

Юлий Владимирович Трунин, родился в 1981 г., окончил МГТУ им. Н.Э.Баумана в 2004 г. Аспирант кафедры “Электротехника и промышленная электроника” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор 3 научных работ в области моделей и элементов систем управления вентильно-индукторных машин.



Yu. V. Trunin (b. 1981) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2004. Post-graduate of “Electrical Engineering and Industrial Electronics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of models and elements of control systems for switched reluctance machines.

УДК 531.36:534.1

Н. Н. В е р и ч е в, С. Н. В е р и ч е в

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложена асимптотическая теория синхронизации хаотических колебаний неидентичных диссипативно связанных динамических систем. Рассматриваются различные степени неидентичности динамических систем и значения параметров их связей, когда синхронизация асимптотически близка к тождественной. Теория распространяется как на взаимную, так и на принудительную синхронизацию систем, в том числе систем с медленно изменяющимися параметрами. В основу теории положено общее определение синхронизации и метод интегральных многообразий. Результаты иллюстрируются численным экспериментом.

Синхронизация хаотических колебаний, обнаруженная в 1983 г. [1] для идентичных и независимо в 1986 г. [2, 3] для неидентичных диссипативно связанных динамических систем, относится к числу достаточно новых явлений, интенсивно исследуемых в течение последних лет. Явление обнаруживается практически во всех связанных системах, включая биологические, где отдельные объекты обладают индивидуальной хаотической динамикой. Синхронизация хаотических колебаний интенсивно исследуется и в прикладном отношении, в частности в задачах средств коммуникации. Число работ, посвященных различным аспектам этого явления слишком велико, чтобы дать даже краткий обзор публикаций на данную тему (см., например, работы [4–16] и цитируемую в них литературу).

Эффект синхронизации хаотических колебаний неидентичных динамических систем сложен. По крайней мере, полные картины (бифуркационные сценарии) рождения хаотических аттракторов, являющихся образами синхронизации данного типа, к настоящему времени остаются во многом не исследованными. Обратим внимание на трудности исследования хаотической синхронизации неидентичных динамических систем. В случае автоколебательных систем с регулярной динамикой имеются ясные понятия, такие как “фаза” и “амплитуда” (“угол”, “действие”), а также существует целый набор приемов и методов исследования их синхронизации: метод усреднения, точечных отображений, функций Ляпунова. В случае же систем с хаотической динамикой подобные понятия отсутствуют, нет также и возможности применения перечисленных классических методов. Более того, само понятие “синхронизация” нуждается в определении.

Определение синхронизации, в том числе синхронизации хаотических колебаний, предложено в работе [2]. Это определение, а также метод интегральных многообразий [17–20] положены в основу предлагаемой асимптотической теории. В случае регулярных возмущений система идентичных осцилляторов играет роль порождающей (в смысле Пуанкаре) системы. Кратко приведем главные положения синхронизации идентичных систем и определение синхронизации.

Пусть имеется система двух взаимосвязанных осцилляторов вида

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= F(X_1) - \varepsilon C(X_1 - X_2); \\ \dot{X}_2 &= F(X_2) + \varepsilon C(X_1 - X_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $X_{1,2} \in R^m$; $F(X) : R^m \rightarrow R^m$; $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_m)$, $c_i \geq 0$; $\varepsilon \geq 0$ — скалярный параметр связи. Матрица C определяет набор переменных (набор уравнений индивидуальных систем), по которым осуществляется связь осцилляторов.

Допустим, что каждая индивидуальная система

$$\dot{X} = F(X)\tag{2}$$

представляет собой некоторый осциллятор (автогенератор) с хаотической динамикой. Классическими примерами таких систем являются осцилляторы Лоренца, Реслера, Чуа, система Лурье, осциллятор Анищенко и др. Допустим, что в фазовом пространстве системы (2) имеется некоторый хаотический аттрактор A_0 . Для простоты считаем, что он является единственным предельным множеством. Предположим, что свойства аттрактора A_0 являются известными. В частности, считаем известным максимальный ляпуновский показатель λ_{\max} этого аттрактора (как максимальный показатель решений уравнения в вариациях, записанного относительно произвольного решения $\zeta(t) \in A_0$ уравнения (2)).

