УДК 532.32

И. К. Марчевский

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОФИЛЯ В ПОТОКЕ

Исследована устойчивость по Ляпунову положения равновесия тяжелого плохообтекаемого профиля в потоке жидкости или газа. Для системы с тремя степенями свободы рассмотрены случаи идеально упругих и вязкоупругих связей. Получены необходимые и достаточные условия (критерии) асимптотической устойчивости положения равновесия профиля в потоке. В частных случаях получены ранее известные условия, в том числе условие неустойчивости Глауэрта–Ден-Гартога.

Проблема определения аэродинамических характеристик и поведения конструкции в дозвуковом воздушном потоке в зависимости от их значений возникла в начале XX в. Основным методом нахождения аэродинамических характеристик является эксперимент — продувка исследуемой конструкции или ее модели в аэродинамической трубе.

В работе [1] описан эксперимент, поставленный в лаборатории промышленной аэродинамики ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, состоящий в следующем. В аэродинамическую трубу помещали брус длиной $l = 2$ м ромбического поперечного сечения (диагонали ромба $a = 0{,}5$ м, $b = 0{,}375$ м). Нижний конец бруса опирался на шаровой шарнир, в вертикальном положении брус удерживался двумя горизонтальными пружинами и мог колебаться только поперек потока воздуха (рис. 1, *а*). Собственная частота колебаний модели $\nu = 4$ Гц, скорость набегающего потока $V_\infty = 20$ м/с.

Нулевой угол атаки соответствовал положению бруса, при котором бо́льшая диагональ поперечного сечения параллельна скорости потока.

Для каждого фиксированного значения угла атаки α измеряли амплитуду колебаний A верхнего сечения бруса. При построении графика зависимости амплитуды колебаний от угла атаки использовали безразмерную амплитуду $\bar{A} = \dfrac{A}{a}$ (рис. 1, *б*). Зависимость $\bar{A} = \bar{A}(\alpha)$ указывает на существование интервала углов атаки, в котором происходит резкое увеличение безразмерной амплитуды колебаний $\bar{A}$. Возникновение ветрового резонанса при этом исключено, так как значение экспериментального числа Струхаля $\mathrm{Sh} = \dfrac{\nu\, a}{V_\infty} = 0{,}1$ меньше значения $\mathrm{Sh} = 0{,}2$, соответствующего ветровому резонансу.

В литературе наличие такого интервала углов атаки связывают со срывом потока с профиля и называют потерей аэродинамическо-

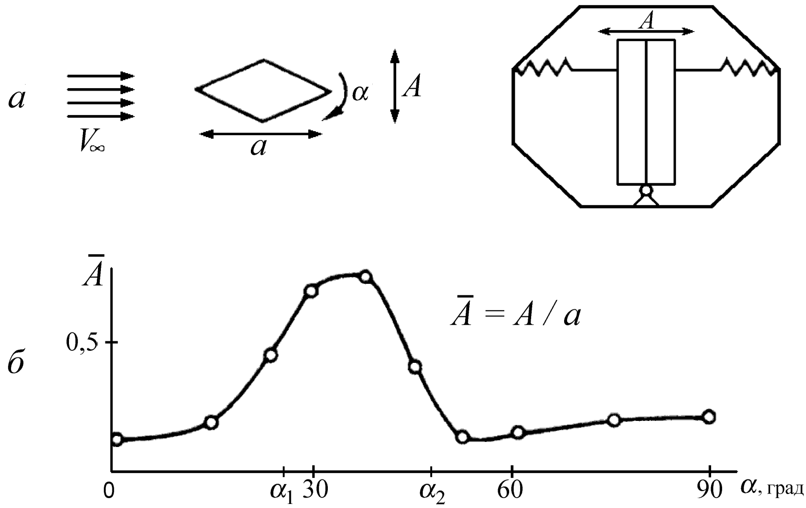

Рис. 1. К исследованию аэродинамической неустойчивости бруса с ромбическим поперечным сечением:
а — общая схема эксперимента; *б* — зависимость амплитуды колебаний бруса от угла атаки

го демпфирования. Отмечается, что такое явление характерно как для плохообтекаемых, так и для крыльевых профилей [2].

