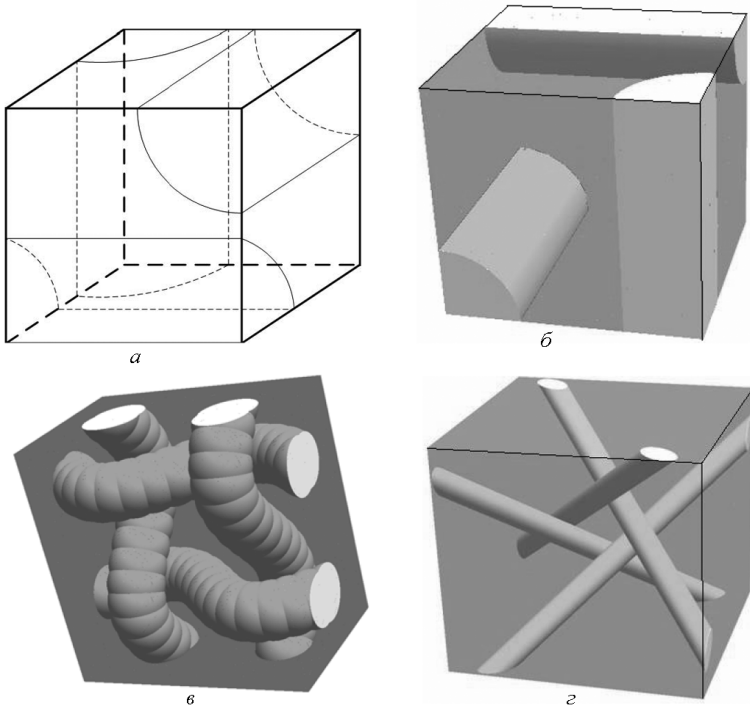


## **РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ТЕХНОЛОГИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ**

*Представлены результаты разработки автоматизированной технологии расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов с различной структурой армирования: пространственно-армированной по трем ортогональным направлениям, четырехнаправленной по диагоналям куба и тканевой. Расчет осуществлен на основе конечно-элементного метода решения так называемых локальных задач  $\mathcal{J}_{\text{рл}}$ , возникающих при использовании метода асимптотического осреднения Бахвалова–Победри. Представлены результаты разработки программного комплекса для вычисления эффективных упругих характеристик композитов и некоторые характерные результаты его работы для указанных типов структур армирования.*

Разработка новых материалов с заранее заданными свойствами является одним из приоритетных направлений развития современных технологий и техники. Однако синтез таких материалов в настоящее время остается весьма трудоемким, поскольку поиск новых рецептурных композиций сопряжен с многочисленными экспериментальными исследованиями. Теоретические методы прогнозирования свойств материалов еще крайне ненадежны, однако они непрерывно развиваются и с повышением точности прогноза возможно значительное сокращение затрат и сроков создания новейших материалов. В связи с этим для вычисления эффективных характеристик композиционных материалов (КМ) перспективным является метод асимптотического осреднения [1, 2], который позволяет математически точно прогнозировать свойства материалов по свойствам и геометрической структуре составляющих их компонентов. Однако этот метод достаточно сложен, так как предполагает решение специального класса задач — так называемых локальных задач, относящихся к типу интегродифференциальных с нестандартными граничными условиями периодического типа [3, 4]. Способ преодоления указанных трудностей, а также конечно-элементный метод решения локальных задач предложен в работах [5–8], где на примере ортогонально-армированных КМ показана высокая точность предложенного конечно-элементного метода и алгоритма решения локальных задач. Цель настоящей работы — расширение возможностей метода решения локальных задач для КМ с произвольной



**Рис. 1. Структуры композитов:**

*а, б* – 3D-ортогонально-армированный КМ; *в* – тканевый КМ; *г* – 4D-армированный КМ

структурой армирования и разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих свойств КМ с различными структурами армирования.

