



Алексей Юрьевич Чирков родился в 1976 г, окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2000 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теплофизика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 50 научных работ в области физики плазмы.

A.Yu. Chirkov (b. 1976) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2000. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Thermal Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 50 publications in the field of plasma physics.

УДК 532.59:537.29

И. Н. Алиев, С. О. Юрченко,
Е. В. Назарова

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ ФРЕНКЕЛЯ-ТОНКСА И КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрены особенности решения задачи о распространении волн на поверхности вязкой проводящей жидкости, нагреваемой снизу и находящейся в постоянном электрическом поле, перпендикулярном к невозмущенной поверхности. Показано, что взаимодействие возбуждающих факторов (электрического и теплового) оказывает существенное влияние на начало развития конвективной неустойчивости, особенно вблизи критических значений электрического поля. Проведены численные расчеты для соответствующих кривых критических значений числа Рэлея. Обсуждено качественное поведение решения спектрального уравнения. Проанализированы граничные условия для качественно различных решений.

Задача исследования свободной конвекции тяжелой проводящей жидкости, находящейся в электрическом поле, является актуальной в связи с широким кругом приложений. Феномен конвективной неустойчивости играет важную роль в ряде явлений, связанных с физикой атмосферы, гидродинамикой конвективных движений, в том числе и в проводящих средах. Случай сочетания градиента температуры в проводящей жидкости, находящейся в перпендикулярном к невозмущенной поверхности электрическом поле, может иметь место, например, в различных технологических процессах, связанных с расплавами проводящих сред. Заметим, что в рассмотрение можно включить несколько случаев модельной задачи об устойчивости волновых движений на поверхности плоского слоя заряженной проводящей жидкости.

Первая задача — это случай однородного вертикального электрического поля в сочетании с “подогреваемым дном”. В такой задаче представляет интерес взаимное влияние неустойчивости заряженной поверхности (неустойчивость Френкеля–Тонкса) [1] и конвективной неустойчивости [2].

Согласно принципу монотонности возмущений, при подогреве снизу декременты нормальных возмущений вещественны и все возмущения либо возрастают, либо затухают во времени монотонно. При учете капиллярных эффектов, вообще говоря, принцип монотонности возмущений не всегда верен, так как капиллярные моды носят колебательный характер. Волновые движения при неустойчивости Френкеля–Тонкса монотонны. Отсюда для первой задачи можно сразу сказать, что результирующие неустойчивости для жидкостей с достаточно большим поверхностным натяжением будут монотонными.

Вторая задача — это сочетание подогрева плоского слоя жидкости сверху с вертикальным электрическим полем. Здесь может иметь место существенное изменение картины волновых движений в отличие от аналогичного случая в отсутствие поля, так как при подогреве сверху все нормальные возмущения затухают со временем, но система имеет колебательные моды собственных движений [2], как в случае волн на поверхности раздела двух жидкостей различной плотности в поле сил тяжести, когда верхняя жидкость движется с постоянной фоновой скоростью (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца) [3]. Представляет интерес возможность управления началом режима неустойчивости Френкеля–Тонкса при помощи вертикального нагрева сверху, хотя вопрос о взаимодействии факторов, приводящих к монотонной и колебательной неустойчивости, в данном случае остается открытым.

1. Постановка и математическая формулировка задачи. Пусть имеется плоский слой толщиной h тяжелой тепло- и электропроводной слабосжимаемой жидкости, нижняя граница которой соприкасается с твердой подложкой, имеющей высокую теплопроводность, а верхняя — свободна и находится в постоянном, перпендикулярном к невозмущенной поверхности электрическом поле. Относительное гидростатическое изменение плотности мало, разность температур на верхней и нижней границах поддерживается постоянной; на поверхности описанной жидкости распространяются плоские синусоидальные волны малой амплитуды. Температура на границах слоя фиксирована, вертикальный градиент равновесной температуры в невозмущенном состоянии равен $-A$.

