УДК 539.3

К. Ф. Комков

О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ФАЗЫ ПОДОБИЯ ДЕВИАТОРОВ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ПРОСТЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ

Проведен анализ соотношений для фазы подобия девиаторов и разницы параметров Лоде. Показана взаимосвязь этих величин и возможность представления их в виде отношения смешанных инвариантов, имеющих размерность работы напряжений на деформациях, что дает им новую интерпретацию. Предложена методика определения этих величин и нелинейных сдвиговых характеристик. Проведены исследования их зависимости от напряженного состояния для различных конструкционных материалов.

Фаза подобия девиаторов $\omega = \theta - \upsilon$ предложена В.В. Новожиловым [1] в качестве обобщенной характеристики упругости в тензорно-нелинейных уравнениях связи компонент девиатора деформаций с компонентами девиатора напряжений, которые можно представить в виде

$$e_{ij} = \varPhi_m S_{ij}/2 + \varPhi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2/9 S_0^2 \delta_{ij})/S_0, \tag{1}$$

где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$; $\sigma_0 = 1/3\sigma_{ii}$; $S_0 = (3/2 S_{ij} S_{ij})$; $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$; $\varepsilon_0 = 1/3\varepsilon_{ii}$; $e_0 = (2/3 e_{ij} e_{ij})$; $i, j, \alpha = 1, 2, 3$.

В уравнениях (1) σ_{ij}, S_{ij} — соответственно тензор и девиатор напряжений; σ_0 — среднее напряжение; S_0 — интенсивность напряжений; ε_{ij}, e_{ij} — тензор и девиатор малых деформаций; ε_0 — средняя деформация; e_0 — интенсивность деформаций; υ – угол вида деформированного, а θ — напряженного состояния, определяемый соотношением

$$\theta = 1/3 \arccos[9 S_{ij} S_{j\alpha} S_{\alpha i}/(2 S_0^3)], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3. \tag{2}$$

Сдвиговые характеристики $\varPhi_m$ и $\varPhi_d$ выражаются формулами [2]

$$\varPhi_m = 3e_0 (\cos\omega - \sin\omega \cos 3\theta / \sin 3\theta)/S_0; \tag{3}$$

$$\varPhi_d = 9 e_0 \sin\omega / (2 S_0 \sin 3\theta), \tag{4}$$

из которых вытекает соотношение для фазы подобия девиаторов [3]

$$\operatorname{tg}\omega = 2\varPhi_d \sin 3\theta / (3\varPhi_m + 2\varPhi_d \cos 3\theta). \tag{5}$$

Другое представление сдвиговых характеристик, предложенное в работе [4],

$$\varPhi_m = (B_1 + B_2 + B_3)/3; \tag{6}$$

$$\varPhi_d = \{[(B_1 - B_2)^2 + (B_2 - B_3)^2 + (B_3 - B_1)^2]/8\}^{1/2} \tag{7}$$

более удобно для анализа результатов экспериментов. В выражениях (6) и (7) величины

$$B_i = \gamma_i/\tau_i \tag{8}$$

представляют собой податливости сдвигу, где

$$\gamma_i = \varepsilon_j - \varepsilon_\alpha, \;\; \tau_i = (\sigma_j - \sigma_\alpha)/2$$

— главные деформации сдвига и главные касательные напряжения соответственно; $\sigma_i = S_0 C_i/3 + \sigma_0$ — главные напряжения; $i, j, \alpha = 1, 2, 3$; $i \neq j \neq \alpha$; $C_1 = 2\cos\theta$; $C_2 = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$; $C_3 = -(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)$.

С использованием определения e_0 и уравнений (1) устанавливается зависимость между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряжений:

$$e_0 = \varPhi_\theta S_0/3, \tag{9}$$

где

$$\Phi_\theta = (\Phi_m^2 + 4/3\Phi_m\Phi_d\cos 3\theta + 4/9\Phi_d^2)^{1/2} \tag{10}$$

— податливость формоизменению при любом θ.