**Математическая формулировка локальной задачи.** В работе [5] сформулирована локальная задача  $\mathcal{J}_{pq}$  на 1/8 части ячейки периодичности (ЯП) композита с периодической структурой, которая имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^\alpha = 0 \quad \text{в } \tilde{V}_\xi; \\ \sigma_{ij(pq)}^\alpha = C_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{kl(pq)}^\alpha = \lambda^\alpha \varepsilon_{kk(pq)}^\alpha \delta_{ij} + 2\mu^\alpha \varepsilon_{ij(pq)}^\alpha \quad \text{в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon_{ij(pq)}^\alpha = \frac{1}{2} \left( U_{i(pq)/j}^\alpha + U_{j(pq)/i}^\alpha \right) \quad \text{в } \tilde{V}_\xi; \\ \left. \begin{array}{l} U_{i(pq)}^\alpha = U_{i(pq)}^N, \\ \left( \sigma_{ij(pq)}^\alpha - \sigma_{ij(pq)}^N \right) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N} - \text{условия идеального контакта.} \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь функции  $U_{i(pq)}^\alpha$ , называемые псевдоперемещениями, – решения задач  $\mathcal{J}_{pq}$  на 1/8 ЯП ( $\tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi^i \geq 0)$ ), где  $V_\xi$  – полная ЯП;  $\xi^i$  – локальные координаты, изменяющиеся на ЯП;  $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$  и  $\varepsilon_{ij(pq)}^\alpha$  – псев-

донапряжения и псевдодеформации в компонентах КМ [5];  $C_{ijkl}^\alpha$  — компоненты тензоров модулей упругости компонентов КМ;  $\lambda^\alpha, \mu^\alpha$  — константы Ламе  $\alpha$ -го компонента КМ;  $U_{j(pq)/i}^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi^i} U_{j(pq)}^\alpha$  — частные производные по локальным координатам  $\xi^i$ ,  $n_i$  — компоненты вектора нормали к поверхности раздела  $\tilde{\Sigma}_{\xi^\alpha N}$  компонентов КМ.

К системе (1) кроме условий идеального контакта на границе компонентов КМ присоединяются условия на торцевых поверхностях ЯП  $\Sigma'_s$  и на плоскостях симметрии  $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$  [5]:

$$\begin{aligned} \text{при } p = q \quad U_{i(pq)}^\alpha &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, \quad U_{j(pq)/i}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)/i}^\alpha = 0 \\ &\text{на } \Sigma'_i \quad i \neq j \neq k \neq i; \\ \text{при } p \neq q \quad U_{i(pq)}^\alpha &= \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, \quad U_{j(pq)/j}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)/j}^\alpha = 0, \quad \text{на } \Sigma'_j; \quad (2) \\ U_{i(pq)/k}^\alpha &= 0, \quad U_{j(pq)/j}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0, \quad \text{на } \Sigma'_j; \\ i, j &= \{p, q\} \quad i \neq j \neq k \neq i. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\varepsilon}_{pq}$  — эффективные деформации КМ, которые в задаче (1)–(2) являются заданными величинами.

Вариационная формулировка задачи (1)–(2) и конечно-элементный метод ее решения предложены в работах [5–8].

**Метод вычисления эффективных упругих характеристик.** Если задача (1)–(2) решена, то, проинтегрировав полученные псевдонапряжения по областям  $\tilde{V}_\xi^\alpha$ , соответствующим компонентам КМ для 1/8 ЯП, и воспользовавшись определяющими соотношениями в (1), находим эффективные упругие модули [5]:

$$\bar{\sigma}_{ij(pq)} = \langle \sigma_{ij(pq)}^{(\alpha)}(\xi^k) \rangle = 8 \sum_{\alpha=1}^N \int_{\tilde{V}_\xi^\alpha} \sigma_{ij(pq)}^\alpha(\xi^k) dV_\xi^\alpha, \quad (3)$$

$$\bar{C}_{ijpq} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}. \quad (4)$$

После расчета тензора модулей упругости  $\bar{C}_{ijpq}$  вычисляют тензор эффективных упругих податливостей  $\bar{\Pi}_{ijpq} = (\bar{C}_{ijpq})^{-1}$  и по его компонентам находятся эффективные технические константы. В частности, если КМ в целом оказывается ортотропным, то для него вычисляются эффективные модули Юнга  $E_i = \frac{1}{\bar{\Pi}_{iiii}}$ , эффективные коэффициенты

Пуассона  $\nu_{ij} = -\frac{\bar{\Pi}_{iijj}}{\bar{\Pi}_{iiii}}$  и эффективные модули сдвига  $G_{ij} = \bar{C}_{iijj}$  (здесь по  $i, j$  суммирование нет).