В работе [3] описано экспериментальное исследование поведения модели биплана в воздушном потоке при условии, что модель имеет одну степень свободы — возможны только крутильные колебания. Отмечено наличие интервала углов атаки, в котором наблюдалось резкое возрастание амплитуды крутильных колебаний, — явление, названное авторотацией. Указанные эксперименты были обработаны Х. Глауэртом [4], который вывел необходимое условие авторотации:

$$G(\alpha) = C'_{Ya} + C_{Xa} < 0, \tag{1}$$

где C_{Ya}, C_{Xa} — стационарные аэродинамические коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления; штрихом здесь и далее обозначены производные по углу атаки α.

С развитием средств передачи электроэнергии на большие расстояния на линиях электропередачи стали отмечаться явления больших (с амплитудой порядка 10 м и более) колебаний проводов между опорами. Такие колебания были названы галопированием (пляской) проводов. Дж. Ден-Гартог [5], изучая поведение плохообтекаемого профиля в форме полукруга с одной степенью свободы (колебания поперек потока), вывел необходимое условие галопирования, которое имеет тот же вид (см. (1)).

Итак, неравенство (1) является необходимым условием больших колебаний с одной степенью свободы — авторотации и галопирования.

Позднее авторы работы [6], по-видимому, не зная о результатах Глауэрта, при исследовании авторотации уголкового профиля получили в качестве необходимого условия довольно сложное неравенство, содержащее моментные аэродинамические коэффициенты, а затем на основе экспериментальных данных пришли к выводу, что условие (1), которое они называют условием Ден-Гартога, может быть использовано и в случае авторотации.

Условие Глауэрта–Ден-Гартога подтверждено многочисленными экспериментами [6–8] и нашло приложение, в частности, в строительстве — при проектировании высотных сооружений, подверженных ветровым нагрузкам, необходимо сориентировать поперечное сечение конструкции так, чтобы углы атаки по отношению к господствующим ветрам были вне интервала неустойчивости [9, 10].

В работе [11] при имитации поведения провода линии электропередачи под действием ветра рассмотрены движения профиля с одинаковыми вязкоупругими связями, имеющего три степени свободы, — движения по осям Ox, Oy и вращение вокруг центра масс. Выявлены условия существования статических решений системы уравнений движения: если профиль является несущим ($C_{Ya} \neq 0$), то положения равновесия существуют при любой скорости ветра $V_\infty > 0$.

При изучении устойчивости по Ляпунову положений равновесия получены следующие результаты: показано, что условие (1) — необходимое и достаточное условие (критерий) неустойчивости модели с одной степенью свободы, если не учитывать вязкое сопротивление связей; выведено условие неустойчивости положений равновесия (для трех степеней свободы), включающее в себя только аэродинамические характеристики профиля:

$$W(\alpha) = C_{Xa}\left(C'_{Ya} + C_{Xa}\right) + C_{Ya}\left(C_{Ya} - C'_{Xa}\right) < 0. \qquad (2)$$

В настоящей работе исследовано движение в воздушном потоке профиля с тремя различными вязкоупругими связями (три степени свободы). Расчетная схема для рассматриваемого случая приведена на рис. 2, где обозначено: V_∞ — скорость набегающего потока, который полагается горизонтальным; f_X, f_Y, f_M — упругие характеристики связей; ν_X, ν_Y, ν_M — вязкие характеристики связей; m и J — соответственно масса и момент инерции профиля относительно точки закрепления.

Положение профиля в пространстве однозначно определяется тремя координатами x, y и φ, где x, y — положение точки закрепления, φ — угол поворота профиля.

Воздействие набегающего потока на профиль учтено путем введения силы лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамичес-

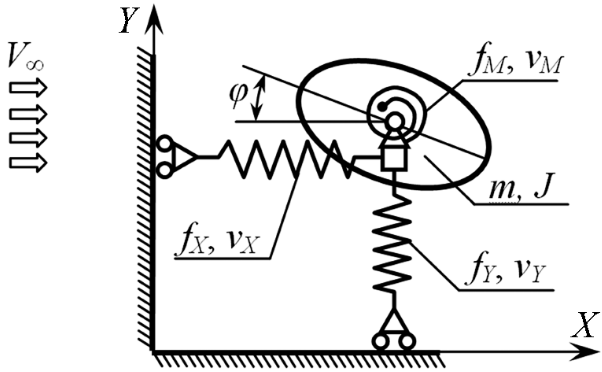

Рис. 2. Расчетная схема эксперимента

кого момента, которые вычисляются по формулам

$$X_a = \frac{1}{2} C_{Xa} \rho V_{rel}^2 S; \quad Y_a = \frac{1}{2} C_{Ya} \rho V_{rel}^2 S; \quad M_a = \frac{1}{2} C_{Ma} \rho V_{rel}^2 S^2,$$

где ρ — плотность воздуха, V_{rel} — относительная скорость набегающего потока, S — характерный линейный размер (хорда) профиля.