В. Лоде для анализа полученных им результатов экспериментальных исследований ввел в рассмотрение параметры [5]

$$\lambda_\sigma = -2\tau_1/\tau_2 - 1; \tag{11}$$

$$\lambda_\varepsilon = -2\gamma_1/\gamma_2 - 1, \tag{12}$$

представляющие виды напряженного и деформированного состояний. Разницу этих параметров можно записать как

$$\Delta\lambda = \lambda_\sigma - \lambda_\varepsilon = (\tau_1|\gamma_2| - |\tau_2|\gamma_1)/(\tau_2\gamma_2/2). \tag{13}$$

Для материалов, деформация которых подчиняется линейно-упругому закону, числитель этого соотношения, согласно принципу взаимности работ [6], равен нулю, а знаменатель — работе максимального касательного напряжения на соответствующей деформации.

При нелинейном поведении [2] разница параметров $\Delta\lambda > 0$ для всех напряженных состояний, кроме обобщенного растяжения и соответствующего сжатия, где она принимает нулевое значение. Следовательно, в общем случае числитель в соотношении (13) не равен нулю. Его значение можно рассматривать как работу касательных напряжений на взаимных деформациях, поскольку нелинейная деформация идет с отклонением от принципа взаимности работ.

Это позволяет представить рассматриваемый показатель как отношение смешанных инвариантов, имеющих размерность работы напряжений на деформациях

$$\Delta\lambda = \Delta A / A_\tau. \tag{14}$$

Термин "работа" относится к той ее части, которую можно определить как площадь под секущим модулем сдвига в зависимостях $\tau_i - \gamma_i$. Он принят здесь лишь для удобства интерпретации полученного результата.

Пользуясь уравнениями (1), можно определить напряжения

$$\tau_1 = S_0(C_1 + 2C_2)/6, \tau_2 = -S_0(C_1 + 2C_2)/6 \tag{15}$$

и соответствующие им деформации сдвига

$$\gamma_1 = \tau_1(\varPhi_m - 2\varPhi_d C_1/3), \gamma_2 = \tau_2(\varPhi_m - 2\varPhi_d C_2/3), \tag{16}$$

тогда числитель и знаменатель в (14) приводятся к виду

$$\Delta A = \varPhi_d S_0^2 (2C_1 + C_2)(C_1 + 2C_2)(C_1 - C_2)/54; \tag{17}$$

$$A_\tau = \tau_2\gamma_2/2 = (3\varPhi_m - 2\varPhi_d C_2)(2C_1 + C_2)^2. \tag{18}$$

Соотношение (5) для тангенса фазы подобия девиаторов тоже можно привести к виду, аналогичному (14). Действительно, вводя обозначения $\cos\theta = C_1/2$, $\sin\theta = (C_1 + 2C_2)/(2\sqrt{3})$ и используя соотношения (15), после несложных преобразований получаем

$$\operatorname{tg}\omega = \Delta A / A_\omega. \tag{19}$$

Числитель в этой формуле определяется соотношением (17), а знаменатель

$$A_\omega = [3\varPhi_m - \varPhi_d C_1 C_2 (C_1 + C_2)] S_0^2 / (6\sqrt{3}). \tag{20}$$

Причем отношение A_ω / A_τ зависит от угла θ. При $\theta = \pi/6$ оно принимает минимальное значение $\sqrt{3}$, а при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ достигает значения ≈ 2, что отмечалось в работе [2] для отношения $\Delta\lambda / \operatorname{tg}\omega$.

При необходимости с той же целью можно ввести и третий показатель

$$\Delta\eta = \Delta A / A_0, \tag{21}$$

где $A_0 = (\tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2 + \tau_3\gamma_3)/2$.

Поскольку по определению (5) $\operatorname{tg}\omega > 0$, то можно утверждать, что график зависимости $\lambda_\varepsilon - \lambda_\sigma$ в общем случае лежит ниже прямой $\lambda_\varepsilon = \lambda_\sigma$. Поведение этого графика в диапазоне $0 < \theta < \pi/3$ можно установить для частного случая в предположении, что

$$\sin\omega = \alpha\sin 3\theta, \quad \cos\omega = 1, \quad \alpha \ll 1. \tag{22}$$

Тогда из соотношений (3) и (4) для сдвиговых характеристик следует

$$\varPhi_m = \varPhi_\theta(1-\alpha\cos 3\theta), \quad \varPhi_d = \alpha\varPhi_\theta, \tag{23}$$

т.е. допущение (22) делает их практически независимым от угла θ.