**Автоматизированная технология расчета эффективных упругих свойств.** Для решения локальных задач  $J_{pq}$  и вычисления эффективных упругих свойств КМ разработана автоматизированная технология, основу которой составляет специализированный программный комплекс (ПК), построенный с использованием принципов модульности. В нем произведено жесткое разделение задач на подэтапы — от постановки до решения. Каждый подэтап постановки задачи — задание граничных условий, свойств материалов, формирование геометрических характеристик — выполнены в виде самостоятельных модулей (плагинов).

Разработанный ПК построен с учетом возможности дальнейшего расширения (масштабируемость), что чрезвычайно важно для дальнейших исследований, в частности для анализа новых структур КМ.

Модульный принцип разработки позволил существенно улучшить функциональные возможности всего ПК, так как при этом: 1) реализована возможность сборки проектов и частей проектов программного комплекса из стандартных блоков; 2) отлажена работа генератора кода, который позволил осуществлять автоматизацию процесса разработки новых модулей системы; 3) сформировано дерево репозитория объектов, проектов базы данных (БД) и прочих компонентов системы; 4) созданы шаблоны, для формирования форм модулей (файлов \*.crr), проектов плагинов приложений с поддержкой и без поддержки подключения к БД.

В состав ПК входят разработанные основные модули: решатель задач  $J_{pq}$ , препроцессор (задание произвольных граничных условия (ГУ), характеристик материалов, формирование достаточно произвольной геометрической формы расчетной области), постпроцессор (расчет эффективных упругих характеристик на основе серий решенных задач  $J_{pq}$ ).

Разработан стандарт создания новых модулей системы и комплекс сервисных средств, облегчающих разработку новых программных модулей. Выбранная для разработки ПК технология позволяет масштабировать ПК. Имеется возможность создавать заготовки будущих проектов в исходных кодах на языке C++ (хост-приложения, плагины, dll-проекты и др.), а также автоматически включать документацию в проекты в исходных кодах программной среды TeX.

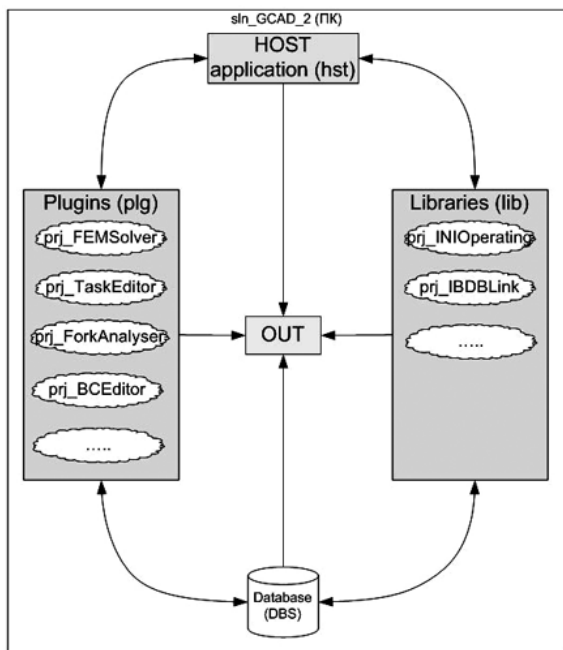
В разработанном ПК предусмотрена возможность генерации программных компонентов меньшего масштаба (модули \*.crr и \*.h, формы) и простого создания новых шаблонов любой сложности.

