УДК 519.71

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АФФИННЫХ СИСТЕМ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**А.П. Крищенко**, **Д.А. Фетисов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: mathmod@bmstu.ru; apkri@bmstu.ru; dfetisov@yandex.ru

*Рассмотрена терминальная задача для многомерных аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью. Предполагается, что интервал времени управления не задан и также подлежит определению. Гладкой невырожденной заменой переменных в пространстве состояний система преобразуется к регулярному квазиканоническому виду с двумерными подсистемами канонического вида. Предложен метод решения терминальной задачи для полученного класса систем в предположении, что правая часть одного из уравнений положительна на всем пространстве состояний. Доказано достаточное условие существования решения терминальной задачи для указанного класса систем. Предложена численная процедура построения решения терминальной задачи и приведен пример, иллюстрирующий предложенную численную процедуру. Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении задач терминального управления для технических систем.*

***Ключевые слова***: аффинная система, квазиканонический вид, задача терминального управления.

# TRANSFORMATION OF AFFINE SYSTEMS AND SOLVING OF TERMINAL CONTROL PROBLEMS

**A.P. Krishchenko**, **D.A. Fetisov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
e-mail: mathmod@bmstu.ru; apkri@bmstu.ru; dfetisov@yandex.ru

*A terminal problem for multidimensional affine systems that are not feedback linearizable is considered. It is assumed that the control time interval is not specified and to be determined too. By the smooth non-degenerate variable substitution in the state space, the system is transformed to a regular quasicanonical form with two-dimensional canonical subsystems. A method for solving a terminal problem of the obtained class is offered on assumption that the right-hand side of one of the equations is positive in the whole state space. A sufficient condition for existence of the terminal problem solution is proved for the indicated class of systems. A numerical procedure for constructing the terminal problem solution is proposed and an example illustrating the proposed numerical procedure is given. The obtained results may be used in solving terminal control problems for technical systems.*

***Keywords***: affine system, quasicanonical form, terminal control problem.

**1. Введение.** Для нелинейной системы

$$\dot{x} = A(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

рассмотрим терминальную задачу в следующей постановке. Заданы два состояния системы — $x_0$ и $x_*$. Требуется найти программное управление $u = u(t)$, для которого решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(x, u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

в некоторый момент времени $t = t_* > 0$ удовлетворяет условию $x(t_*) = x_*$.

Терминальные задачи и связанные с ними вопросы достижимости и управляемости рассматривались в работах [1–10]. Один из подходов к решению терминальных задач состоит в преобразовании системы к тому или иному специальному виду, для которого методы решения терминальной задачи известны. В работах [1, 2] рассматривались аффинные системы, линеаризуемые обратной связью. Для решения терминальной задачи было предложено преобразовывать систему к так называемому каноническому виду, для которого терминальное управление строится на основе концепции обратных задач динамики: сначала задается программная траектория, удовлетворяющая граничным условиям, а затем из уравнений движения определяется программное управление. В работе [3] класс систем, преобразование к которым позволяет решать терминальную задачу, расширен за счет введения в рассмотрение систем квазиканонического вида [4]. В [3] предложен метод решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида со скалярным управлением, а также получены достаточные условия разрешимости терминальной задачи для указанного класса систем.

В данной работе рассматриваются аффинные системы с векторным управлением, эквивалентные системам квазиканонического вида. При этом предполагается, что в рассматриваемых системах подсистемы канонического вида двумерны. Именно к исследованию таких систем приводят многие прикладные задачи, в частности задачи механики, поэтому представляется важным разработать методы решения терминальных задач для этого класса систем.

**2. Преобразование системы к квазиканоническому виду.** Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = F(x) + \sum_{j=1}^{m} G_j(x) u_j, \tag{1}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^m,$$

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^{\mathrm{т}}, \quad G_j(x) = (G_{1j}(x), \ldots, G_{nj}(x))^{\mathrm{т}},$$

$$F_i(x), G_{ij}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m},$$

и терминальную задачу для нее: для заданного состояния системы (1) при $t = 0$ $x(0) = x_0$ требуется найти такие управления $u_1 = u_1(t), \ldots, u_m = u_m(t)$, что для решения $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = F(x) + \sum_{j=1}^{m} G_j(x) u_j(t), \quad x(0) = x_0$$

существует момент времени $t = t_*$, в который это решение будет удовлетворять условию $x(t_*) = x_*$.