При указанных допущениях справедлива линеаризованная система уравнений, состоящая из уравнений Навье–Стокса, непрерывности, теплопереноса в приближении Буссинеска–Обербека [3], уравнения Пуассона [1] для электрического потенциала с соответствующими

граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 z \geq h : \quad & \Delta\phi = 0; \\
 h \geq z \geq 0 : \quad & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \vec{g}\beta T + \nu\Delta\vec{v}; \\
 & \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0; \\
 z = 0 : \quad & v_x = v_z = 0, \quad T = 0; \\
 z = h : \quad & \phi - 4\pi\sigma\xi = 0, \quad v_z - \frac{\partial\xi}{\partial t} = 0, \quad T - A\xi = 0; \\
 & -\rho g\xi + p + p^C + p^E = 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0; \\
 z \rightarrow +\infty : \quad & \nabla\phi = -4\pi\sigma\vec{e}_z,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где ϕ — потенциал электрического поля, \vec{v} — скорость точек жидкости; p , T — отклонения значений давления и температуры от равновесных, ρ — плотность жидкости; β — температурный коэффициент линейного расширения жидкости; ν , η — кинематическая и динамическая вязкость; ξ — отклонение точек поверхности от равновесного положения; χ — температуропроводность; σ — поверхностная плотность электрического заряда; p^C , p^E — капиллярное и электростатическое давление; \vec{e}_z — орт в вертикальном положении.

Капиллярное давление над искривленной поверхностью жидкости [3]

$$p^C = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \approx \gamma \Delta_1 \xi, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где R_1 , R_2 — радиусы кривизны поверхности; γ — коэффициент поверхностного натяжения; в случае плоской волны лапласиан $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Для синусоидальной волны потенциал электрического поля и электростатическое давление с учетом граничных условий имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
 \phi &= 4\pi\sigma\xi \exp[-k(z-h)] - 4\pi\sigma(z-h); \\
 p^E &\approx -\frac{1}{8\pi} (\nabla\phi)^2 \Big|_{z=h} = -2\pi\sigma^2 - 4\pi\sigma^2 k\xi,
 \end{aligned}$$

где k — волновое число.

Для волн малой амплитуды уравнения (1) можно линеаризовать, а из граничных условий исключить давление:

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta - 2\eta\Delta_1 \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} = (\rho g - \gamma\Delta_1 - 4\pi\sigma^2 k) \Delta_1 \xi.$$

В случае малых отклонений от равновесных значений нелинейны-ми по скорости слагаемыми в уравнениях (1) можно пренебречь, после чего по аналогии с [2] выбрать единицы измерения:

$$\begin{aligned} [x] = [z] = h; \quad [t] = h^2/\nu; \quad [v] = \chi/h; \\ [p] = \rho\nu\chi/h^2; \quad [T] = Ah. \end{aligned}$$

Для элементарных волн возмущения скорости, температуры, давле-ния зависят от времени и горизонтальной координаты как $\exp[i(kx - \omega t)]$, где ω — комплексная частота, k — волновое чи-сло. Тогда в безразмерных переменных математическая формулировка уравнений задачи и граничных условий имеют вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \text{Ra } T \vec{e}_z; \quad \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{v} \vec{e}_z = \Delta T; \quad \text{div } \vec{v} = 0;$$

$$z = 0: \quad v_x = v_z = 0, \quad T = 0;$$

$$z = 1: \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - ikv_z = 0, \quad v_z + i\omega \text{Pr} T = 0; \quad (2)$$

$$\mu \left[(-i\omega + 3k^2) \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial^3 v_z}{\partial z^3} \right] = -k^2 \left(1 - \frac{F}{\sqrt{W}} k + \frac{k^2}{W} \right) T;$$

$$\text{Ra} = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \mu = \frac{\nu\chi}{gh^3}, \quad W = \frac{\rho gh^2}{\gamma}, \quad F = \frac{4\pi\sigma^2}{\sqrt{\gamma\rho g}},$$

где Ra — число Рэлея, Pr — число Прандтля.