Новая архитектура разработки в стандарте позволяет легко интегрировать программные средства сторонних производителей (использование технологии плагин-компонентов). Разработка новых про-

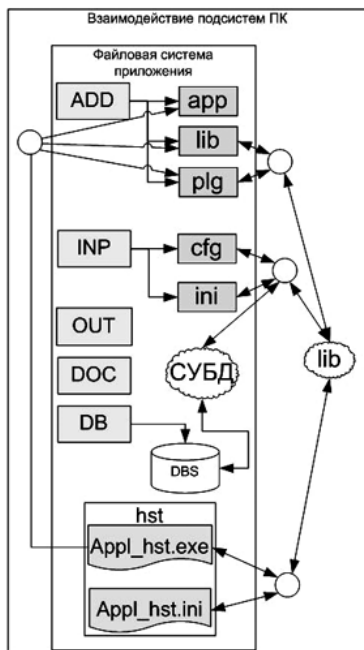
**Принципиальная схема  
работы программы**



а



б



**Рис. 2. Принципиальная схема работы модулей автоматизированного ПК:**

а – основные модули хост-приложений, б – взаимодействие модулей в ПК

граммных решений предусмотрена в рамках единого репозитория объектов, что позволяет систематизировать все работы, которые ведутся по данному проекту.

На рис. 2 представлена принципиальная схема работы ПК. Введены следующие обозначения: **ADD** – дополнительные модули системы; **INP** – входные данные системы; **OUT** – результаты работы системы; **DOC** – документация; **DB-app** – внешние программы; **lib** – библиотеки системы; **plg** – автоматически подключаемые модули; **cfg** – исходные данные с текстами; **ini** – параметры библиотек и плагинов; **prj** – проект (программная единица системы); **sln** – решение (структурная единица системы); **prj\_FEMSolver** – решатель МКЭ для линейной задачи упругости; **prj\_TaskEditor** – редактор постановки задачи; **prj\_ForkAnalyser** – постпроцессор-анализатор эффективных упругих характеристик по методам Фойгта–Рейсса и Хашина–Штрикмана; **prj\_BCEditor** – редактор задания граничных условий

краевой задачи; **prj\_INIOperating** — библиотека по работе с INI-файлами; **prj\_IBDBLink** — библиотека с возможностью обеспечения подключения к БД системы. Стрелками обозначено взаимодействие отдельных подсистем ПК.

**Результаты численных расчетов.** Рассматривались три типа структур армирования КМ с различным числом армирующих волокон (нитей) в ЯП: 2D-композит, армированный системой двух нитей, с тканевым плетением — ТККМ (рис. 1, в); 3D-ортогонально-армированный композит — 3DKM (рис. 1, а, б); 4D-композит, армированный системой четырех нитей, ориентированных по главным диагоналям куба — 4DKM (рис. 1, з) .

Промышленностью освоены технологии изготовления различных элементов конструкций из КМ, имеющих рассмотренные структуры [9]. В зависимости от функционального назначения конструкции, ее геометрической формы, заданных упругих и других технических характеристик при проектировании изделий более эффективной может оказаться та или иная структура. Разрабатываемый автоматизированный ПК предназначен для расчета упруго-прочностных характеристик структур КМ с различным содержанием волокон  $\varphi_f$ , которое может варьироваться в различных зонах конструкции.

Цель проведенных исследований состояла в демонстрации возможностей разработанного метода расчета и автоматизированного ПК примере вычисления эффективных упругих модулей КМ с различными структурами армирования. В табл. 1 представлены сведения о задачах  $J_{pq}$ , которые решены для различных структур. Число и вид этих задач различны для разных структур КМ — они определяются группой симметрии материала [10]: так, 3DKM обладает орторопной симметрией, а если все три системы нитей одинаковы — то кубической симметрией; ТККМ и 4DKM всегда обладают лишь орторопной симметрией. Поэтому для 3DKM необходимо было решить только две локальные задачи  $J_{33}$  и  $J_{13} + J_{31}$ , а для ТККМ и 4DKM — четыре задачи:  $J_{33}$ ,  $J_{11}$ ,  $J_{12} + J_{21}$ ,  $J_{13} + J_{31}$ . Сумма  $J_{13} + J_{31}$  означает, что указанные задачи решались совместно.