Нетрудно заметить, что гиперплоскость $M_0 = \{X_1, X_2 | X_1 = X_2\}$ (диагональ) является интегральным многообразием в фазовом пространстве системы (1). Это многообразие разбивается на траектории фазовыми траекториями системы (2). Таким образом, если многообразие оказывается устойчивым, то все фазовые траектории системы (1) (с начальными условиями из некоторой окрестности многообразия) притягиваются диагональю и, следовательно, аттрактором A_0 . Другими словами, $X_1 \rightarrow X_2$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. с течением времени в связанной системе (1) устанавливается изохронный режим синхронизации хаотических автоколебаний осцилляторов с тождественным равенством соответственных переменных. Режим синхронизации является устойчивым, в общем случае локально, при выполнении неравенства $\varepsilon > \varepsilon^*$ (λ_{\max}), где ε^* — некоторое значение параметра связи, зависящее, как от максимального ляпуновского показателя аттрактора A_0 , так и конкретной структуры связей осцилляторов — матрицы C . В частности, если $C = I$, то $\varepsilon^* = \lambda_{\max}/2$ [10]. Если система (2) является диссипативной [20] с единственным аттрактором A_0 , то по мере возрастания значения параметра связи локальная устойчивость режима хаотической синхронизации переходит в глобальную [16].

Определение синхронизации. Пусть $\dot{X}_1 = F_1(X_1)$, $\dot{X}_2 = F_2(X_2)$, $X_1 \in R^n$, $X_2 \in R^m$ — динамические системы двух осцилляторов. Предположим, что каждая из этих систем имеет аттрактор (соответственно A_1 и A_2). Рассмотрим связанную систему вида

$$\dot{X}_1 = F_1(X_1) + \varepsilon f_1(X_1, X_2);$$

$$\dot{X}_2 = F_2(X_2) + \varepsilon f_2(X_1, X_2).$$

Будем говорить, что имеет место синхронизация осцилляторов (в частности, хаотическая) для значений параметра связи из интервала $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, если для этих значений ε существует аттрактор A_ε , такой, что:

1) его образы $\pi_1(A_\varepsilon)$ и $\pi_2(A_\varepsilon)$ в проекциях на “парциальные” пространства переводятся один в другой с помощью взаимно-однозначного, взаимно непрерывного отображения, т.е. гомеоморфны (π_1 и π_2 — естественные проекции на подпространства X_1 и X_2);

2) существует гомеоморфное отображение $g: \pi_1(A_\varepsilon) \rightarrow \pi_2(A_\varepsilon)$ со следующими свойствами: а) g — липшиц-непрерывно на $\pi_1(A_\varepsilon)$; б) для любой траектории $\{T^t(X_1, X_2)\} \subset A_\varepsilon$, где T^t — отображение сдвига по траекториям связанной системы, $g(\pi_1(T^t(X_1, X_2))) = \pi_2(T^{t+\alpha(t)}(X_1, X_2))$, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \alpha(t)}{t} = r$ — число вращения (рациональное число).

Если $r = 1$, то синхронизация называется простой, в противном случае — кратной. Кратная синхронизация хаотических колебаний с числом вращения $r = 2$ описана в работе [15]. Отметим, что введенное в определении число вращения является аналогом числа вращения Пуанкаре на торе. Данное определение позволяет рассматривать синхронизацию хаотических колебаний в контексте общей теории синхронизации динамических систем и использовать при этом устоявшуюся терминологию, в частности терминологию из теории систем фазовой синхронизации (СФС). Поясним сказанное. Пусть $X(t)$ и $A X(t + \alpha(t))$ — некоторые хаотические реализации колебаний двух связанных осцилляторов. По определению эти осцилляторы синхронизованы. Принимаем сигнал $X(t)$ в качестве эталона. При этом по аналогии с периодическими сигналами величину A естественно называть амплитудой (условно), $t + \alpha(t)$ — фазой колебаний, а $\alpha(t)$ — разностью фаз одного из осцилляторов относительно эталона. В таком случае из определения следует, что если $\alpha(t) = \Delta = \text{const}$, $r = 1$, то в связанной системе имеет место простая фазовая синхронизация. Если $\langle \alpha(t, t_0) \rangle_t = \Delta = \text{const}$, то это фазовая синхронизация в среднем. В терминологии СФС область параметров, для всех точек которой существует устойчивая синхронизация, — область удержания, а область параметров, для всех точек которой режим хаотической синхронизации является ГАУ, — область захвата синхронизации [21].

В рамках принятого определения задача построения теории синхронизации сводится к следующим положениям:

- 1) указание условий существования и устойчивости режима хаотической синхронизации;
- 2) выбор алгоритмов и само построение отображений фазовых портретов осцилляторов в режиме синхронизации;
- 3) задание динамической системы, содержащей хаотический аттрактор A_ε — образ синхронизации;
- 4) физическая интерпретация результатов.

Взаимная хаотическая синхронизация неидентичных осцилляторов. Рассмотрим взаимосвязанную систему неидентичных хаотических осцилляторов вида

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(X_1) - \varepsilon C(X_1 - X_2); \\ \dot{X}_2 &= F_2(X_2) + \varepsilon C(X_1 - X_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $X_{1,2} \in R^m$, $F_{1,2}: R^m \rightarrow R^m$, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_m)$, $c_i \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Предположим, что динамические системы индивидуальных осцилляторов являются диссипативными. В таком случае нетрудно показать,

что в фазовом пространстве связанной системы существует шар диссипации и все ее решения являются ограниченными при $t \rightarrow \infty$ [3]. Также будем считать, что функции $F_{1,2}(X)$ непрерывны и обладают достаточной гладкостью по всем переменным и параметрам.

