1. Модель композита со сфероидальными включениями

ра распределение температуры с постоянной составляющей градиента  $T_{;3}^\circ$  ( $\nabla$  – дифференциальный оператор Гамильтона). Тогда из (13) получим

$$2J_1[T]/(T_{;3}^\circ)^2 = \lambda_3(HS_0 - 2\pi\hat{b}_1^2\hat{b}_3/3) + 2\pi\lambda_m(\hat{b}_1^2\hat{b}_3 - b_1^2b_3)/3 + 2\pi\lambda_0b_1^2b_3/3. \quad (14)$$

Для максимизируемого функционала [8]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\lambda(M)} dV(M) - \int_S T(P)\mathbf{q}(P)\mathbf{n}(P) dS(P), \quad P \in S, \quad (15)$$

в качестве допустимого распределения вектора плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  примем постоянное значение единственной составляющей этого вектора  $q = -\lambda_3 T_{;3}^\circ$ , перпендикулярной основаниям цилиндра ( $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ ). В этом случае из (15) следует, что

$$2I_1[q]/(\lambda_3 T_{;3}^\circ)^2 = -(HS_0 - 2\pi\hat{b}_1^2\hat{b}_3/3)/\lambda_3 - 2\pi(\hat{b}_1^2\hat{b}_3 - b_1^2b_3)/(3\lambda_m) - 2\pi b_1^2b_3/(3\lambda_0) + 2HS_0/\lambda_3. \quad (16)$$

Использованные допустимые распределения температурного поля и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных распределений, поэтому значения  $J_1[T]$  и  $I_1[q]$  не будут совпадать, причем  $J_1[T] > I_1[q]$ . В промежутке между этими значениями должно быть расположено значение  $J_0 = \lambda_3(T_{;3}^\circ)^2 HS_0/2$  минимизируемого функционала (13) для однородной области с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_3$ . Тогда при  $b_1^2b_3/(\hat{b}_1^2\hat{b}_3) = 1/C_*^3 = C_V$

цилиндрической области объемом  $V_0 = HS_0$ , ограниченной поверхностью  $S$ , распределение температуры  $T(M)$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda(M)$  являются функциями координат точки  $M \in V$ , причем функция  $\lambda(M)$  кусочно постоянна в каждой из подобластей области  $V$  (см. рис. 1).

В качестве допустимого для минимизируемого функционала [8]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \lambda(M)(\nabla T(M))^2 dV(M), \quad M \in V, \quad (13)$$

примем линейное по высоте цилиндра

с учетом формулы (14) из условия  $J_1[T] \geq J_0$  найдем верхнюю оценку

$$\tilde{\lambda}_3 \leq 1 - C_V + \bar{\lambda}C_V = \tilde{\lambda}_+, \quad (17)$$

а с учетом (16) из условия  $I_1[q] \leq J_0$  — нижнюю оценку

$$\tilde{\lambda}_3 \geq 1/(1 - C_V + C_V/\bar{\lambda}) = \tilde{\lambda}_-. \quad (18)$$

Принятые достаточно простые допустимые распределения температурного поля и плотности теплового потока учитывают лишь объемное содержание каждой из трех изотропных фаз в использованной трехфазной модели композита. В связи с этим для всех трех направлений координатных осей оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита, входящие в формулы (17) и (18), будут идентичными.

Зависимости оценок  $\tilde{\lambda}_+$  (кривые 1) и  $\tilde{\lambda}_-$  (кривые 2) от объемной концентрации  $C_V$  при различных значениях  $\bar{\lambda}$ , построенные по формулам (17) и (18), приведены на рис. 2.

Для сфероидального включения с  $\bar{b} = 1/2$  при  $\beta = 0$  по (4) вычислены значения  $D_1^\circ = D_2^\circ = 0,03487$ ,  $D_3^\circ = 0,93026$ . Затем по формуле (11) для тех же значений  $\bar{\lambda}$  (см. рис. 2) построены зависимости эффективных коэффициентов теплопроводности  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$  (сплошные линии) и  $\tilde{\lambda}_3$  (штриховые линии) от объемной концентрации  $C_V$ . Следует отметить близость попарно зависимостей  $\tilde{\lambda}_+$ ,  $\tilde{\lambda}_1$  и  $\tilde{\lambda}_-$ ,  $\tilde{\lambda}_3$  от концентрации  $C_V$ . В случае небольшого отклонения значения  $\bar{\lambda}$  от единицы для выбранной формы включения различие значений эффективных коэффициентов теплопроводности мало, т.е. анизотропия композита оказывается сравнительно слабой. По мере отклонения значения  $\bar{\lambda}$  от единицы, несмотря на совпадение оценок и значений этих коэффициентов при  $C_V = 0$  и  $C_V = 1$ , разность  $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$  для промежуточных значений концентрации  $C_V$  становится значительной и одновременно увеличивается различие значений  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$ , что приводит к более существенной анизотропии композита.

Указанная тенденция усиливается по мере уменьшения значения  $\bar{b}$  и отклонения значения  $\bar{\lambda}$  от единицы. По мере приближения формы сфероида к шаровой значения  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  сближаются, а разность  $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$  для промежуточных значений концентрации  $C_V$  уменьшается. Если в композите оси вращения одинаковых по форме и размерам сфероидальных включений равномерно распределены по всем возможным направлениям, то композит будет изотропным с эффективным коэффициентом теплопроводности  $\tilde{\lambda} = (2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)/3$  [10, 11].