Так как показатели $\Delta\lambda$ и $\operatorname{tg}\omega$ отличаются только множителем, можно провести анализ их зависимости от угла θ, используя соотношение (5). Поиск максимального значения этого соотношения дает

$$\operatorname{tg}\omega_{\max} = -\cos 3\theta_0/\sin 3\theta_0 \tag{24}$$

при $\cos 3\theta_0 = -2\varPhi_d/(3\varPhi_m)$, где угол θ_0 принимает значение $\gtrsim 30^\circ$.

Таким образом, фаза подобия девиаторов, а следовательно, и $\Delta\lambda$ графически представляют собой полуволну синусоиды, максимальное значение которой незначительно смещено за $\theta = \pi/6$.

Проведенный анализ дал возможность представить качественную картину поведения рассматриваемых показателей. Для количественной оценки необходимы числовые данные о характеристиках Φ_m и $\varPhi_d$, которые можно получить, привлекая для этого результаты испытаний при простых напряженных состояниях: растяжении, чистом сдвиге и сжатии или двухосном растяжении в виде зависимостей $S_0 - e_0$. Анализ податливостей в направлениях главных касательных напряжений B_i показал, что характеристики могут быть выражены через $\varPhi_p$, $\varPhi_c$ и $\varPhi_\tau$, которые представляют собой $\varPhi_\theta$ для частных напряженных состояний.

Действительно, при растяжении

$$B_3 = \gamma_3/\tau_3 = 3e_0/S_0 = \varPhi_p, \tag{25}$$

где $\gamma_3 = e_1 - e_2 = 3e_0/2$, $\tau_3 = S_0/2$. При сжатии

$$B_1 = \gamma_1/\tau_1 = 3e_0/S_0 = \varPhi_c, \tag{26}$$

где $\gamma_1 = e_2 - e_3 = 3e_0/2$, $\tau_1 = S_0/2$. При чистом сдвиге

$$B_2 = \gamma_2/\tau_2 = 3e_0/S_0 = \varPhi_\tau, \tag{27}$$

где $\gamma_2 = e_3 - e_1 = -(2e_1 + e_2) \approx -\sqrt{3}e_0$, $\tau_2 = -S_0/\sqrt{3}$.

Найденные равенства позволяют найти в первом приближении характеристики в соответствии с их определениями (6) и (7)

$$\varPhi_m = (\varPhi_c + \varPhi_\tau + \varPhi_p)/3; \tag{28}$$

$$\varPhi_d = \{[(\varPhi_c - \varPhi_\tau)^2 + (\varPhi_\tau - \varPhi_p)^2 + (\varPhi_p - \varPhi_c)^2]/8\}^{1/2}. \tag{29}$$

Существенное различие соотношений (6), (7) и (28), (29) состоит в том, что в первом случае все B_i относятся к одному и тому же трехосному напряженному состоянию, а во втором — к трем различным состояниям.

Податливость для любого θ можно выразить функцией

$$\Phi_\theta = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2, \tag{30}$$

где коэффициенты a_i находятся по данным для простых напряженных состояний:

$$a_1 = \mathit{\Phi}_p, \quad a_2 = 3(4\mathit{\Phi}_\tau - 3\mathit{\Phi}_p - \mathit{\Phi}_c)/\pi, \quad a_3 = 18(\mathit{\Phi}_p - 2\mathit{\Phi}_\tau + \mathit{\Phi}_c)/\pi^2. \tag{31}$$

Чтобы отразить зависимость характеристик от угла θ в следующих приближениях, используется соотношение (10), из которого следует

$$\Phi_m = \left[\mathit{\Phi}_\theta^2 - (2/3\,\mathit{\Phi}_d \sin 3\theta)^2\right]^{1/2} - 2/3\,\mathit{\Phi}_d \cos 3\theta, \tag{32}$$