Слабо неидентичные осцилляторы. Допустим, что $F_1(X_1) = F(X_1) + \mu F_1^*(X_1)$, $F_2(X_2) = F(X_2) + \mu F_2^*(X_2)$, где μ — некоторый малый параметр, связанный с неидентичностью параметров осцилляторов. В таком случае система (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F(X_1) - \varepsilon C(X_1 - X_2) + \mu F_1^*(X_1, \mu); \\ \dot{X}_2 &= F(X_2) + \varepsilon C(X_1 - X_2) + \mu F_2^*(X_2, \mu). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $\mu = 0$, то система (4) является связанной системой двух идентичных осцилляторов (1) — порождающей системой с порождающим интегральным многообразием $M_0 = \{X_1, X_2 | X_1 = X_2\}$. Введем в системе (4) переменную $U = X_1 - X_2$ и рассмотрим уравнение вида

$$\dot{U} = (F'(\xi(t)) - 2\varepsilon C)U + \mu F^*(X_2(t), U, \mu). \quad (5)$$

Здесь $F'(\cdot)$ — матрица Якоби для функции $F(X)$, $F^* = F_1^* - F_2^*$. При переходе от системы (4) к уравнению (5) использована теорема Лагранжа, $\xi(t) \in [X_1, X_2]$.

Если $\xi(t) \in M_0$, то уравнение (5) при $\mu = 0$ — уравнение в вариациях относительно порождающего многообразия M_0 , а при $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, $\xi(t) \in A_0 \in M_0$ — уравнение в вариациях для уравнения (2). Максимальный ляпуновский показатель решений последнего равен λ_{\max} . Допустим, что матрица связей C выбрана так, что тривиальное решение $U = 0$ уравнения (5) устойчиво при $\varepsilon > \varepsilon^*$ и $\mu = 0$ (такой выбор всегда возможен: если $C = I$, то $\varepsilon^* = \lambda_{\max}/2$), т.е. все характеристические показатели решений порождающего уравнения (5) строго отрицательны. В данных условиях уравнение (5) представляет собой квазилинейное уравнение с ограниченными возмущениями (некритический случай). Такое уравнение для значений параметра $\mu \in [0, \mu^*)$ имеет устойчивое, гладкое и единственное интегральное многообразие вида $U = \mu U^*(X_2(t), U, \mu)$ [17–20]. Аналогично сказанному для системы (4), получаем, что она имеет устойчивое и единственное многообразие $M_\mu = \{X_1, X_2 | X_1 = X_2 + \mu X^*(X_2, \mu)\}$, совпадающее с многообразием порождающей системы при $\mu = 0$. Характер устойчивости многообразия M_μ тот же самый, что и у M_0 . Отметим, что существование устойчивого взаимно-однозначного многообразия M_μ , гарантированное теоремами [17–20], эквивалентно существованию устойчивой хаотической синхронизации в системе (4). Таким образом, п. 1 постановки задачи (о существовании и устойчивости режима синхронизации) выполнен. Считаем, что осцилляторы в связанной системе (4) синхронизованы.

Многообразие M_μ разбивается на траектории фазовыми траекториями некоторой динамической системы (с аттрактором A_μ), совпадающей с динамической системой (2) при $\mu = 0$. Ищем параметрическое представление многообразия M_μ в виде степенных рядов по малому параметру:

$$X_1 = X + \mu X_{11}(X) + \mu^2 X_{12}(X) + \dots, \quad (6)$$

$$X_2 = X + \mu X_{21}(X) + \mu^2 X_{22}(X) + \dots.$$

При этом предполагаем, что многообразие M_μ разбивается на траектории фазовыми траекториями динамической системы вида

$$\dot{X} = F(X) + \mu F_*(X) + \mu^2 F_{**}(X) + \dots. \quad (7)$$

Если функции $F_*(X)$, $F_{**}(X)$, ..., $X_{11}(X)$, $X_{21}(X)$, ... некоторым образом найдены, то уравнения (6) определяют (параметрически) искомое отображение фазовых портретов осцилляторов по траекториям аттрактора A_μ динамической системы (7). Выбирать функции из правой части уравнения (7) будем так, чтобы уравнения, определяющие функции замены (6), имели ограниченное решение.