Решение линеаризованной системы уравнений (2) для синусо-идальных волн можно представить в виде бегущей волны с ампли-тудными функциями по скоростям, давлению и температуре:

$$v_x = U(z) \exp[i(kx - \omega t)]; \quad p = P(z) \exp[i(kx - \omega t)];$$

$$v_z = V(z) \exp[i(kx - \omega t)]; \quad T = \theta(z) \exp[i(kx - \omega t)],$$

где U, V, P, θ — амплитудные функции. Отсюда

$$U'' - (k^2 - i\omega)U - ikP = 0;$$

$$V'' - (k^2 - i\omega)V - P' + \text{Ra} \theta = 0;$$

$$\theta'' - (k^2 - i\omega \text{Pr})\theta + V = 0; \quad (3)$$

$$V' + ikU = 0.$$

Будем искать систему линейно независимых решений уравнений системы (3) в виде

$$U(z), V(z), P(z), \theta(z) \sim \exp[\zeta z].$$

Общее решение системы (3) для каждой функции есть линейная комбинация линейно независимых решений. Подстановка приведен-

ных решений в систему (3) и требование нетривиальности общего решения приводят к спектральному уравнению вида

$$\begin{vmatrix} \zeta^2 - k^2 + i\omega & 0 & -ik & 0 \\ 0 & \zeta^2 - k^2 + i\omega & -\zeta & \text{Ra} \\ 0 & 1 & 0 & \zeta^2 - k^2 + i\omega \text{Pr} \\ ik & \zeta & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Алгебраическое уравнение, определяющее спектр значений ζ получается после раскрытия детерминанта и элементарных преобразований:

$$(\zeta^2 - k^2) (\zeta^2 - k^2 + i\omega) (\zeta^2 - k^2 + i\omega \text{Pr}) + \text{Ra} k^2 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) — бикубическое относительно показателя экспоненты, т.е. спектр значений ζ представляет собой три пары комплексно-сопряженных чисел, а искомые амплитудные функции являются линейными комбинациями гиперболических синусов и косинусов.

Выразим амплитудные функции в виде линейных комбинаций гиперболических синусов и косинусов (или экспонент с противоположными по знаку показателями степени), считая известными решения спектрального уравнения (4).

Если ζ_j — корни спектрального уравнения (4), то скорости и отклонения температур можно искать в виде

$$\begin{aligned} v_x &= \zeta_j A_j \exp[\zeta_j z] \exp[i(kx - \omega t)]; \\ v_z &= -ik A_j \exp[\zeta_j z] \exp[i(kx - \omega t)]; \\ \theta &= \frac{ik A_j \exp[\zeta_j z]}{\zeta_j^2 - k^2 + i\omega \text{Pr}} \exp[i(kx - \omega t)], \end{aligned}$$

где предполагается суммирование по дважды повторяющимся индексам.

Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе линейных уравнений относительно констант:

$$\begin{aligned} \zeta_j A_j = 0; \quad \sum_j A_j = 0; \quad \frac{A_j}{\zeta_j^2 - k^2 + i\omega \text{Pr}} = 0; \\ (\zeta_j^2 + k^2) A_j \exp[\zeta_j] = 0; \quad \frac{\zeta_j^2 - k^2}{\zeta_j^2 - k^2 + i\omega \text{Pr}} A_j \exp[\zeta_j] = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left(\mu \zeta_j [\zeta_j^2 + (i\omega - 3k^2)] + \frac{k^2 \left(1 - \frac{F}{\sqrt{W}} k + \frac{k^2}{W} \right)}{\zeta_j^2 - k^2 + i\omega \text{Pr}} \right) A_j \exp[\zeta_j] = 0.$$

Требование нетривиальности системы линейных уравнений относительно констант A_j дает трансцендентное дисперсионное уравнение с определителем шестого порядка.

Граничные условия для колебательных и монотонных возмущений. Подстановка в граничные условия амплитудных функций и требование нетривиальности решения системы линейных уравнений относительно свободных констант дают соответствующее дисперсионное уравнение, которое нужно решать численно.

Граничные условия (2) записаны в наиболее общем виде и могут использоваться как для колебательных, так и для монотонных движений жидкости. Вообще говоря, монотонность или периодичность движений должна определяться после подстановки модельных решений (5) в граничные условия (2) и их последующего решения. Когда заранее известно, что движения монотонные, граничные условия для скоростей на свободной поверхности при поиске неустойчивых волн могут быть переписаны с помощью уравнения неразрывности в виде

$$z = 1 : \quad v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0.$$

В такой форме, однако, граничные условия не допускают колебательных решений.