Таблица 1

**Наборы решенных задач  $J_{pq}$  для различных структур КМ**

Тип КМ	Содержание волокон $\varphi_f$	Задачи $J_{pq}$
3DKM	0,45	$J_{33}, J_{13}, J_{31}$
ТККМ	0,11	$J_{33}, J_{11}, J_{12} + J_{21}, J_{13} + J_{31}$
4DKM	0,04	$J_{33}, J_{11}, J_{12} + J_{21}, J_{13} + J_{31}$

Для всех рассмотренных типов КМ решались только указанные выше типы задач, а решения остальных задач  $\mathcal{J}_{pq}$  получались простой перестановкой решений задач, указанных в табл. 1, что возможно за счет изменения типа анизотропии рассматриваемого КМ. В качестве конечного элемента использовался четырехузловой тетраэдр.

При расчетах свойств всех исследуемых КМ использовали следующие механические характеристики: для матрицы  $E = 2,1$  ГПа,  $\nu = 0,35$ ; для волокна (нити)  $E = 250$  ГПа,  $\nu = 0,25$ . Содержание волокон  $\varphi_f$  для указанных типов КМ различно (см. табл. 1). При решении задач  $\mathcal{J}_{pp}$  на растяжение значения компонент тензора осредненных деформаций  $\bar{\varepsilon}_{pp}$  принимались равными 1 %.

Некоторые типичные результаты решения локальных задач  $\mathcal{J}_{pq}$  для различных структур КМ приведены на рис. 3–8 в виде фоновых значений компонент тензоров псевдонапряжений  $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$  в ЯП.

В табл. 2 приведены значения эффективных технических характеристик КМ с различными структурами армирования. На рис. 9 и 10 представлены графики зависимости эффективных модулей упругости КМ от содержания волокон  $\varphi_f$ . На этих рисунках приведены верхние и нижние границы эффективных модулей (вилки Фойгта и Рейсса [2]). Вычисления показывают, что вилки Фойгта и Рейсса оказываются очень широкими и ими нельзя пользоваться даже для приближенной расчетной оценки эффективных характеристик. Этот результат хорошо известен [2], однако надежные методы вычисления точных значений эффективных характеристик КМ со сложными пространственными структурами армирования практически отсутствуют. Разработанный

Таблица 2

**Эффективные упругие характеристики КМ с различной структурой армирования**

Обозначение	3DKM, $\varphi_f = 0,45$	4DKM, $\varphi_f = 0,04$	ТККМ, $\varphi_f = 0,11$
Модули Юнга $E$ , ГПа			
$E_1$	39,758	2,406	6,417
$E_2$	39,758	2,407	6,645
$E_3$	39,758	2,381	3,448
Коэффициенты Пуассона $\nu$			
$\nu_{13}$	0,073	0,365	0,451
$\nu_{31}$	0,074	0,361	0,275
$\nu_{12}$	0,073	0,358	0,202
$\nu_{21}$	0,073	0,358	0,114
$\nu_{23}$	0,073	0,364	0,498
$\nu_{32}$	0,0743	0,360	0,187
Модули сдвига $G$ , МПа			
$G_{13}$	2,227	1,283	1,296
$G_{12}$	2,227	1,278	1,094
$G_{23}$	2,227	1,283	1,296

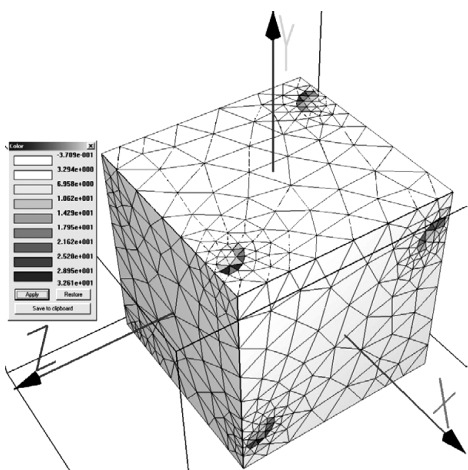


Рис. 3. Распределение псевдонапряжений  $\sigma_{12}^{\alpha}$ , МПа, в задаче Ж<sub>12</sub> для 4DKM