Выполняем разложения функций $F(X_i)$ и $F_i^*(X_i)$, $i = 1, 2$ в степенные ряды по малому параметру:

$$F(X + \mu X_{i1}(X) + \dots) = F(X) + \mu F'X_{i1} + \dots;$$

$$F_i^*(X + \mu X_{i1}(X) + \dots) = F_i^*(X) + \dots.$$

Подставляем соотношения (6) в систему (4). Учитывая вид уравнения (7) и приравнявая члены одинаковых порядков по малому параметру, получаем систему уравнений, определяющих искомые функции. В частности, уравнения для функций первого приближения имеют вид

$$F_* + \dot{X}_{11} = F'X_{11} - \varepsilon C(X_{11} - X_{21}) + F_1^*;$$

$$F_* + \dot{X}_{21} = F'X_{21} + \varepsilon C(X_{11} - X_{21}) + F_2^*.$$

Здесь и далее выражение $F'(X) \equiv \frac{\partial F}{\partial X}$ представляет матрицу Якоби порождающего уравнения (7), записанную относительно некоторого его решения. Следующим шагом является выбор функций F_* , X_{11} , X_{21} .

Заметим, что относительно переменной $U = X_{11} + X_{21}$ имеет место уравнение вида

$$2F_* + \dot{U} = F'U + F_1^* + F_2^*. \quad (8)$$

Выберем функцию F_* в виде $F_* = (F_1^* + F_2^*)/2 + \varepsilon CU$. При этом уравнение (8) примет вид $\dot{U} = F'U - 2\varepsilon CU$. Оно совпадает с порождающим уравнением (5) и имеет тот же самый смысл. При выполнении

неравенства $\varepsilon > \varepsilon^* (\lambda_{\max})$ тривиальное решение $U = 0$ полученного уравнения является устойчивым, а уравнения для функций X_{11} и X_{21} имеют вид

$$\begin{aligned} X_{21} &= -X_{11}; \\ \dot{X}_{11} &= F'X_{11} - 2\varepsilon CX_{11} + (F_1^* - F_2^*)/2. \end{aligned} \quad (9)$$

Второму уравнению системы (9) соответствует следующее уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial X} F - \frac{\partial F}{\partial X} X_{11} + 2\varepsilon CX_{11} = (F_1^* - F_2^*)/2. \quad (10)$$

Отметим, что любое решение уравнения (9) является ограниченным в силу устойчивости тривиального решения соответствующего однородного уравнения и ограниченности правой части $F^* = (F_1^* - F_2^*)/2$.

Пусть $X_{11} = X_{11}(X)$ — некоторое решение уравнения (10). В таком случае формулы $X_1 = X + \mu X_{11}(X)$, $X_2 = X - \mu X_{11}(X)$ (точность μ^2) определяют параметрическую связь переменных в режиме синхронизации — отображение фазовых портретов. При этом свойства и параметры синхронного хаотического режима (спектр, размерность и др.) определяются (с точностью μ^2) свойствами аттрактора A_μ “среднеарифметического” осциллятора вида

$$\dot{X} = (F_1(X) + F_2(X))/2.$$

Таким образом, окончательное решение задачи сводится к решению квазилинейного уравнения (10). В общем случае этот процесс достаточно трудоемкий, решать уравнение (10) имеет смысл для конкретных систем и конкретных типов возмущений. Укажем одно из таких решений, имеющее отношение к приложениям. Пусть вектор $F^* = (F_1^* - F_2^*)/2$ коллинеарен вектору F , т.е. $F^* = \nu F$, где ν — число. Пусть, для простоты, $C = I$. В таком случае функция $X_{11} = \Delta \cdot F(X)$, где $\Delta = \nu/2\varepsilon$, — решение уравнения (10), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Покажем, что это решение является устойчивым. Сделаем в уравнении (9) замену переменных вида $X_{11} = \Delta \dot{X} + \eta$, $\dot{X} = F$. В результате замены получаем следующее уравнение

$$\Delta \ddot{X} + \dot{\eta} = F' \Delta \dot{X} + F' \eta - 2\varepsilon \Delta \dot{X} - 2\varepsilon \eta + 2\varepsilon \Delta F.$$

Учитывая, что $\ddot{X} \equiv F' \dot{X}$, относительно η получаем уравнение вида $\dot{\eta} = F' \eta - 2\varepsilon \eta$. Тривиальное решение $\eta = 0$ этого уравнения устойчиво при выполнении неравенства $\varepsilon > \lambda_{\max}/2$. Связь переменных осцилляторов в режиме синхронизации описывается соотношениями

вида $X_1 = X + \mu \Delta \dot{X}$, $X_2 = X - \mu \Delta \dot{X}$ или (с той же точностью μ^2) $X_1(t) = X_2(t + 2\mu \Delta)$.