**Заключение.** Построенная математическая модель переноса тепловой энергии в композите с включениями сфероидальной формы



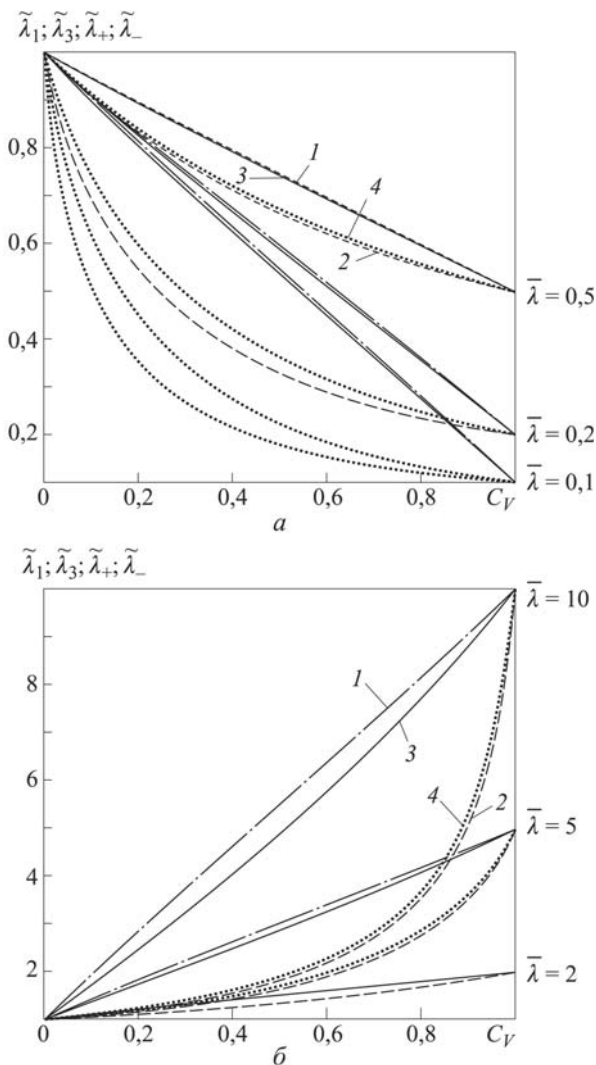


Рис. 2. Зависимость верхней  $\tilde{\lambda}_+$  (1) и нижней  $\tilde{\lambda}_-$  (2) оценок эффективных коэффициентов теплопроводности  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$  (3) и  $\tilde{\lambda}_3$  (4) от объемной концентрации  $C_V$  при  $\bar{\lambda} < 1$  (а) и  $\bar{\lambda} > 1$  (б)

позволила получить зависимости эффективных коэффициентов теплопроводности композита от концентрации включений и их геометрических параметров. Использование двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности дало возможность построить двусторонние оценки значений этих коэффициентов. Полученные результаты полезны для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности композитов и поликристаллических материалов, включения в которых имеют форму, близкую к сфероиду. Поскольку сфероид при уменьшении размера в направлении оси вращения приближается по форме к пластинке, использованный подход также применим к материалам с включениями пластинчатой формы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арзамасов Б.Н., Крашенинников А.И., Пастухова Ж.П., Рахштадт А.Г. Научные основы материаловедения / М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 366 с.
2. Ван Флек Л. Теоретическое и прикладное материаловедение / пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
3. Кац Е.А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
4. Физическое материаловедение / под ред. Р. Кана; пер. с англ. В 3 т. Т. 2. М.: Мир, 1968. 492 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76–85.
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470–474.
8. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 329 с.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
10. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. Анизотропия физических свойств металлов. М.: Metallurgia, 1985. 136 с.
11. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.

## REFERENCES

- [1] Arzamasov B.N., Krasheninnikov A.I., Pastukhova Zh.P., A.G. Rakhshadt Nauchnye osnovy materialovedeniya [Scientific fundamentals of materials science]. Moscow, MG TU im. N.E. Bauman Publ., 1994. 366 p.
- [2] Van Vleck J.H. The theory of electric and magnetic susceptibilities. Oxford University Press, 1965. 384 p. (Russ. ed.: Van Flek L. Teoreticheskoe i prikladnoe materialovedenie. Moscow, Atomizdat Publ., 1975. 472 p.).
- [3] Kats E.A. Fullereny, uglirodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Pedigree of forms and ideas]. Moscow, LKI Publ., 2008. 296 p.
- [4] Cahn R.W., Haasen P. Physical metallurgy. Vol. 2. Amsterdam, North-Holland Physics Publ., 1983. 1040 p. (Russ. ed.: Kan R.U. Khaazen P. Fizicheskoe metallovedenie. T. 2. Moscow, Metallurgiya Publ., 1987. 624 p.).
- [5] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford, Clarendon Press, 1959. 520 p. (Russ. ed.: Karlsru G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).
- [6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. The effective thermal conductivity of composites with ellipsoidal inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 76–85 (in Russ.).

- [7] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The effective thermal conductivity of composites with spherical inclusions. *Teplo. Protsessy Tekh.* [Therm. Processes Eng.], 2012. no. 10, pp. 470–474 (in Russ.).
- [8] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 329 p.
- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.
- [10] Adamesku R.A., Gel'd P.V., Mityushov E.A. Anizotropiya fizicheskikh svoystv metallov [Anisotropy of physical properties of metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1985. 136 p.
- [11] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroednorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.

Статья поступила в редакцию 4.02.2013

Владимир Степанович Зарубин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.S. Zarubin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Инга Юрьевна Савельева — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.Yu. Savelieva — Cand. Sci (Phys.-Math.), assoc. professor of the “Applied mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of simulation of nonstationary heat conduction.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.