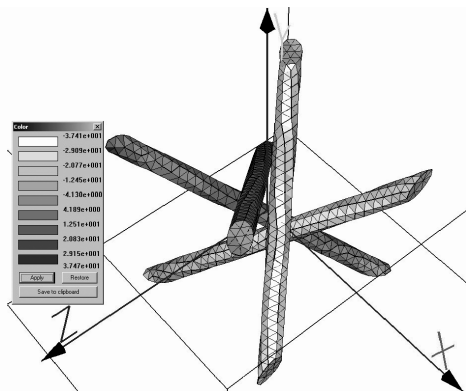


Рис. 4. Распределение псевдонапряжений  $\sigma_{12}^{\alpha}$ , МПа, в задаче Ж<sub>13</sub> для 4DKM

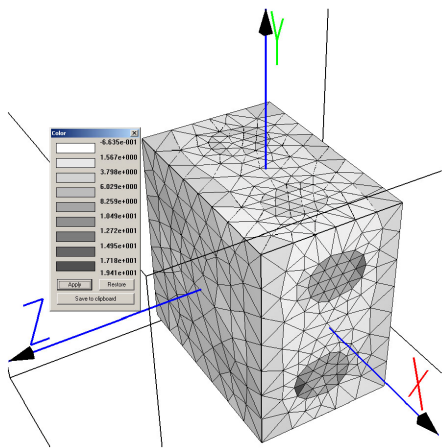


Рис. 5. Распределение псевдонапряжений  $\sigma_{13}^{\alpha}$ , МПа, в задаче Ж<sub>13</sub> для ТКМ

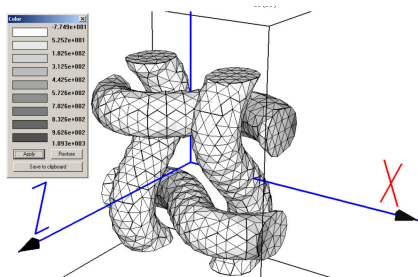


Рис. 6. Распределение псевдонапряжений  $\sigma_{11}^{\alpha}$ , МПа, в задаче Ж<sub>11</sub> для ТКМ



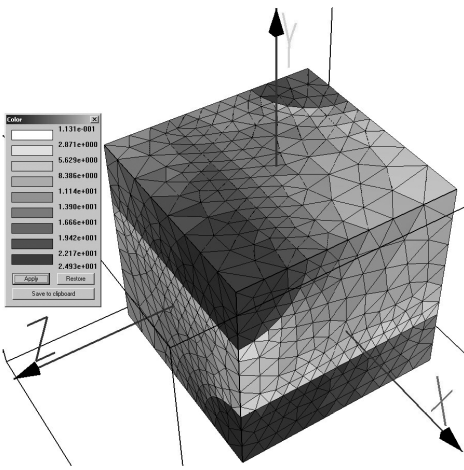


Рис. 7. Распределение псевдонапряжений  $\sigma_{13(13)}$ , МПа, в задаче Ж<sub>13</sub> для 3DKM

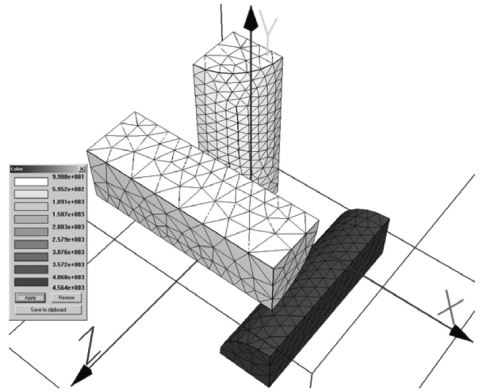


Рис. 8. Распределение псевдонапряжений  $\sigma_{33(33)}$ , МПа, в задаче Ж<sub>33</sub> для 3DKM