Вывод. В случае возмущений рассмотренного вида в системе имеет место фазовая синхронизация осцилляторов. Отображение фазовых портретов осцилляторов является тождественным, действующим при постоянном фазовом сдвиге $\alpha(t) = 2\mu \Delta = \text{const}$. При наблюдении за движением изображающих точек в “парциальных” фазовых пространствах обнаружится, что они движутся по одинаковым траекториям, однако с постоянным временным сдвигом — разностью фаз, равной $\alpha(t) = 2\mu \Delta = \text{const}$. “Парциальные” изображающие точки — соответствующие проекции изображающей точки фазового пространства связанной системы, движущейся на аттракторе A_μ . Нетрудно заметить, если $F^* = \nu CF$, то указанное решение уравнения (10) также существует.

Сформулируем обратную задачу, более интересную для приложений.

Задача 1. Определить вид возмущений уравнений осцилляторов, а также матрицу C по заданной связи переменных осцилляторов в режиме синхронизации.

Продемонстрируем решение этой задачи на примере взаимосвязанных систем Лоренца. Рассматриваем систему вида (4), где

$$X_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T;$$

$$F(X) = (-\sigma(x - y), -y + rx - xz, -bz + xy)^T.$$

Необходимо найти вектор возмущений $\mu F^*(X)$ и матрицу C , которые при минимальном числе связей с точностью μ^2 обеспечивают в режиме синхронизации связь переменных осцилляторов вида $X_1 = X + \mu X_{11}$, $X_2 = X - \mu X_{11}$, где $X_{11} = \alpha X + \Delta \dot{X}$, а α и Δ — некоторые заданные числа. Необходимые для решения задачи векторы и матрицы имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} -\sigma(x - y) \\ -y + rx - xz \\ -bz + xy \end{pmatrix}; \quad X_{11} = \begin{pmatrix} \alpha x + \Delta \dot{x} \\ \alpha y + \Delta \dot{y} \\ \alpha z + \Delta \dot{z} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial X} = \begin{pmatrix} \alpha - \Delta \sigma & \Delta \sigma & 0 \\ \Delta(r - z) & \alpha - \Delta & -\Delta x \\ \Delta y & \Delta x & \alpha - \Delta b \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10) и проводя преобразования, получаем уравнение, определяющее вектор возмущений F^* :

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} + 2\varepsilon\alpha \begin{pmatrix} c_1x \\ c_2y \\ c_3z \end{pmatrix} + 2\varepsilon \Delta \begin{pmatrix} -c_1\sigma(x-y) \\ c_2(-y+rx-xz) \\ c_3(-bz+xy) \end{pmatrix} = F^*.$$

Из условия минимальности числа связей полагаем, что $c_1 = 0$. Кроме того, если (добавочно) потребовать линейность возмущений, то получаем налагаемые на параметры условия: $\alpha + 2\varepsilon\Delta c_2 = 0$; $\alpha + 2\varepsilon\Delta c_3 = 0$. В итоге находим искомый вектор возмущений вида $F^* = (0, \lambda_1x + \lambda_2y, \lambda_3z)^T$, $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\alpha r$, $\lambda_3 = (\Delta b - \alpha)\alpha/\Delta$. Таким образом, при линейных возмущениях второго и третьего уравнений систем Лоренца (достаточно в одной из систем) получаем, что в режиме синхронизации (с точностью μ^2) переменные осцилляторов связаны следующими уравнениями:

$$x_1 = x + \mu(\alpha x + \Delta \dot{x}); \quad x_2 = x - \mu(\alpha x + \Delta \dot{x});$$

$$y_1 = y + \mu(\alpha y + \Delta \dot{y}); \quad y_2 = y - \mu(\alpha y + \Delta \dot{y});$$

$$z_1 = z + \mu(\alpha z + \Delta \dot{z}); \quad z_2 = z - \mu(\alpha z + \Delta \dot{z}).$$

Исключая параметры x, y, z из полученных уравнений, получаем явную (с точностью μ^2) связь переменных осцилляторов в режиме синхронизации:

$$x_1(t) = (1 + 2\mu\alpha)x_2(t + 2\mu\Delta); \quad y_1(t) = (1 + 2\mu\alpha)y_2(t + 2\mu\Delta);$$

$$z_1(t) = (1 + 2\mu\alpha)z_2(t + 2\mu\Delta).$$

Таким образом, в данном случае имеет место отображение равномерного сжатия (растяжения) одного “парциального” фазового портрета осциллятора на другой, действующее при постоянном сдвиге $\alpha(t) = 2\mu\Delta$, по траекториям аттрактора A_μ осциллятора Лоренца со среднеарифметическими значениями параметров. Рассмотренный тип возмущения параметров приводит к возмущению амплитуды и фазы хаотических колебаний одного осциллятора по отношению к другому.

Замечание 1. Предлагаемая теория рассматривается скорее как качественная, а не как теория инженерных расчетов. Интерес представляют качественные изменения режимов синхронизации при изменении параметров систем, а не их количественные характеристики. Поэтому принимаются во внимание только первые приближения по малому параметру как содержащие информацию о значимых, качественных изменениях.