В некоторых случаях удастся заранее предсказать вид волнового движения. Возбуждающие факторы можно условно разделить на монотонные и колебательные:

— фактор поверхностного заряда (причина неустойчивости Френкеля–Тонкса) — монотонный, так как выйдя из положения равновесия, поверхность жидкости отклоняется вплоть до проявления нелинейных эффектов движения или даже до отрыва капли (экспериментально наблюдаемое появление “конусов Тейлора”);

— фактор динамической раскачки верхней движущейся жидкостью (причина неустойчивости Кельвина–Гельмгольца) — колебательный.

Несмотря на качественные различия, эти две неустойчивости могут быть сведены к какой-нибудь одной при помощи введения эффективных коэффициентов поверхностного натяжения, как это показано в работе [5].

Монотонные факторы должны приводить к реализации монотонного возмущения, а следовательно, условием критичности числа Рэлея будет

$$Ra = Ra_c \Rightarrow i\omega = 0.$$

Тогда условие критичности числа Рэлея может быть определено с учетом (4) и (5) как условие нетривиальности решения системы

линейных алгебраических уравнений

$$\zeta_j A_j = 0; \quad \sum_j A_j = 0; \quad \frac{A_j}{\zeta_j^2 - k^2} = 0; \quad (\zeta_j^2 + k^2) A_j \exp[\zeta_j] = 0;$$

$$A_j \exp[\zeta_j] = 0; \quad \left(\mu \zeta_j [\zeta_j^2 - 3k^2] + \frac{k^2 \left(1 - \frac{F}{\sqrt{W}} k + \frac{k^2}{W} \right)}{\zeta_j^2 - k^2} \right) A_j \exp[\zeta_j] = 0;$$

$$\zeta_{1,2} = k^2 - \text{Ra}^{1/3} k^{2/3}; \quad \zeta_{3,4,5,6}^2 = k^2 + \frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{3}) \text{Ra}^{1/3} k^{2/3},$$

$$j = 1 \dots 6.$$

Классическая неустойчивость Френкеля–Тонкса наступает при значении параметра $F = 2$.

На рис. 1 и 2 приведены кривые зависимости критического числа Рэлея от волнового числа для случая отсутствия электрического поля, что совпадает с рассмотренным в работе [2], а также в случае докритического и критического поля с параметрами $F = 1$ и $F = 2$. Из проведенного численного расчета следует, что электрическое поле снижает значения критических чисел Рэлея. При достижении критического значения напряженности электрического поля на волнах с $k = \sqrt{W}$

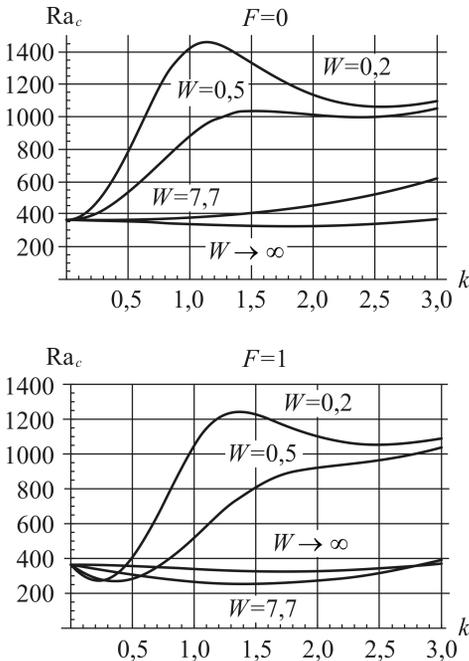


Рис. 1. Графики критических значений чисел Рэлея в отсутствие поля ($F = 0$) и в случае докритического поля ($F = 1$)

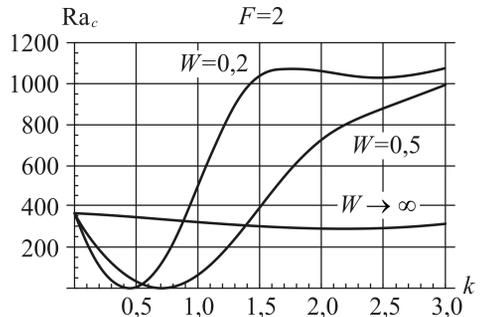


Рис. 2. Графики критических чисел Рэлея в случае критического поля ($F = 2$)

начинается неустойчивость Френкеля–Тонкса, а волны с близкими значениями волнового числа, устойчивые в отсутствие подогрева, могут возбуждаться даже при малых значениях чисел Рэлея.