где значения для $\mathit{\Phi}_d$ принимаются из первого приближения. При этом последующие значения уточняются по формуле

$$\mathit{\Phi}_d = \left\{3\left[(\mathit{\Phi}_m - \mathit{\Phi}_\tau)^2 + (\mathit{\Phi}_m - \mathit{\Phi}_p)^2 + (\mathit{\Phi}_m - \mathit{\Phi}_c)^2\right]/8\right\}^{1/2}. \tag{33}$$

Ниже описана последовательность определения фазы подобия девиаторов и $\Delta\lambda$. Как уже отмечалось, исходными данными являются диаграммы $S_0{-}e_0$, полученные по результатам простых испытаний. При отработке методики было найдено, что удобно, принимая во внимание (14) и (19), в качестве наиболее приемлемого аргумента для искомых величин принять смешанный инвариант $A = S_0 e_0/2$ [7]. Диаграммы $S_0{-}e_0$ перестраиваются в графики зависимости $S_0{-}A$ и $e_0{-}A$. Затем для каждого фиксированного значения A_j $(j = 15\ldots20)$ по этим графикам уточняются значения S_0 и e_0, по которым вычисляются податливости $\mathit{\Phi}_p$, $\mathit{\Phi}_c$ и $\mathit{\Phi}_\tau$.

С использованием соотношений (30) и (31) определяется податливость $\mathit{\Phi}_\theta$, позволяющая провести численный анализ зависимости характеристик $\mathit{\Phi}_m$ и $\mathit{\Phi}_d$ и показателей $\Delta\lambda$, $\mathrm{tg}\,\omega$, $\Delta\eta$, а также A_τ и ΔA от вида напряженного состояния в пределах $0 \geqslant \theta \geqslant \pi/3$. Уже отмечалось, что характеристики $\mathit{\Phi}_m$ и $\mathit{\Phi}_d$ вычисляются методом последовательных приближений. При 2–3 итерациях они сходятся к значениям, отличающихся от предыдущих в пределах пяти процентов. Такая процедура проводится для каждого A_i.

Описанная методика была апробирована на диаграммах $S_0{-}e_0$ для алюминиевого сплава 24S-T4, экспериментальные сведения о котором можно найти в работе [8]. По результатам расчетов были построены графики зависимости исследуемых величин как от A, так и угла θ. На рис. 1 верхние два представляют собой зависимости $S_0{-}A$ для сжатия и для растяжения (кривые *1* и *2* соответственно). Кривые *3*, *4* и *6* — это зависимости $\mathit{\Phi}_p$, $\mathit{\Phi}_c$ и $\mathit{\Phi}_d$, а *7* и *5* — соответствуют $\mathrm{tg}\,\omega$ и $\Delta\lambda$. Характеристика $\mathit{\Phi}_m$ не представлена, но она находится между кривыми для $\mathit{\Phi}_p$ и $\mathit{\Phi}_c$.

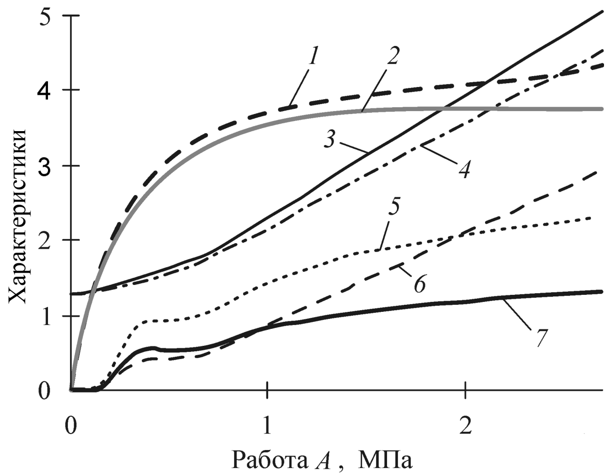

Рис. 1. Диаграммы $S_0 - A$ для сплава 24S-T4 при сжатии (*1*) и растяжении (*2*) (S_0 с множителем 10^{-2}), изменение Φ_p (*3*), Φ_c (*4*), характеристики Φ_d (*6*) и показателей нелинейности $\Delta\lambda$ и $\mathrm{tg}\,\omega$ (кривые *5* и *7*) в зависимости от A (податливости Φ_p, Φ_c с множителем 10^4, $\delta\lambda$ и $\mathrm{tg}\,\omega$ с коэффициентом 40)