Сильно неидентичные системы, содержащие сильные связи. Допустим, что k уравнений связанной системы (3) содержат сильную связь, а $m - k$ уравнений не содержат таковой. Выделяя в группы те и другие уравнения, рассматриваем связанную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= F_1(X_1, Y_1) - \varepsilon C(X_1 - X_2); \\ \dot{Y}_1 &= \Phi(X_1, Y_1) - D(Y_1 - Y_2) + \mu \Phi_1^*(X_1, Y_1); \\ \dot{X}_2 &= F_2(X_2, Y_2) + \varepsilon C(X_1 - X_2); \\ \dot{Y}_2 &= \Phi(X_2, Y_2) + D(Y_1 - Y_2) + \mu \Phi_2^*(X_2, Y_2).\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь $X_{1,2} \in R^k$; $Y_{1,2} \in R^{m-k}$; $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k)$, $c_i > 0$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{m-k})$, $d_j \geq 0$; $\varepsilon^{-1} = \mu$ – малый параметр.

Система (11) – это система с сингулярно-регулярными возмущениями (делением первого и третьего уравнений на величину ε получаем малый параметр $\varepsilon^{-1} = \mu$ перед соответствующими производными). Нетрудно привести эту систему к специальному виду [17] и тем самым показать, что она имеет единственное и устойчивое интегральное многообразие M_μ , асимптотически близкое к многообразию M_0 . Таким образом вопрос о существовании и устойчивости синхронизации считаем решенным.

Как и в предыдущем случае, ищем параметрическое представление многообразия M_μ в виде степенных рядов по малому параметру вида

$$\begin{aligned}X_1 &= X + \mu X_{11}(X, Y) + \mu^2 X_{12}(X, Y) + \dots; \\ Y_1 &= Y + \mu Y_{11}(X, Y) + \mu^2 Y_{12}(X, Y) + \dots; \\ X_2 &= X + \mu X_{21}(X, Y) + \mu^2 X_{22}(X, Y) + \dots; \\ Y_2 &= Y + \mu Y_{21}(X, Y) + \mu^2 Y_{22}(X, Y) + \dots.\end{aligned}\quad (12)$$

Предполагаем, что динамическая система на многообразии имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X, Y) + \mu F_*(X, Y) + \mu^2 F_{**}(X, Y) + \dots; \\ \dot{Y} &= \Phi(X, Y) + \mu \Phi_*(X, Y) + \mu^2 \Phi_{**}(X, Y) + \dots.\end{aligned}\quad (13)$$

Подставляя выражения (12) в систему (11), раскладывая функции в степенные ряды и приравнивая члены одинаковых порядков, получаем уравнения, определяющие функции в правых частях уравнений системы (13) и функции замены (12). В частности, системы уравнений первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned}F + \mu F_* + \mu \dot{X}_{11} &= F_1 + \mu \left(\frac{\partial F_1}{\partial X} X_{11} + \frac{\partial F_1}{\partial Y} Y_{11} \right) - C(X_{11} - X_{21}); \\ F + \mu F_* + \mu \dot{X}_{21} &= F_2 + \mu \left(\frac{\partial F_2}{\partial X} X_{21} + \frac{\partial F_2}{\partial Y} Y_{21} \right) + C(X_{11} - X_{21});\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\Phi_* + \dot{Y}_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{11} - D(Y_{11} - Y_{21}) + \Phi_1^*; \\ \Phi_* + \dot{Y}_{21} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{21} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{21} + D(Y_{11} - Y_{21}) + \Phi_2^*.\end{aligned}\quad (15)$$

Складывая уравнения системы (14) и выбирая функции F, F_* в виде

$$\begin{aligned}F &= (F_1 + F_2) / 2 + C(X_{11} + X_{21}); \\ F_* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial X} X_{11} + \frac{\partial F_2}{\partial X} X_{21} + \frac{\partial F_1}{\partial Y} Y_{11} + \frac{\partial F_2}{\partial Y} Y_{21} \right),\end{aligned}$$

получаем уравнение

$$\mu (X_{11} + X_{21})' = -2C(X_{11} + X_{21}).$$

Очевидно, что его решение $X_{11} + X_{21} = 0$ является устойчивым (матрица C — невырожденная). С учетом этого решения после сложения уравнений системы (15) выбираем функцию Φ_* в виде $\Phi_* = (\Phi_1^* + \Phi_2^*) / 2 + D(Y_{11} + Y_{21})$. В результате такого выбора получаем уравнение $(Y_{11} + Y_{21})' = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} (Y_{11} + Y_{21}) - 2D(Y_{11} + Y_{21})$, тривиальное решение которого $Y_{11} + Y_{21} = 0$ может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Рассмотрим два случая.