Анализ спектра амплитудных функций возмущений. Как уже было отмечено, спектральное уравнение (4) — кубическое относительно ζ^2 , а следовательно, всегда имеет точное решение в радикалах:

$$\zeta_i^2 = k^2 - \frac{i\omega(\text{Pr} + 1)}{3} + x_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$x_1 = \frac{\left(\sqrt{p^3 + q^2} - q\right)^{2/3} - p}{\sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} - q}};$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \frac{p - \left(\sqrt{p^3 + q^2} - q\right)^{2/3}}{\sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} - q}} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \frac{p + \left(\sqrt{p^3 + q^2} - q\right)^{2/3}}{\sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} - q}}; \quad (6)$$

$$p = \frac{1}{9} \frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1} \omega^2;$$

$$q = \frac{\text{Ra} k^2}{2} - \frac{i\omega^3}{27} (\text{Pr} + 1) (\text{Pr} - 2) \left(\text{Pr} - \frac{1}{2}\right).$$

Выражениями (6) определяется спектр собственных амплитудных функций линеаризованных уравнений в приближении Буссинеска. Оно может быть переписано в виде

$$y^3 + i\omega(\text{Pr} + 1)y^2 - \omega^2 \text{Pr}y + \text{Ra} k^2 = 0, \quad (7)$$

$$y = \zeta^2 - k^2.$$

Пусть y_1, y_2, y_3 — корни уравнения (4), тогда справедливы соотношения

$$y_1 + y_2 + y_3 = -s(\text{Pr} + 1);$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = s^2 \text{Pr}; \quad (8)$$

$$y_1 y_2 y_3 = \text{Ra} k^2;$$

$$s = i\omega.$$

Уравнения (8) позволяют сделать ряд важных выводов о спектре значений ζ . Например, требование, чтобы значения ζ были действительными (или одно решение ζ^2 действительное, а два других — комплексно-сопряженные) для любых волн, приводит к выводу о том, что величина $s = i\omega$ является действительной (известный результат для случая подогреваемой снизу жидкости, т. е. положительных значений числа Рэлея). Возможные значения ζ -параметра и их связь с видом амплитудных функций приведены в таблице.

ζ^2	$s = i\omega$	y_i	Вид амплитудной функции
$\zeta^2 > 0$	$s \in \mathbb{R},$ $s < 0,$ $\text{Ra} > 0,$	$y > 0$	Монотонная, экспоненциально затухающая или возрастающая по глубине
$\zeta^2 < 0$	$s \in \mathbb{R},$ $s > 0,$ $\text{Ra} < 0,$	$y < 0$	Синусоидальная, не затухающая по глубине
$\zeta^2 \in \mathbb{C}$	$s \in \mathbb{C},$ $\text{Ra} < 0$	$y \in \mathbb{C}$	Немонотонная, экспоненциально затухающая или возрастающая по амплитуде синусоида

Примечание. \mathbb{R} — множество действительных чисел; \mathbb{C} — множество комплексных чисел.