Принято допущение, что безразмерные аэродинамические коэффициенты C_{Xa}, C_{Ya} и C_{Ma} для данного профиля стационарные, т.е. зависят явно только от угла атаки профиля φ, и эти зависимости непрерывно дифференцируемы. В этом случае система дифференциальных уравнений, описывающих движение профиля в потоке, имеет вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \nu_X \dot{x} + f_X x = \dfrac{1}{2} \rho S \sqrt{(V_\infty - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \times \\ \qquad \times \left[C_{Ya}(\alpha) \cdot \dot{y} + C_{Xa}(\alpha) \cdot (V_\infty - \dot{x}) \right], \\ m\ddot{y} + \nu_Y \dot{y} + f_Y y = \dfrac{1}{2} \rho S \sqrt{(V_\infty - \dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \times \\ \qquad \times \left[C_{Ya}(\alpha) \cdot (V_\infty - \dot{x}) - C_{Xa}(\alpha) \cdot \dot{y} \right], \\ J\ddot{\varphi} + \nu_M \dot{\varphi} + f_M \varphi = \dfrac{1}{2} \rho S^2 \left[(V_\infty - \dot{x})^2 + \dot{y}^2 \right] C_{Ma}(\alpha). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\alpha = \varphi - \operatorname{arctg} \dfrac{\dot{y}}{V_\infty - \dot{x}}$, точкой обозначена производная по времени.

При любой скорости набегающего потока V_∞ существует хотя бы одно положение равновесия профиля $x = x_0$, $y = y_0$, $\varphi = \varphi_0$, и основная цель настоящей работы — исследование устойчивости по Ляпунову такого положения равновесия. Для этого запишем систему уравнений первого приближения. Считая координаты и скорости профиля малыми, можно линеаризовать исходную нелинейную систему уравнений вблизи положения равновесия, и задача исследования асимптотической устойчивости положения равновесия исходной нелинейной системы сводится к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений первого приближения.

Выполняя линеаризацию системы (3) и приводя ее к безразмерным переменным, получаем

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\xi} + \omega_X^2 \xi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(C_{Ya} - C'_{Xa}\right)\dot{\eta} - \varepsilon\left(C_{Xa} + \mu_X\right)\dot{\xi} + \frac{1}{2}\varepsilon C'_{Xa}\gamma;\\
&\ddot{\eta} + \omega_Y^2 \eta = -\frac{1}{2}\varepsilon\left(C_{Xa} + C'_{Ya} + 2\mu_Y\right)\dot{\eta} - \varepsilon C_{Ya}\dot{\xi} + \frac{1}{2}\varepsilon C'_{Ya}\gamma;\\
&\ddot{\gamma} + \omega_M^2 \gamma = -\frac{1}{2\sigma}\varepsilon C'_{Ma}\dot{\eta} - \frac{1}{\sigma}\varepsilon C_{Ma}\dot{\xi} + \frac{1}{2\sigma}\varepsilon C'_{Ma}\gamma - \varepsilon\mu_M\dot{\gamma}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $\xi = \dfrac{x - x_0}{S}$, $\eta = \dfrac{y - y_0}{S}$, $\gamma = \varphi - \varphi_0$ — безразмерные координаты; точкой обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \dfrac{V_\infty}{S}t$; $\mu_X = \dfrac{\nu_X}{\rho S V_\infty}$, $\mu_Y = \dfrac{\nu_Y}{\rho S V_\infty}$, $\mu_M = \dfrac{\nu_M}{\sigma\rho S^3 V_\infty}$ — безразмерные коэффициенты демпфирования связей; σ — безразмерный коэффициент, определяемый геометрией профиля и положением точки закрепления (например, для круга и квадрата, закрепленных за центр масс, соответственно $\sigma = \dfrac{1}{8}$ и $\sigma = \dfrac{1}{6}$); $\omega_X^2 = \dfrac{f_X S}{\rho_0 b V_\infty^2}$, $\omega_Y^2 = \dfrac{f_Y S}{\rho_0 b V_\infty^2}$, $\omega_M^2 = \dfrac{f_M}{\sigma\rho_0 S b V_\infty^2}$; b — второй характерный размер профиля, выбираемый так, что $\Sigma = S\,b$ — площадь профиля; ρ_0 — плотность материала профиля. Параметр $\varepsilon = \dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{S}{b}$ является малым ($\varepsilon \ll 1$), если исследуется обтекание профиля, два характерных размера которого близки, а плотность его материала много больше плотности среды набегающего потока. Например, для типичных сталеалюминевых проводов воздушных линий электропередачи $\varepsilon = 10^{-3}\ldots 10^{-4}$. В дальнейшем будем исследовать устойчивость положений равновесия именно таких профилей, которые назовем тяжелыми плохообтекаемыми, и, где это возможно и корректно, будем пренебрегать в выкладках высокими степенями ε по сравнению с низкими.