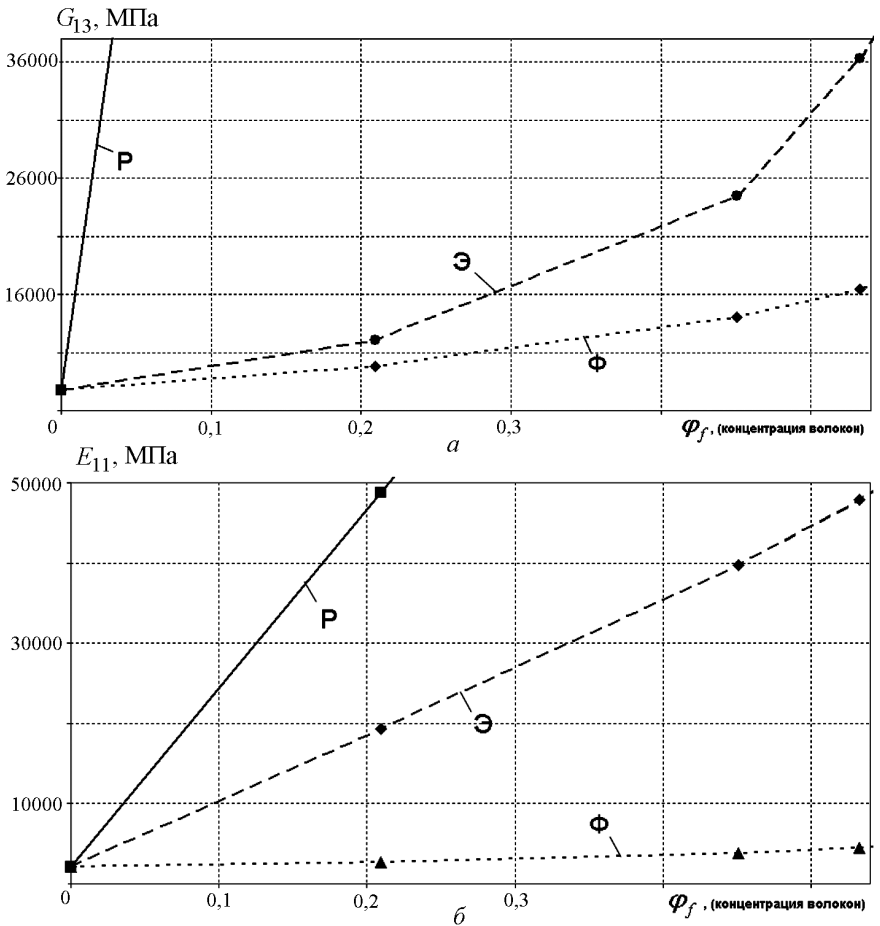


Рис. 9. Модуль сдвига  $G_{13}$  (а) и модуль Юнга  $E_{11}$  (б) композита 3DKM, вычисленные по Фойгту (Ф) и Рейссу (Р), и эффективные (Э) модули сдвига и Юнга, вычисленные по методу асимптотического осреднения