Перепишем выражения (6) с использованием s -параметра

$$\begin{aligned} \zeta_i^2 &= k^2 - \frac{s(\text{Pr} + 1)}{3} + x_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ p &= -\frac{1}{9} \frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1} s^2; \\ q &= \frac{\text{Ra} k^2}{2} + \frac{s^3}{27} (\text{Pr} + 1) (\text{Pr} - 2) \left(\text{Pr} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Действительное значение первого корня достигается при $p^3 + q^2 \geq 0$, что равносильно двум неравенствам:

$$\begin{cases} \frac{\text{Ra} k^2}{2 s^3} \geq \left(\frac{1}{9} \frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1} \right)^{3/2} - \frac{(\text{Pr} + 1) (\text{Pr} - 2) \left(\text{Pr} - \frac{1}{2} \right)}{27}; \\ \frac{\text{Ra} k^2}{2 s^3} \leq - \left(\frac{1}{9} \frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1} \right)^{3/2} - \frac{(\text{Pr} + 1) (\text{Pr} - 2) \left(\text{Pr} - \frac{1}{2} \right)}{27}. \end{cases} \quad (10)$$

Второй и третий корни действительны при

$$\frac{\text{Ra} k^2}{2 s^3} = \pm \left(\frac{1}{9} \frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1} \right)^{3/2} - \frac{(\text{Pr} + 1) (\text{Pr} - 2) \left(\text{Pr} - \frac{1}{2} \right)}{27}. \quad (11)$$

Пара кривых (11) приведена на рис. 3. В точках, принадлежащих области $p^3 + q^2 < 0$, все три решения комплексные; кривые соответствуют случаю трех действительных корней, причем два из них совпадают, т.е. имеет место вырождение шести линейно независимых амплитудных функций в четыре. Остальные точки отвечают случаю одного действительного и двух комплексно-сопряженных корней.

Кривые (11) — по сути бифуркационные, а рис. 3 — это бифуркационная диаграмма для множества функций профиля, так как эти кривые определяют множества значений комплексных параметров волн, при которых появляется пара осциллирующих решений вместо одного монотонного.

Следует подчеркнуть, что явление бифуркации в задаче о распространении волн, которое выражалось в появлении дополнительных решений в линейной теории, встречалось и ранее [3, 4]. В работе [3] впервые были найдены бифуркационные ветвления решений в задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости в отсутствие электрического поля, а в работе [4] впервые решалась аналогичная задача с учетом действия пондеромоторных сил, возникающих в вертикальном электрическом поле.

Если действительные значения принимает первая пара решений ζ_1^2 , тогда решения уравнения

$$\zeta_1^2 = k^2 - \frac{s(\text{Pr} + 1)}{3} + \frac{2p}{q^{1/3}} = 0$$

определяют границу между положительными и отрицательными решениями. После элементарных алгебраических преобразований имеем

$$\frac{\text{Ra}}{2k^4} = \left(\left[\frac{9}{2} \frac{\text{Pr} + 1}{\text{Pr}^3 + 1} \left(\frac{k^2}{s} - \frac{\text{Pr} + 1}{3} \right) \right]^{-3} - \frac{(\text{Pr} + 1)(\text{Pr} - 2) \left(\text{Pr} - \frac{1}{2} \right)}{27} \right) \left(\frac{s}{k^2} \right)^3. \quad (12)$$

Поверхность, определяемая уравнением (12), приведена на рис. 4. Для точек, расположенных ниже поверхности (12), решение положительно, что соответствует монотонным функциям профиля, точки над поверхностью (12) определяют функции профиля в синусоидальном виде. При этом действительная часть пары комплексно-сопряженных решений будет иметь соответственно положительное значение над поверхностью и отрицательное — под поверхностью.

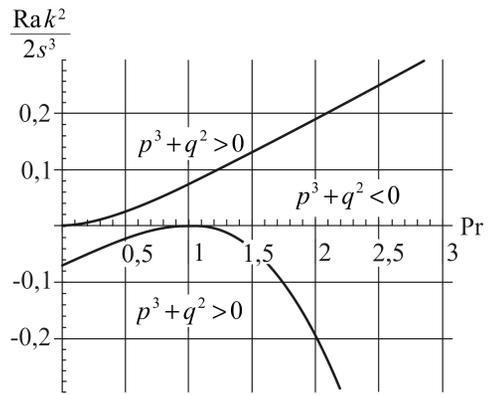


Рис. 3. Кривые вырождения и области чисто мнимых, действительных и комплексных решений