Системе (1) на пространстве состояний $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{G}_j = \sum_{i=1}^{n} G_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Обозначим коммутатор двух векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ через $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, и пусть $\mathrm{ad}^0_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$, $\mathrm{ad}^k_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathrm{ad}^{k-1}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Следующая теорема [4] устанавливает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система (1) на открытом подмножестве $\Omega$ пространства состояний $\mathbb{R}^n$ с помощью гладкой замены переменных $(z, \eta) = \varphi(x)$, где $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$, преобразуется к квазиканоническому виду

$$\begin{aligned}
&\dot{z}^i_1 = z^i_2, \; \ldots, \; \dot{z}^i_{r_i - 1} = z^i_{r_i}, \\
&\dot{z}^i_{r_i} = f_i(z, \eta) + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(z, \eta) u_j, \\
&\dot{\eta}_1 = q_1(z, \eta), \; \ldots \; \dot{\eta}_\rho = q_\rho(z, \eta),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$i = \overline{1, m}, \quad r_1 + \cdots + r_m = n - \rho, \quad z = (z^1_1, \ldots, z^1_{r_1}, \ldots, z^m_1, \ldots, z^m_{r_m})^{\mathrm{т}},$$

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\rho)^{\mathrm{т}}, \quad f_i(z, \eta), g_{ij}(z, \eta) \in C^\infty(\varphi(\Omega)), \; i, j = \overline{1, m},$$

$$q_1(z, \eta), \ldots q_\rho(z, \eta) \in C^\infty(\varphi(\Omega)).$$

**Теорема 1.** *Для того чтобы аффинная система* (1) *на множестве* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *приводилась к квазиканоническому виду* (2), *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) *существовали функции* $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, m}$, *удовлетворяющие в* $\Omega$ *системе уравнений в частных производных первого порядка*

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_j \varphi_i(x) = 0, \quad k = \overline{0, r_i - 2}, \; i, j = \overline{1, m}, \quad x \in \Omega;$$

2) *существовали такие функции* $\varphi_{n-\rho+l}(x) \in C^\infty(\Omega)$, $l = \overline{1, \rho}$, *что для всех* $x \in \Omega$

$$\mathbf{G}_j \varphi_{n-\rho+l}(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \; l = \overline{1, \rho},$$

*и отображение* $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$, *задаваемое системой функций*

$$\begin{aligned}
&z^i_k = \mathbf{F}^{k-1} \varphi_i(x), \quad k = \overline{1, r_i}, \; i = \overline{1, m}, \\
&\eta_l = \varphi_{n-\rho+l}(x), \quad l = \overline{1, \rho},
\end{aligned}$$

*являлось диффеоморфизмом.*

Если система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, то терминальная задача для этой системы преобразуется в терминальную задачу для системы (2) с граничными состояниями $(z_0, \eta_0) = \varphi(x_0)$, $(z_*, \eta_*) = \varphi(x_*)$. Управление $u(t)$, являющееся решением одной из этих задач, одновременно является решением и другой терминальной задачи.

Далее будем полагать, что система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, причем $\varphi(\Omega) = \mathbb{R}^n$, $r_i = 2$, $i = \overline{1, m}$, $\rho = 1$, система (2) регулярна: матрица

$$g(z, \eta) = \begin{pmatrix} g_{11}(z, \eta) & \ldots & g_{1m}(z, \eta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(z, \eta) & \ldots & g_{mm}(z, \eta) \end{pmatrix}$$

не вырождена в $\mathbb{R}^n$.

**3. Решение терминальной задачи для системы квазиканонического вида.** При сделанных предположениях система (1) заменой переменных преобразуется в систему квазиканонического вида

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1^i = z_2^i, \\ &\dot{z}_2^i = f_i(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) u_j, \\ &\dot{\eta} = q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta), \end{aligned} \tag{3}$$

$$i = \overline{1, m}, \quad (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

$$\det g(z, \eta) \neq 0 \text{ в } \mathbb{R}^n, \quad q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$f_i(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta),\ g_{ij}(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ i, j = \overline{1, m}.$$

Вместо терминальной задачи для системы (1) получаем эквивалентную терминальную задачу для системы (3): для заданного состояния системы (3) при $t = 0$

$$z_1^1(0) = z_{10}^1,\ z_2^1(0) = z_{20}^1, \ldots, z_1^m(0) = z_{10}^m,\ z_2^m(0) = z_{20}^m, \eta(0) = \eta_0 \tag{4}$$

требуется найти такие управления $u_1 = u_1(t), \ldots, u_m = u_m(t)$, что для решения $z_1^1(t)$, $z_2^1(t)$, $\ldots$, $z_1^m(t)$, $z_2^m(t)$, $\eta(t)$ задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1^i = z_2^i, \\ &\dot{z}_2^i = f_i(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) u_j(t) \\ &\dot{\eta} = q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta), \\ &z_1^1(0) = z_{10}^1,\ z_2^1(0) = z_{20}^1, \ldots, z_1^m(0) = z_{10}^m,\ z_2^m(0) = z_{20}^m, \eta(0) = \eta_0 \end{aligned}$$

существует момент времени $t = t_* > 0$, в который это решение будет удовлетворять условиям

$$z_1^1(t_*) = z_{1*}^1,\ z_2^1(t_*) = z_{2*}^1, \ldots, z_1^m(t_*) = \\ = z_{1*}^m,\ z_2^m(t_*) = z_{2*}^m, \eta(t_*) = \eta_*. \quad (5)$$