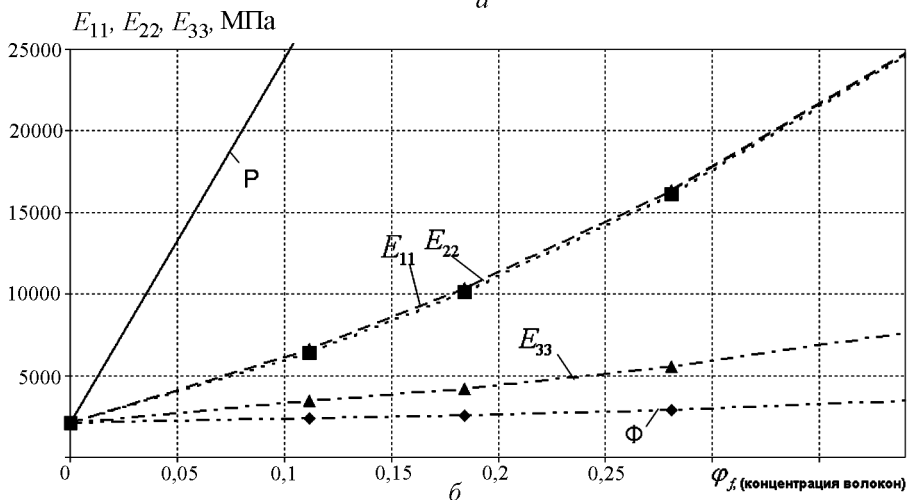
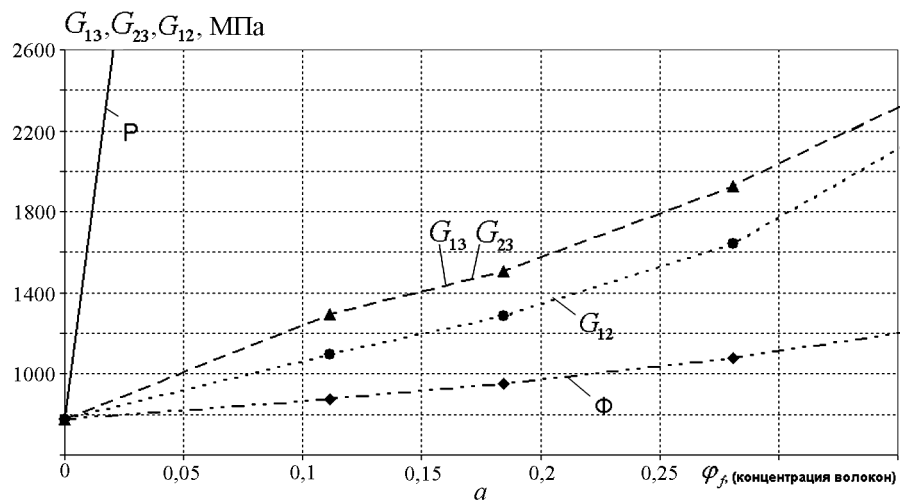


Рис. 10. Модули сдвига (а) и модули Юнга (б) тканевого композита ТККМ, вычисленные по Фойгту (Ф) и Рейссу (Р), и эффективные (Э) модули сдвига  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$  и Юнга  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$ , вычисленные по методу асимптотического осреднения

метод и автоматизированный программный комплекс в значительной мере восполняют этот недостаток.

**Выводы.** Разработан автоматизированный ПК модульного типа, предназначенный для решения локальных задач  $J_{pq}$  и расчета эффективных упругих характеристик КМ с различными структурами армирования. Проведены численные расчеты эффективных упругих характеристик для трех различных типов КМ, демонстрирующие возможности комплекса по автоматизированному проектированию новых КМ с заданными характеристиками.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-08-01448а и 07-08-00574.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984.
2. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Санчес-Паленсиа. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984.
4. Димитриенко Ю.И. Механика композиционного материала при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997.
5. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2002. – № 2. – С. 95–108.
6. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И., Макашов А. А. Разработка конечно-элементного метода решения локальных задач теории упругости на ячейке периодичности для композитов с периодической пространственной структурой // Математика в современном мире / Под ред. Ю.А. Дробышева. – Калуга.: Изд-во КГПУ. – 2004. – С. 177–191.
7. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И., Макашов А. А. Конечно-элементное моделирование процесса разрушения пространственно-армированных композитов с периодической структурой // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. – Сб. трудов конф. “40 лет факультета ФН”. – М.: Логос. – 2004. – С. 485–498.
8. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Кашкаров А. И. Разработка конечно-элементного метода решения задач расчета эффективных характеристик композиционных материалов на многопроцессорных вычислительных системах. В кн.: Аэрокосмические технологии. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2004. – С. 113–114.
9. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы. – М.: Машиностроение, 1987.
10. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высш. шк., 2001.

Статья поступила в редакцию 29.06.2007



Юрий Иванович Димитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 140 научных работ в области вычислительной механики, нелинейного тензорного анализа, термомеханики композитов, математического моделирования в материаловедении.

Yu.I. Dimitrienko (b.1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics”

department of the Bauman Moscow State Technical University. Full member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of more than 140 publications in the field of computational mechanics, nonlinear tensor analysis, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in science of materials.