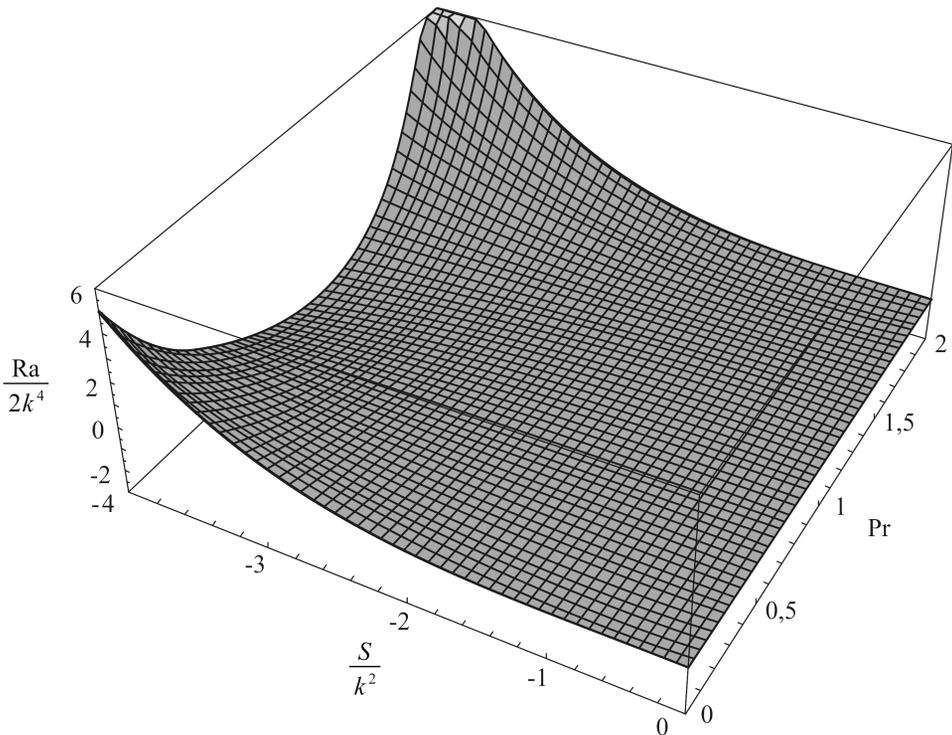


Рис. 4. Поверхность $\zeta_1^2 = 0$

В случае, когда все решения действительные, можно получить

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 &= k^2 - \frac{s(\text{Pr} + 1)}{3} + \frac{2p}{q^{1/3}}; \\ \zeta_1^2 = 0 &\Leftrightarrow \frac{k^2}{s} = \frac{1}{3} \left(\text{Pr} + 1 \pm 2\sqrt{\frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1}} \right); \\ \zeta_{2;3}^2 &= k^2 - \frac{s(\text{Pr} + 1)}{3} - \frac{p}{q^{1/3}}; \\ \zeta_{2;3}^2 = 0 &\Leftrightarrow \frac{k^2}{s} = \frac{1}{3} \left(\text{Pr} + 1 \pm \sqrt{\frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1}} \right); \\ q &= \pm s^3 \left(\frac{1}{9} \frac{\text{Pr}^3 + 1}{\text{Pr} + 1} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 5 приведены кривые, определяемые формулами (13) при равенстве значений ζ^2 нулю, обозначены области положительных и отрицательных значений ζ^2 . Ответить на вопрос, каким волнам соответствует определенный амплитудный профиль по глубине, можно имея дисперсионное соотношение, а также зная значение числа Прандтля.

Выводы. Анализ решения задачи о распространении плоских волн по поверхности проводящей вязкой несжимаемой жидкости, находящейся во внешнем электрическом поле и подогреваемой снизу, показал, что электрическое поле приводит к значительному уменьшению пороговых значений чисел Рэлея, вызывающих развитие конвективных движений. При подогреве снизу критические значения числа Рэлея находятся как приводящие к монотонным возмущениям.

Физически возможен механизм развития неустойчивости Френкеля–Тонкса при охлаждаемой нижней поверхности жидкости: плотность верхних нагретых слоев ниже, в связи с чем уменьшаются пороговые значения напряженности электрического поля, приводящие к неустойчивости. Но в предположении монотонности движений при больших отрицательных числах Рэлея такой механизм не обнаружен, что связано с постоянством плотности в выражении для безразмерного W -параметра. Это требует отдельного рассмотрения. Известный вопрос о взаимодействии монотонных и колебательных мод при этом остается открытым.