Дополнительно предположим, что $q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) > 0$ в $\mathbb{R}^n$. Из последнего уравнения системы (3) следует, что тогда на траекториях системы $\dot{\eta} > 0$. Следовательно, каким бы ни было решение $z_1^i(t)$, $z_2^i(t)$, $\eta(t)$, $i = \overline{1, m}$, системы (3), функция $\eta(t)$ возрастает, поэтому в любой момент времени $t$ каждому значению $\eta = \eta(t)$ соответствуют единственные значения $z_1^i$, $z_2^i$, $i = \overline{1, m}$, т.е. можно рассматривать $z_1^i, z_2^i, i = \overline{1, m}$, как функции $\eta$. Граничные условия на переменные $z_1^i$, $z_2^i$ тогда примут вид

$$z_1^i(\eta_0) = z_{10}^i,\ z_2^i(\eta_0) = z_{20}^i,\ z_1^i(\eta_*) = z_{1*}^i,\ z_2^i(\eta_*) = z_{2*}^i. \quad (6)$$

Пусть $\eta_0 < \eta_*$ и $b_i(\eta) \in C^2[\eta_0, \eta_*], i = \overline{1, m}$, – любые функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} b_i(\eta_0) &= z_{10}^i,\ b_i'(\eta_0) = \frac{z_{20}^i}{q(z_{10}^1, z_{20}^1, \ldots, z_{10}^m, z_{20}^m, \eta_0)}, \\ b_i(\eta_*) &= z_{1*}^i,\ b_i'(\eta_*) = \frac{z_{2*}^i}{q(z_{1*}^1, z_{2*}^1, \ldots, z_{1*}^m, z_{2*}^m, \eta_*)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$z_1^i = b_i(\eta), \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

В силу системы (3) справедливы равенства

$$\frac{d}{d\eta} z_1^i = \frac{\dot{z}_1^i}{\dot{\eta}} = \frac{z_2^i}{q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Учитывая (8), из (9) получаем систему уравнений

$$z_2^i = b_i'(\eta) q(b_1(\eta), z_2^1, \ldots, b_m(\eta), z_2^m, \eta), \quad i = \overline{1, m}, \quad (10)$$

относительно $z_2^i$, $i = \overline{1, m}$. Пусть для любого $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$ существует решение этой системы

$$z_2^i = c_i(\eta), \quad i = \overline{1, m}, \quad (11)$$

и функции $c_i(\eta)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\eta_0, \eta_*]$.

Тогда функции (8), (11) удовлетворяют условиям (6). Подставим $z_1^i = b_i(\eta)$ и $z_2^i = c_i(\eta)$ вместо $z_1^i$, $z_2^i$ в последнее уравнение системы (3). Получим уравнение

$$\dot{\eta} = q(b_1(\eta), c_1(\eta), \ldots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta). \quad (12)$$

Проинтегрировав его с начальным условием $\eta(0) = \eta_0$, придем к соотношению

$$t = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{q(b_1(\eta), c_1(\eta), \ldots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta)}, \tag{13}$$

которое неявно задает решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (12), удовлетворяющее условию $\eta(0) = \eta_0$. Момент времени $t = t_*$, в который выполнено равенство $\eta(t_*) = \eta_*$, определяется соотношением

$$t_* = \int\limits_{\eta_0}^{\eta_*} \frac{d\eta}{q(b_1(\eta), c_1(\eta), \ldots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta)}. \tag{14}$$

Отметим, что условие $q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) > 0$ в $\mathbb{R}^n$ гарантирует существование момента времени $t = t_*$, определяемого равенством (14), а также существование и непрерывную дифференцируемость на отрезке $[0, t_*]$ функции $\eta(t)$.

Функции $b_i(\eta(t))$, $c_i(\eta(t))$, $i = \overline{1, m}$, $\eta(t)$, задают непрерывно дифференцируемую $t$-параметрическую кривую в пространстве состояний системы (3), $t \in [0, t_*]$, которая соединяет состояния (4) и (5). Чтобы найти управления $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, реализующие эту кривую в качестве траектории системы (3), подставим в систему (3) функции $b_i(\eta(t))$, $c_i(\eta(t))$, $i = \overline{1, m}$, и $\eta(t)$. Получим квадратную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(b_1(\eta(t)), c_1(\eta(t)), \ldots, b_m(\eta(t)), c_m(\eta(t)), \eta(t)) u_j = \dot{c}_i(\eta(t)) -$$
$$- f_i(b_1(\eta(t)), c_1(\eta(t)), \ldots, b_m(\eta(t)), c_m(\eta(t)), \eta(t)), \quad i = \overline{1, m}, \tag{15}$$

относительно управлений $u_j$, $j = \overline{1, m}$, с невырожденной матрицей

$$g(b_1(\eta(t)), c_1(\eta(t)), \ldots, b_m(\eta(t)), c_m(\eta(t)), \eta(t)).$$

Решив эту систему, найдем $u_j = u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$.