Отметим, что значения входящих в систему (4) аэродинамических коэффициентов и их производных по углу атаки вычисляются для профиля, находящегося в положении равновесия (при $\gamma = 0$), т.е. являются постоянными.

Для исследования устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы (4) необходимо определить знаки вещественных частей корней ее характеристического уравнения. Для этого воспользуемся критерием Гурвица [12].

В настоящей работе исследуется устойчивость решения системы (4), а также частные случаи, соответствующие одной и двум степеням свободы у рассмотренной системы (рис. 2). Во всех случаях будем рассматривать систему при наличии как вязкоупругих связей (с отличными от нуля коэффициентами $\varepsilon \ll \mu_X, \mu_Y, \mu_M \ll \frac{1}{\varepsilon}$), так и идеально упругих связей (при $\mu_X = \mu_Y = \mu_M = 0$). При наличии двух "поступательных" (по осям x и y) степеней свободы рассмотрим также отдельно случаи равных и разных частот ω_X и ω_Y.

При этих предположениях правые части уравнений системы (4) пропорциональны малому параметру ε.

Ввиду громоздкости выкладок, приведем в виде таблицы лишь окончательные результаты исследования устойчивости положений равновесия систем с одной, двумя и тремя степенями свободы.

В таблице приняты следующие обозначения:

$$G = C_{Xa} + C'_{Ya};\ G_\mu = G + 2\mu_Y;$$
$$M = G + 2C_{Xa};\ M_\mu = G_\mu + 2\left(C_{Xa} + \mu_X\right);$$
$$W = C_{Xa}\left(C_{Xa} + C'_{Ya}\right) + C_{Ya}\left(C_{Ya} - C'_{Xa}\right);$$
$$W_\mu = \left(C_{Xa} + \mu_X\right)\left(C_{Xa} + C'_{Ya} + 2\mu_Y\right) + C_{Ya}\left(C_{Ya} - C'_{Xa}\right);$$
$$P_X = C'_{Xa}C_{Ma}\frac{\omega_M^2}{\omega_X^2 - \omega_M^2};\ P_Y = C'_{Ya}C'_{Ma}\frac{\omega_M^2}{\omega_Y^2 - \omega_M^2};\ P = P_Y + 2P_X.$$

Для каждого случая получено неравенство или система неравенств, при выполнении которых положение равновесия профиля является асимптотически устойчивым. В то же время, если хотя бы одно неравенство меняется на противоположное, из критерия Гурвица следует, что положение равновесия становится неустойчивым. В этом смысле можно говорить о получении необходимых и достаточных условий (критериев) устойчивости профиля в потоке.

Отметим, что рассмотрение системы уравнений первого приближения (4) не позволяет исследовать положение равновесия профилей с одной степенью свободы, совершающих крутильные колебания. В этом случае уравнение крутильных колебаний в исходной системе (3) линейно и характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней, поэтому соответствующее положение равновесия всегда устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.

Выводы. 1. Получены аналитические выражения для необходимых и достаточных условий устойчивости тяжелого плохообтекаемого профиля в потоке, которые являются обобщениями известных условий [4, 7, 11].