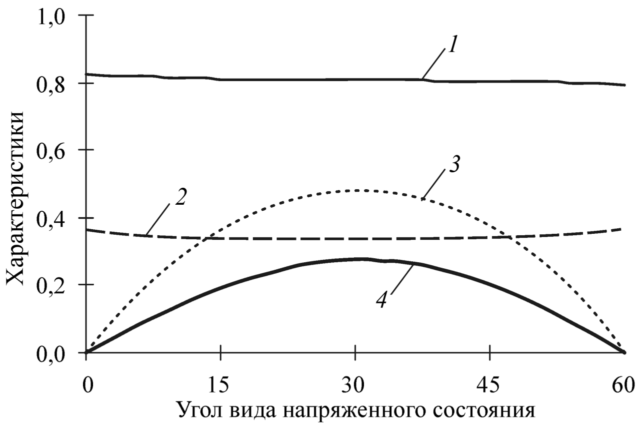

Рис. 2. Зависимости характеристик Φ_m (*1*), Φ_d (*2*), $\Delta\lambda$ (*3*) и $\mathrm{tg}\,\omega$ (*4*) от вида напряженного состояния для сплава 24S-T4 (коэффициенты соответствуют рис. 1)

Численный анализ зависимости основных величин от вида напряженного состояния иллюстрирует рис. 2, где кривые *1, 2, 4, 3* соответствуют характеристикам Φ_m, Φ_d, $\mathrm{tg}\,\omega$ и $\Delta\lambda$ соответственно. Максимальные значения этих величин находятся примерно при одном и том же напряженном состоянии, определяемом углом θ_0. Данный материал проявляет весьма малую тензорную нелинейность $(\mathrm{tg}\,\omega_{\max} \approx 0{,}023)$, поэтому угол θ_0 незначительно отличается от $\pi/6$. Анализ, проведенный выше на основе допущений (22), согласуется с результатами, представленными на рис. 2.

На рис. 3 кривые $S_0{-}A$ характеризуют поведение стали 20 (использованы данные, приведенные в работе [9]). График *1* относится к испытанию на растяжение $(\lambda_\sigma = -1$, усредненная диаграмма для

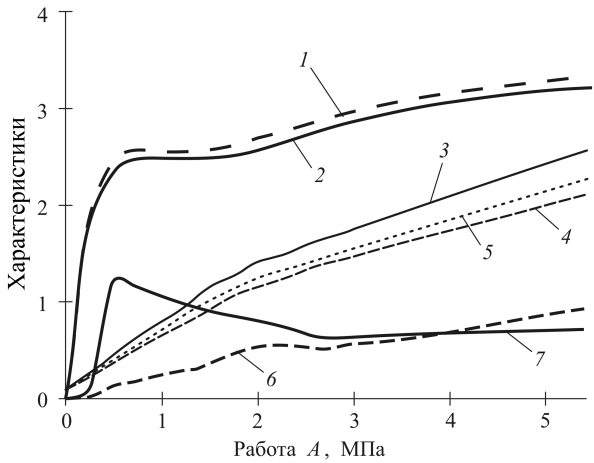

Рис. 3. Диаграммы $S_0 - A$ для стали 20 при растяжении и чистом сдвиге (кривые *1* и *2*, S_0 с коэффициентом 10^{-2}), графики Φ_τ, Φ_p, Φ_m, Φ_d и $\mathrm{tg}\,\omega$ в зависимости от A — кривые *3, 4, 5, 6, 7* соответственно (Φ_τ, Φ_p, Φ_m с коэффициентом $7{,}5{\cdot}10^3$, Φ_d с коэффициентом $1{,}6 \cdot 10^4$ и $\mathrm{tg}\,\omega$ с коэффициентом 10);