З а м е ч а н и е. Условия $q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) > 0$ в $\mathbb{R}^n$ и $\det g(z, \eta) \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$ можно ослабить. При решении терминальной задачи (4), (5) для системы (3) достаточно, чтобы условия $q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta) > 0$, $\det g(z, \eta) \neq 0$ были выполнены при $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$, $z_1^i \in [\min\limits_{[\eta_0, \eta_*]} b_i(\eta), \max\limits_{[\eta_0, \eta_*]} b_i(\eta)]$, $z_2^i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$.

**4. Достаточное условие существования решения.** Ключевая проблема при применении описанной в п. 3 схемы решения терминальной задачи (3)–(5) — существование и непрерывная дифференцируемость на отрезке $[\eta_0, \eta_*]$ функций $z_2^i = c_i(\eta)$, заданных неявно системой уравнений (10). Докажем достаточное условие существования функций $z_2^i = c_i(\eta) \in C^1[\eta_0, \eta_*]$, $i = \overline{1, m}$.

**Теорема 2.** *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} b_i'(\eta)\frac{\partial q(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_1^m, z_2^m, \eta)}{\partial z_2^i} \leqslant 1-\varepsilon$$

*выполнено при всех $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$, $z_1^i \in [\min\limits_{[\eta_0,\eta_*]} b_i(\eta), \max\limits_{[\eta_0,\eta_*]} b_i(\eta)]$, $z_2^i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$. Тогда система уравнений* (10) *на отрезке* $[\eta_0, \eta_*]$ *имеет единственное решение $z_2^i = c_i(\eta)$, $i = \overline{1,m}$, причем функции $c_i(\eta) \in C^1[\eta_0, \eta_*]$, $i = \overline{1,m}$.*

◀ Зафиксируем произвольное $\tilde{\eta} \in [\eta_0, \eta_*]$ и покажем, что при $\eta = \tilde{\eta}$ система (10) имеет единственное решение $\tilde{z}_2^1, \ldots, \tilde{z}_2^m$. Если $b_i'(\tilde{\eta}) = 0$ для всех $i = \overline{1,m}$, то очевидно, что $\tilde{z}_2^1 = \cdots = \tilde{z}_2^m = 0$.

Предположим теперь, что хотя бы для одного $i$ выполнено неравенство $b_i'(\tilde{\eta}) \neq 0$. Будем для определенности полагать, что $b_1'(\tilde{\eta}) \neq 0$ и, более того, что $b_1'(\tilde{\eta}) > 0$. Тогда из первого уравнения системы (10) находим, что

$$q(b_1(\tilde{\eta}), z_2^1, \ldots, b_m(\tilde{\eta}), z_2^m, \tilde{\eta}) = \frac{z_2^1}{b_1'(\tilde{\eta})}.$$

Подставив это выражение в остальные уравнения системы (10), получим равенства

$$z_2^i = \frac{b_i'(\tilde{\eta})}{b_1'(\tilde{\eta})} z_2^1, \quad i = \overline{2,m}. \tag{16}$$

Подставив их в первое уравнение системы (10), получим уравнение

$$z_2^1 = b_1'(\tilde{\eta}) \cdot q\left(b_1(\tilde{\eta}), z_2^1, b_2(\tilde{\eta}), \frac{b_2'(\tilde{\eta})}{b_1'(\tilde{\eta})} z_2^1, \ldots, b_m(\tilde{\eta}), \frac{b_m'(\tilde{\eta})}{b_1'(\tilde{\eta})} z_2^1, \tilde{\eta}\right) \tag{17}$$

относительно $z_2^1$. Рассмотрим функцию

$$\psi(z_2^1) = b_1'(\tilde{\eta}) \cdot q\left(b_1(\tilde{\eta}), z_2^1, b_2(\tilde{\eta}), \frac{b_2'(\tilde{\eta})}{b_1'(\tilde{\eta})} z_2^1, \ldots, b_m(\tilde{\eta}), \frac{b_m'(\tilde{\eta})}{b_1'(\tilde{\eta})} z_2^1, \tilde{\eta}\right).$$

При всех $z_2^1 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства $\psi(z_2^1) > 0$ и

$$\psi'(z_2^1) = b_1'(\tilde{\eta})\left(\frac{\partial q}{\partial z_2^1} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial q}{\partial z_2^i} \cdot \frac{b_i'(\tilde{\eta})}{b_1'(\tilde{\eta})}\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i'(\tilde{\eta}) \frac{\partial q}{\partial z_2^i} \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Обозначим $h(z_2^1) = \psi(z_2^1) - z_2^1$. Тогда уравнение (17) примет вид $h(z_2^1) = 0$. Отметим, что $h(0) = \psi(0) > 0$, а при $z_2^1 > 0$ справедлива оценка

$$h(z_2^1) = \int\limits_0^{z_2^1} \left(\psi'(z_2^1) - 1\right) dz_2^1 + h(0) \leqslant \int\limits_0^{z_2^1} (-\varepsilon) dz_2^1 + h(0) = -\varepsilon z_2^1 + h(0),$$