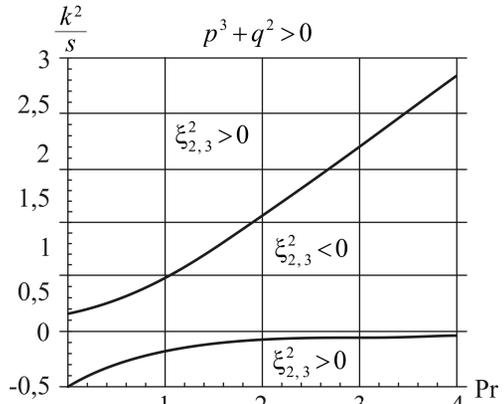
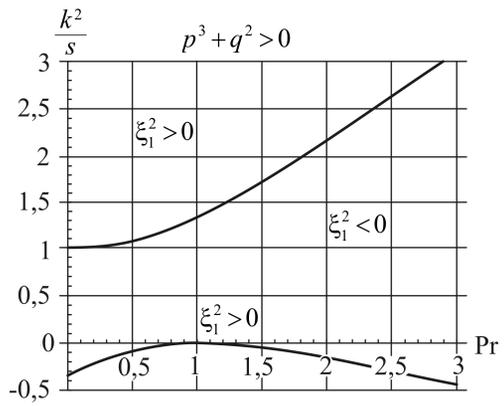


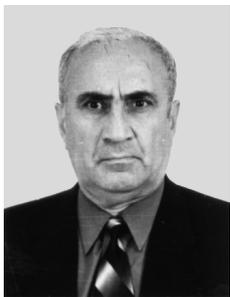
Рис. 5. Области положительных и отрицательных значений ζ^2 — величин для случая, когда все ζ^2 вещественны

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2003. – 656 с.
2. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
4. А н т о н ю к П. Н. Дисперсионные уравнения для плоской капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286, № 6. – С. 1324–1328.

5. Алиев И. Н., Филиппов А. В. О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. – 1989. – № 4. – С. 94–98.

Статья поступила в редакцию 29.10.2007



Исмаил Новрузович Алиев родился в 1945 г., окончил в 1969 г. Московский инженерно-физический институт (МИФИ). Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в различных областях физики.

I.N. Aliev (b. 1945) graduated from the Moscow Engineering and Physical Institute in 1969. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 60 publications in the various fields of physics.

С.О. Юрченко родился в 1985 г. — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ.

S.O. Yurchenko (b. 1985) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications.

Екатерина Викторовна Назарова родилась в 1982 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Соискатель кафедры физики МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ye.V. Nazarova (b. 1982) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2005. Competitor for a scientific degree in “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University.

**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
в 2007 г. вышла в свет книга**

Недашковский В.М. Хартов В.Я.

Микроконтроллеры AVR. Практикум для начинающих. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 240 с.

Практикум содержит материалы для изучения микроконтроллеров AVR с архитектурой RISC. Рассмотрены необходимые инструментальные средства — интегрированный пакет для разработки и отладки программ AVR Studio 4, стартовый набор разработчика STK500. Предложен комплект программ для изучения функциональных возможностей микроконтроллеров (27 учебных проектов). Тематика охватывает практически все аспекты архитектуры микроконтроллеров: работу портов, таймеров, арифметическую обработку данных, организацию ввода/вывода по параллельным и последовательным (UART, SPI и I2C) каналам связи, устройств обработки аналоговых сигналов, системы прерывания. Базовые программы могут быть использованы в качестве основы для обучения и самостоятельного программирования на языке Ассемблер AVR в курсовом и дипломном проектировании.

Материалы книги автор использует в учебном процессе в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов высших и средних специальных учебных заведений, обучающихся по направлению “Информатика и вычислительная техника”.

По вопросам приобретения обращаться по тел. 499-263-60-45;

e-mail: press@bmstu.ru