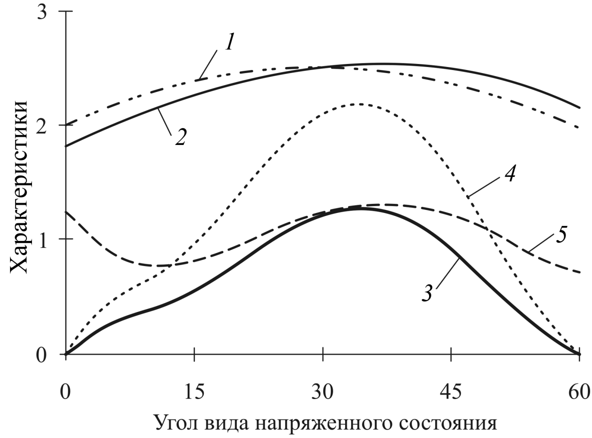

Рис. 4. Зависимости характеристик Φ_θ, Φ_m (*1, 2*), $\mathrm{tg}\,\omega$, $\Delta\lambda$ и Φ_d (кривые *3, 4* и *5* соответственно) от вида напряженного состояния

образцов № 5 и 7), а график *2* — к чистому сдвигу ($\lambda_\sigma = 0$). Здесь принято допущение [10], состоящее в том, что диаграммы $S_0 - e_0$ не зависят от знака λ_σ. Поэтому вычисления проводились при условии $\Phi_p = \Phi_c$.

Податливости Φ_τ и Φ_p (кривые *3* и *4*) плавно возрастают с ростом аргумента. Так же ведет себя характеристика Φ_m (кривая *5*). Кривая *6* представляет характеристику Φ_d, а *7* — показатель $\mathrm{tg}\,\omega$, которым сталь 20 заметно отличается от сплава 24S-T4 как по форме графика, так и более высокими (в пять раз) значениями.

Зависимость характеристик и параметров от вида напряженного состояния при постоянном значении $A = 1{,}75$ МПа для рассматриваемого материала представлена графиками на рис. 4. Кривая *1* (Φ_θ показывает, что аппроксимация этой величины многочленом второй степени, является вполне удовлетворительной. Аналогично ведет себя и характеристика Φ_m (кривая *2*). Нижняя кривая *3*, соответствующая $\operatorname{tg}\omega$, по форме практически подобна кривой *4* для $\Delta\lambda$.

Максимальные значения этих показателей смещены вправо от $\theta = \pi/6$, в наибольшей степени — максимум характеристики Φ_d (кривая *5*).

Таким образом, проведенные исследования позволили установить взаимосвязь между показателями тензорной нелинейности, выявить новую интерпретацию их сущности как величин, представляющих отношение работ напряжений на деформациях. Кроме того, из соотношений (14) и (19) следует, что любая нелинейность в процессе формоизменения должна сопровождаться нарушением подобия девиаторов напряжений и деформаций. Этот вывод расширяет представление о процессе деформирования материалов с изотропными свойствами. Описанная методика восстановления сдвиговых характеристик Φ_m и Φ_d дает возможность изучить нелинейные свойства конкретных материалов по результатам испытаний при простых напряженных состояниях, представленных в виде диаграмм $S_0{-}e_0$. Методика предполагает независимость этих диаграмм от σ_0, т.е. от гидростатического сжатия. Это предположение оправдано для многих металлов и сплавов со стабильными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // ППМ. – 1951. – Т. XV, вып. 2. – С. 183–194.
2. Комков К. Ф. К определению параметров Лоде при обработке результатов испытаний // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – № 2. – С. 126–135.
3. Комков К. Ф. Об использовании тензорно-нелинейных уравнений для анализа поведения пластических сред // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2007. – № 1. – С. 164–172.
4. Комков К. Ф. Об уравнениях связи деформаций с напряжениями для материалов, оказывающих различное сопротивление растяжению и сжатию // Изв. вузов. Сер. “Машиностроение”. – 1989. – № 7. – С. 3–6.
5. Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. – С. 336–374.
6. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
7. Новожилов В. В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М: ИЛ, 1969. – Т. II. – 863 с.
9. Жуков А. М. Пластические деформации стали при сложном нагружении // Изв. АН СССР. – ОТН. – 1954. – № 11. – С. 53–61.
10. Янг Ю. И., Митрохин Н. М. О систематическом отклонении от законов пластичности // ДАН СССР. – 1960. – Т. 135, – № 4. – С. 796–799.

Статья поступила в редакцию 29.05.2007