поэтому $h(z_2^1) < 0$, как только $z_2^1 > h(0)/\varepsilon$. Отсюда следует, что существует такое $\tilde z_2^1$, что $h(\tilde z_2^1) = 0$, т.е. существует решение уравнения (17). Так как

$$h'(z_2^1) = \psi'(z_2^1) - 1 \leqslant -\varepsilon < 0,$$

то функция $h(z_2^1)$ строго убывает, поэтому $\tilde z_2^1$ — ее единственный нуль в $\mathbb{R}$. По формулам (16) найдем

$$\tilde z_2^i = \frac{b_i'(\tilde\eta)}{b_1'(\tilde\eta)}\tilde z_2^1, \quad i = \overline{2,m},$$

и получим, что $\tilde z_2^1, \ldots, \tilde z_2^m$ — единственное решение системы (10) при $\tilde\eta \in [\eta_0, \eta_*]$. Таким образом, на отрезке $[\eta_0, \eta_*]$ определены функции $c_1(\eta), \ldots c_m(\eta)$, которые каждому $\tilde\eta \in [\eta_0, \eta_*]$ ставят в соответствие единственное решение $\tilde z_2^1, \ldots, \tilde z_2^m$ системы (10) при $\eta = \tilde\eta$.

Покажем, что $z_2^i = c_i(\eta) \in C^1[\eta_0, \eta_*]$, $i = \overline{1,m}$. Обозначим

$$H_i(z_2^1, \ldots, z_2^m, \eta) = z_2^i - b_i'(\eta) q(b_1(\eta), z_2^1, \ldots, b_m(\eta), z_2^m, \eta), \quad i = \overline{1,m}.$$

Тогда система (10) примет вид

$$H_i(z_2^1, \ldots, z_2^m, \eta) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Вычислим якобиан $J(z_2^1, \ldots, z_2^m, \eta)$ системы функций $H_i(z_2^1, \ldots, z_2^m, \eta)$, $i = \overline{1,m}$, по переменным $z_2^1, \ldots, z_2^m$:

$$J(z_2^1, \ldots, z_2^m, \eta) = \begin{vmatrix} 1 - b_1'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^1} & -b_1'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^2} & \ldots & -b_1'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^m} \\ -b_2'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^1} & 1 - b_2'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^2} & \ldots & -b_2'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_m'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^1} & -b_m'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^2} & \ldots & 1 - b_m'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^m} \end{vmatrix}.$$

Если при некотором $\overline\eta \in [\eta_0, \eta_*]$ выполнены равенства $b_i'(\overline\eta) = 0$, $i = \overline{1,m}$, то $J(z_2^1, \ldots, z_2^m, \overline\eta) = 1$ при всех $z_2^i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$. Предположим теперь, что при некотором $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$ хотя бы одна из функций $b_i'$, например $b_1'$, отлична от нуля. Тогда сначала для $i = \overline{2,m}$ вычтем из $i$-й строки определителя его первую строку, умноженную на $b_i'(\eta)/b_1'(\eta)$, а затем прибавим к первому столбцу полученного определителя линейную комбинацию остальных столбцов с коэффициентами $b_2'(\eta)/b_1'(\eta)$, $\ldots$, $b_m'(\eta)/b_1'(\eta)$. Получим

$$J(z_2^1, \ldots, z_2^m, \eta) = \begin{vmatrix} 1 - b_1'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^1} & -b_1'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^2} & \ldots & -b_1'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2^m} \\ -b_2'(\eta)/b_1'(\eta) & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_m'(\eta)/b_1'(\eta) & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j'(\eta) \dfrac{\partial q}{\partial z_2^j} & -b_1'(\eta) \dfrac{\partial q}{\partial z_2^2} & \dots & -b_1'(\eta) \dfrac{\partial q}{\partial z_2^m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 1 - \sum_{j=1}^{m} b_j'(\eta) \frac{\partial q}{\partial z_2^j} \geq \varepsilon > 0.
$$

Таким образом, $J(z_2^1, \dots, z_2^m, \eta) \neq 0$ при всех $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$, $z_2^i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, и, следовательно, по теореме о неявной функции $z_2^i = c_i(\eta) \in \in C^1[\eta_0, \eta_*]$, $i = \overline{1, m}$. ▶

З а м е ч а н и е. При выполнении условий теоремы 2 управления $u_j$, $j = \overline{1, m}$, можно найти другим способом. Считая, что в (3) и в (10) $z_1^i = b_i(\eta)$, $z_2^i = c_i(\eta)$, $i = \overline{1, m}$, продифференцируем по $\eta$ равенства (10), учитывая, что в силу системы (3)

$$
\frac{d}{d\eta} z_2^i = \frac{\dot{z}_2^i}{\dot{\eta}} = \frac{v_i}{q(z_1^1, z_2^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \eta)}, \quad i = \overline{1, m},
$$