Таблица

Обобщенные координаты		Критерии устойчивости	
		Для идеально упругих связей	Для вязко-упругих связей
Движение с одной степенью свободы			
x		Положение равновесия всегда асимптотически устойчиво	
y		$G > 0$	$G_\mu > 0$
φ		Положение равновесия устойчиво, но не асимптотически	Положение равновесия всегда асимптотически устойчиво
Движение с двумя степенями свободы			
x-φ		$P_X > 0$	Положение равновесия всегда асимптотически устойчиво
y-φ		$\begin{cases} G > 0 \\ P_Y > 0 \end{cases}$	$G_\mu > 0$
x-y	$\omega_X = \omega_Y$	$\begin{cases} M > 0 \\ W > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_\mu > 0 \\ W_\mu > 0 \end{cases}$
	$\omega_X \neq \omega_Y$	$G > 0$	$G_\mu > 0$
Движение с тремя степенями свободы			
x-y-φ	$\omega_X = \omega_Y$	$\begin{cases} M > 0 \\ P > 0 \\ W > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_\mu > 0 \\ W_\mu > 0 \end{cases}$
	$\omega_X \neq \omega_Y$	$\begin{cases} G > 0 \\ P > 0 \end{cases}$	$G_\mu > 0$

2. В случае идеально упругих связей из полученных условий следуют достаточные условия неустойчивости $G < 0$, $M < 0$ и $W < 0$, которые зависят лишь от аэродинамических характеристик профиля C_{Xa} и C_{Ya} и инвариантны по отношению к выбору точки закрепления профиля, массе и моменту инерции профиля, жесткостям связей. Поэтому изменение этих механических параметров конструкции не влияет на характер устойчивости положения равновесия профиля. При наличии вязкоупругих связей все полученные условия устойчивости зависят только от аэродинамических характеристик профиля C_{Xa} и C_{Ya} и коэффициентов демпфирования μ_X и μ_Y.

3. Как для случая идеально упругих связей, так и для случая вязкоупругих связей при наличии “вертикальной” степени свободы (вдоль оси Y) можно сформулировать инвариантное в указанном выше смысле достаточное условие неустойчивости положения равновесия: в первом случае оно имеет вид $M < 0$, во втором $M_\mu < 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванько В. И., Соловьева Е. В. Об условиях аэродинамической неустойчивости положений равновесия профилей // Прикладная математика и теоретическая физика. – 1996. – Т. 37. – № 5. – С. 29–34.
2. Ванько В. И., Марчевский И. К., Щеглов Г. А. Аэродинамическая неустойчивость системы профилей // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сборник трудов. – М.: Логос, 2005. – С. 423–436.
3. Relf E. H., Lavender T. The auto-rotation of stalled aerofoils and its relation to the spinning speed of aeroplanes // Great Britain Advisory Committee for Aeronautics (GBACA) / Reports & Memoranda. – Oct. 1918. – № 549. – 9 p.
4. Glauert H. The rotation of an aerofoil about a fixed axis // GBACA. R&M. – March 1919. – № 595. – 8 p.
5. Den-Hartog J. P. Transmission line's vibrations due to sleet // Transactions AIEE. – 1932. – Vol. 51. – P. 1074–1076.
6. Федяевский К. К., Блюмина Л. Х. Гидроаэродинамика отрывного обтекания тел. – М.: Машиностроение, 1977. – 198 с.
7. Novak M. Aeroelastic galloping of prismatic bodies // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. – 1969. – Vol. 95. – № EM1, Proc. Paper 6394. – P. 115–142.
8. Севастьянова Е. В., Соловьева Е. В. Влияние удлинения и формы поперечного сечения на структуру обтекания и аэродинамическую устойчивость призматических тел // В сб.: Нормирование ветровых нагрузок и расчет зданий, ЛЭП и др. сооружений на действие ветра. – М.: Информэнерго, 1989. – С. 44–45.
9. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. – М.: Стройиздат, 1978. – 123 с.
10. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
11. Ванько В. И. Математическая модель пляски провода ЛЭП // Изв. вузов. Энергетика. – 1991. – № 11. – С. 36–42.
12. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965.

Статья поступила в редакцию 5.06.2007

Илья Константинович Марчевский родился в 1983 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Аспирант кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области вычислительной гидродинамики, дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

I.K. Marchevskiy (b. 1983) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2005. Post-graduate of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of computational hydrodynamics, differential equations, stability theory.