1. Матрица $\frac{\partial \Phi}{\partial Y}$ является устойчивой. В этом случае тривиальное решение $Y_{11} + Y_{21} = 0$ является устойчивым при любой из числа возможных матриц D , в том числе и $D = 0$, т.е. диссипативные связи по соответствующим переменным не имеют решающего значения для обеспечения режима синхронизации.

2. Матрица $D = 0$, тривиальное решение является неустойчивым. В таком случае, очевидно, всегда найдется такая матрица D (конструкция связей), при которой упомянутое решение будет устойчивым.

Будем считать, что условие устойчивости выполнено. При условии $X_{11} + X_{21} = 0, Y_{11} + Y_{21} = 0$ уравнения для искомым функций имеют вид

$$\begin{aligned}\mu \dot{X}_{11} &= \frac{1}{2} (F_1 - F_2) - 2CX_{11} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial (F_1 - F_2)}{\partial X} X_{11} + \frac{\partial (F_1 - F_2)}{\partial Y} Y_{11} \right); \\ \dot{Y}_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{11} - 2DY_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{11} + \frac{1}{2} (\Phi_1^* - \Phi_2^*).\end{aligned}\quad (16)$$

Как сингулярно возмущенное, первое уравнение системы (16) имеет устойчивую интегральную поверхность медленных движений, которая в нулевом приближении записывается следующим образом:

$X_{11} = C^{-1}(F_1 - F_2)/4$. Учитывая данное решение, для нахождения функции Y_{11} решаем второе уравнение системы или соответствующее ему уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial Y_{11}}{\partial X} F + \frac{\partial Y_{11}}{\partial Y} \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{11} + 2DY_{11} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{11} + (\Phi_1^* - \Phi_2^*)/2.$$

Таким образом, в режиме устойчивой синхронизации фазовые переменные осцилляторов связаны (с точностью μ^2) параметрическими уравнениями вида

$$X_1 = X + \mu C^{-1}(F_1(X, Y) - F_2(X, Y))/4; \quad Y_1 = Y + \mu Y_{11};$$

$$X_2 = X - \mu C^{-1}(F_1(X, Y) - F_2(X, Y))/4; \quad Y_2 = Y - \mu Y_{11}.$$

При этом свойства синхронного режима с точностью μ^2 определяются свойствами хаотического аттрактора A_μ динамической системы вида

$$\dot{X} = (F_1(X, Y) + F_2(X, Y))/2 + \mu F_*;$$

$$\dot{Y} = (\Phi_1 + \Phi_2)/2.$$

Отметим, что если $F_1 \equiv F_2 = F$, $\Phi_1 \equiv \Phi_2 = \Phi$, то $F_* = 0$ и решения $X_{11} = X_{21} = 0$, $Y_{11} = Y_{21} = 0$ являются устойчивыми, т.е. имеется переход к тождественному режиму синхронизации.

Пример 1. Рассмотрим синхронизацию в связанной системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1(-f(x_1) + \mathbf{a}^T \mathbf{y}_1) + \varepsilon(x_2 - x_1); \\ \dot{y}_1 &= \mathbf{B} \mathbf{y}_1 + \mathbf{b} x_1; \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2(-f(x_2) + \mathbf{a}^T \mathbf{y}_2) - \varepsilon(x_2 - x_1); \\ \dot{y}_2 &= \mathbf{B} \mathbf{y}_2 + \mathbf{b} x_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $x_{1,2} \in R^1$, $\mathbf{y}_{1,2} \in R^{m-1}$, $f: R^1 \rightarrow R^1$, \mathbf{B} — устойчивая постоянная матрица размера $(m-1) \times (m-1)$, \mathbf{a} , \mathbf{b} — постоянные векторы соответствующей размерности, $\alpha_{1,2}$ — положительные параметры.

Каждая индивидуальная динамическая система в системе (17) представляет обобщенную модель Лурье. Допустим, что параметры α_1 и α_2 сильно различаются. В таком случае значение параметра связи ε должно быть достаточно велико: $\varepsilon^{-1} = \mu$ — малый параметр. Имеет место рассмотренный выше случай. Следовательно, динамическая система, аттрактор которой A_μ определяет свойства синхронного режима, имеет следующий вид:

$$\dot{x} = F(x, \mathbf{y}) + \mu F_*;$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{b} x; \quad F(x, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(-f(x) + \mathbf{a}^T \mathbf{y}).$$

Соответственно, для функции X_{11} имеем следующее выражение: $X_{11} = \frac{1}{4} (F_1 - F_2) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} F = \Delta F = \Delta \dot{x}$. Покажем, что такое же выражение имеет и функция Y_{11} , т.е. $Y_{11} = \Delta \dot{y}$. Действительно, принимая во внимание, что $\Phi = By + bx$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = B$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = b$, $\Phi_1^* = \Phi_2^* = 0$, и подставляя выражение $Y_{11} = \Delta \dot{y}$ во второе уравнение системы (16), получаем уравнение вида $\Delta \dot{y} = \Delta B \dot{y} + \Delta b \dot{x}$, или $\dot{y} = B \dot{y} + b \dot{x}$, что является вторым уравнением системы (17).