где

$$
v_i = f_i(z_1^1, z_2^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \eta) + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(z_1^1, z_2^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \eta) u_j.
$$

В результате после преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений

$$
v_i - b_i'(\eta) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial q}{\partial z_2^j} v_j = W_i(\eta), \quad i = \overline{1, m}, \tag{18}
$$

относительно $v_1, \dots, v_m$, где

$$
W_i(\eta) = b_i''(\eta) q^2(b_1(\eta), c_1(\eta), \dots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta) +
$$

$$
+ b_i'(\eta) q(b_1(\eta), c_1(\eta), \dots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta) \left[ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial q}{\partial z_1^j} b_j'(\eta) + \frac{\partial q}{\partial \eta} \right].
$$

Определитель матрицы системы (18) равен $J(c_1(\eta), \dots, c_m(\eta), \eta)$. Он не обращается в нуль на отрезке $[\eta_0, \eta_*]$, поэтому система (18) при $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$ имеет единственное решение $v_1 = v_1(\eta), \dots, v_m = v_m(\eta)$. Чтобы найти значения управлений $u_1, \dots, u_m$ в момент времени $t$, надо с помощью (13) для $t$ найти соответствующее значение $\eta$, а затем решить систему линейных алгебраических уравнений

$$v_i(\eta) = f_i(b_1(\eta), c_1(\eta), \ldots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(b_1(\eta), c_1(\eta), \ldots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta) u_j.$$

Эта система имеет единственное решение $u_1 = u_1(\eta), \ldots, u_m = u_m(\eta)$, так как ее матрица $g(b_1(\eta), c_1(\eta), \ldots, b_m(\eta), c_m(\eta), \eta)$ не вырождена при всех $\eta \in [\eta_0, \eta_*]$.

**5. Численная процедура.** Предложим численную процедуру решения терминальной задачи (4), (5) для системы (3). Пусть $\tau$ — шаг изменения времени. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ введем обозначения

$$t_k = k\tau, \quad \eta_k = \eta(t_k), \quad (z_1^i)_k = z_1^i(t_k), \quad (z_2^i)_k = z_2^i(t_k), \quad i = \overline{1, m}.$$

Заменим последнее уравнение системы (3) разностным уравнением

$$\frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\tau} = q((z_1^1)_k, (z_2^1)_k, \ldots, (z_1^m)_k, (z_2^m)_k, \eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \tau q((z_1^1)_k, (z_2^1)_k, \ldots, (z_1^m)_k, (z_2^m)_k, \eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (19)$$

При $k = 0$ правая часть в (19) известна из начальных условий: $(z_1^i)_0 = z_{10}^i$, $(z_2^i)_0 = z_{20}^i$, $i = \overline{1, m}$, поэтому по формуле (19) можем найти $\eta_1$.

Пусть далее при некотором произвольном $k$ по формуле (19) найдено $\eta_{k+1}$. Значения $(z_1^i)_{k+1}$ вычисляются с использованием (8):

$$(z_1^i)_{k+1} = b_i(\eta_{k+1}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Для нахождения $(z_2^i)_{k+1}$ из равенств (10) получаем систему уравнений

$$z_2^i = b_i'(\eta_{k+1}) \cdot q((z_1^1)_{k+1}, z_2^1, \ldots, (z_1^m)_{k+1}, z_2^m, \eta_{k+1}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Применяя, например, одношаговые итерационные методы решения нелинейных систем, решаем систему (20) и находим $(z_2^i)_{k+1}$, $i = \overline{1, m}$. В качестве начального приближения при решении системы (20) можно взять значения $(z_2^i)_k$, $i = \overline{1, m}$, известные с предыдущей итерации.

Вычисления по описанной схеме продолжаются до $k = N$ (номер $N$ определяется из условия $|\eta_N - \eta_*| < \delta$, где $\delta$ — заданная точность). Результатом работы алгоритма будут массивы

$$\{\eta_k\}, \quad \{(z_1^i)_k\}, \quad \{(z_2^i)_k\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, N}$$

значений функций $\eta(t)$, $z_1^i(t)$, $z_2^i(t)$, $i = \overline{1, m}$, в моменты времени $t_k$, $k = \overline{0, N}$, а также момент времени $t_N$, в который система (3) достигнет конечного состояния (5).

Значения $(u_j)_k = u_j(t_k)$, $j = \overline{1, m}$, управлений $u_j(t)$, являющихся решением рассматриваемой задачи, в моменты времени $t_k$, $k = \overline{0, N}$, можно найти, используя разностный аналог формулы (5). В результате получим квадратные системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} g_{ij}((z_1^1)_k, (z_2^1)_k, \ldots, (z_1^m)_k, (z_2^m)_k, \eta_k) \cdot (u_j)_k =$$

$$= \frac{(z_2^i)_{k+1} - (z_2^i)_k}{\tau} - f_i((z_1^1)_k, (z_2^1)_k, \ldots, (z_1^m)_k, (z_2^m)_k, \eta_k), \quad i = \overline{1, m},$$

с невырожденными матрицами. Решив эти системы, найдем $(u_j)_k$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N}$.

П р и м е р. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2, \\ \dot z_2 &= u, \\ \dot \eta &= e^{-z_2} + \eta^2, \end{aligned}$$

где $u \in \mathbb{R}$, со следующими граничными условиями:

$$\begin{array}{lll} z_1(0) = 0, & z_2(0) = 0, & \eta(0) = 0, \\ z_1(t_*) = 1, & z_2(t_*) = 1, & \eta(t_*) = 1. \end{array}$$

Функция $q(z_1, z_2, \eta) = e^{-z_2} + \eta^2 > 0$ в $\mathbb{R}^3$. Выберем в качестве функции $b(\eta)$, удовлетворяющей, согласно (7), условиям

$$b(0) = 0,\ b'(0) = 0,\ b(1) = 1,\ b'(1) = \frac{e}{e+1},$$

функцию

$$b(\eta) = -\frac{e+2}{e+1}\eta^3 + \frac{2e+3}{e+1}\eta^2.$$

Проверим выполнение достаточного условия существования решения из теоремы 2. Поскольку

$$\frac{\partial q}{\partial z_2} = -e^{-z_2} < 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3,$$

$$b'(\eta) = -\frac{3e+6}{e+1}\eta^2 + \frac{4e+6}{e+1}\eta \geq 0 \quad \text{при всех} \quad \eta \in [0, 1],$$

то из этих неравенств следует, что $b'(\eta)\dfrac{\partial q}{\partial z_2} \leq 0$ при $z_1$, $z_2 \in \mathbb{R}$, $\eta \in [0, 1]$ и условие теоремы 2 выполнено с $\varepsilon = 1$.

Зададим шаг $\tau = 0{,}0001$, точность $\delta = 0{,}001$. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим

$$t_k = k\tau, \quad \eta_k = \eta(t_k), \quad z_{1k} = z_1(t_k), \quad z_{2k} = z_2(t_k).$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ значения $z_{10}$, $z_{20}$, $\eta_0$ известны из начальных условий: $z_{10} = 0$, $z_{20} = 0$, $\eta_0 = 0$. Далее для $k = 0, 1, 2, \ldots$ проводим вычисления по следующей схеме:

— находим $\eta_{k+1}$ по формуле $\eta_{k+1} = \eta_k + \tau q(z_{1k}, z_{2k}, \eta_k)$;

— вычисляем $z_{1,k+1}$ по формуле $z_{1,k+1} = b(\eta_{k+1})$;

— находим $z_{2,k+1}$ как решение уравнения

$$z_2 = b'(\eta_{k+1}) \cdot q(z_{1,k+1}, z_2, \eta_{k+1}).$$

Для решения последнего уравнения использовался метод простой итерации. Расчеты показали, что условие $|\eta_N - 1| < \delta$ выполняется при $N = 13000$. Таким образом, момент времени $t_* \approx t_N = 1{,}3$. Графики функций $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\eta(t)$ на отрезке $[0, t_N]$, построенные в результате работы алгоритма, приведены на рис. 1–3.

Для нахождения значений $u_k$ управления $u$ в моменты времени $t_k$ использовалась формула

$$u_k = \frac{z_{2,k+1} - z_{2k}}{\tau}, \qquad k = \overline{0, N}.$$

График функции $u(t)$ приведен на рис. 4.

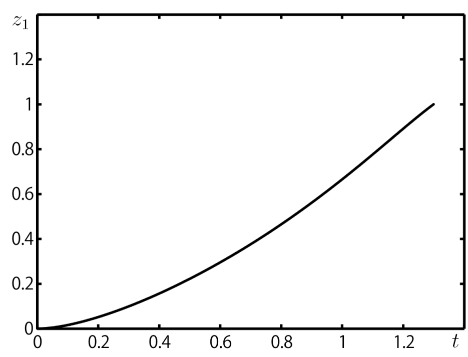


**Рис. 1. График функции $z_1(t)$**

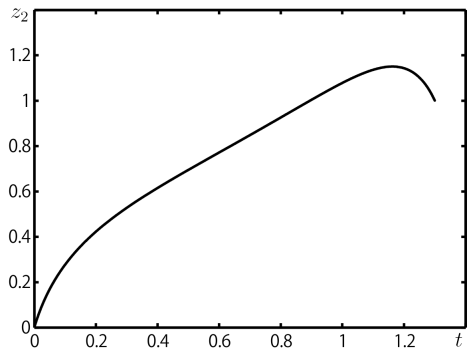


**Рис. 2. График функции $z_2(t)$**

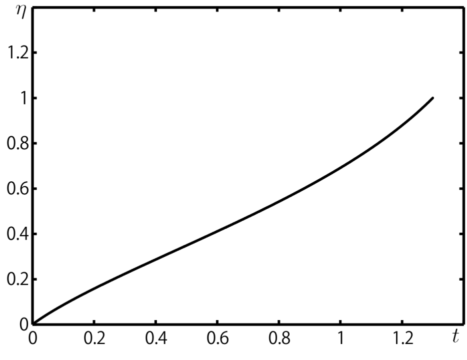


**Рис. 3. График функции $\eta(t)$**

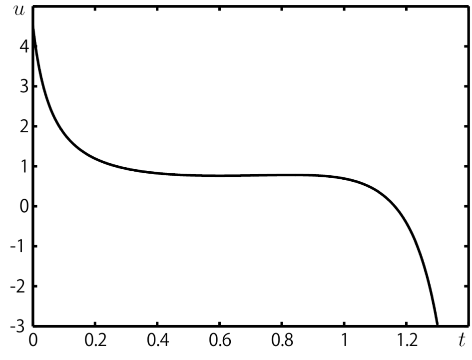


**Рис. 4. График функции $u(t)$**

Для проверки точности полученного решения проинтегрируем исходную систему, замкнутую найденным управлением, на отрезке $[0, t_N]$ методом Эйлера с тем же шагом $\tau$. Положим $\overline{z}_{10} = 0$, $\overline{z}_{20} = 0$, $\overline{\eta}_0 = 0$ и для $k = \overline{0, N-1}$ вычислим

$$\begin{aligned} \overline{z}_{1,k+1} &= \overline{z}_{1k} + \tau \overline{z}_{2k}, \\ \overline{z}_{2,k+1} &= \overline{z}_{2k} + \tau u_k, \\ \overline{\eta}_{k+1} &= \overline{\eta}_k + \tau q(\overline{z}_{1k}, \overline{z}_{2k}, \overline{\eta}_k). \end{aligned}$$

Расчеты показали, что

$$\Delta = \max_{k=\overline{0,N}} \{|z_{1k} - \overline{z}_{1k}|, |z_{2k} - \overline{z}_{2k}|, |\eta_k - \overline{\eta}_k|\} \approx 2,67 \cdot 10^{-5}.$$

**Заключение.** Рассмотрена терминальная задача для аффинных систем, эквивалентных системам квазиканонического вида. Предложен метод решения терминальной задачи для регулярных систем квазиканонического вида с двумерными подсистемами канонического вида. Предложена численная процедура построения решения и получено достаточное условие существования решения терминальной задачи для данного класса систем. Приведен пример решения терминальной задачи предложенным методом.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00733, 12-01-31303) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевнин А.А., Крищенко А.П.* Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.
2. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
3. *Фетисов Д.А.* Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.
4. *Крищенко А.П., Клинковский М.Г.* Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1945–1952.
5. *Емельянов С.В., Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Исследование управляемости аффинных систем // Докл. АН. 2013. Т. 449, № 1. С. 15–18.
6. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.
7. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.
8. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
9. *Isidori A.* Nonlinear control systems. 3rd edition. London: Springer-Verlag, 1995. 550 p.
10. *Sastry S.* Nonlinear systems: analysis, stability, and control. New York: Springer-Verlag, 1999. 667 p.

## REFERENCES


1. *Zhevnin A.A.*, *Krishchenko A.P.* Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809 (in Russ.).
2. *Krasnoshchechenko V.I.*, *Krishchenko A.P.* Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.
3. *Fetisov D.A.* Study of controllability of regular systems of quasicanonical type. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2006, no. 3, pp. 12–30 (in Russ.).
4. *Krishchenko A.P.*, *Klinkovskiy M.G.* The transformation of affine systems with control and stabilization problem. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1992, vol. 28, no. 11, pp. 1945–1952 (in Russ.).
5. *Emel'yanov S.V.*, *Krishchenko A.P.*, *Fetisov D.A.* Controllability research on affine systems. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2013, vol. 449, no. 1, pp. 15–18 (in Russ.).
6. *Krut'ko P.D.* Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Nelineynye Modeli [Inverse dynamics problems of controlled systems. Nonlinear models]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 328 p.
7. *Kovalev A.M.* Nelineinye zadachi upravleniia i nabliudeniia v teorii dinamicheskikh system [Nonlinear problems of control and observation in the theory of dynamic systems]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1980. 174 p.
8. *Chernous'ko F.L.* Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod Ellipsoidov [Estimation of phase states of dynamic systems. The ellipsoid method]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 320 p.
9. *Isidori A.* Nonlinear control systems. London, Springer-Verlag, 1995. 550 p.
10. *Sastry S.* Nonlinear systems: analysis, stability, and control. New York, Springer-Verlag, 1999. 667 p.



Статья поступила в редакцию 30.11.2012



Александр Петрович Крищенко — д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области нелинейной теории управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.P. Krishchenko — Dr. Sci. (Phys.–Math.), corresponding member of the RAS, head of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of nonlinear control theory.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Дмитрий Анатольевич Фетисов — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор девяти работ в области математической теории управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

D.A. Fetisov — Cand. Sci. (Phys.–Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of nine publications in the field of mathematical control theory.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.