Таким образом, в данном случае имеет место фазовая синхронизация хаотических колебаний осцилляторов с разностью фаз, равной $\phi_0 = (\alpha_1 - \alpha_2) / \varepsilon (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Пример 2. Рассмотрим синхронизацию хаотических автоколебаний двух осцилляторов Чуа (численный эксперимент). Связанная динамическая система представляется уравнениями вида

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 (y_1 - h(x_1)) - \varepsilon (x_1 - x_2);$$

$$\dot{y}_1 = x_1 - y_1 + z_1;$$

$$\dot{z}_1 = -\beta y_1 - \gamma z_1;$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_2 (y_2 - h(x_2)) + \varepsilon (x_1 - x_2);$$

$$\dot{y}_2 = x_2 - y_2 + z_2;$$

$$\dot{z}_2 = -\beta y_2 - \gamma z_2,$$

где $h(x) = m_1 x + \frac{1}{2} (m_2 - m_1) (|x + 1| - |x - 1|)$.

Численный эксперимент проводился при следующих значениях параметров: $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, m_2, m_1, \varepsilon\} = \left\{ 14; 4; 14; 0, 1; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}, 2 \right\}$. Проекции аттрактора A_μ на координатные плоскости осцилляторов и реализации соответственных переменных, иллюстрирующие фазовый сдвиг приведены на рис. 1. Заметим, в проводимом эксперименте параметр $\mu = \varepsilon^{-1} = 1/2$ не является малым. Однако остается в силе полученный вывод о свойствах синхронизации (известное “чудо” малого параметра), а также то, что аттрактор A_μ связанной системы по своим свойствам близок к аттрактору одиночного осциллятора с параметром $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 = 9$. Отметим также, что данная система не является гладкой, однако результаты теории остаются в силе.

Принудительная хаотическая синхронизация неидентичных осцилляторов. Принудительная синхронизация более проста для асимптотического исследования. В этом случае динамическая система на интегральном многообразии является заданной (динамическая

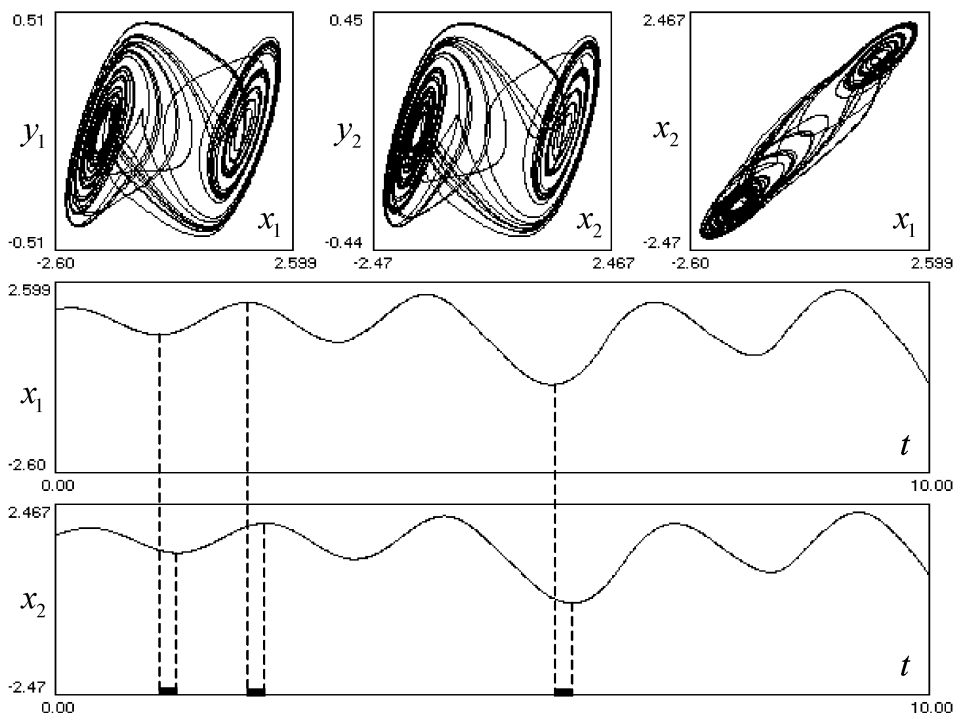


Рис.1. Проекция аттрактора A_μ на координатные плоскости осцилляторов и отрезки одноименных реализаций, иллюстрирующие фазовый сдвиг $\phi_0 = (\alpha_1 - \alpha_2)/\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2)$

система ведущего осциллятора). Задача заключается в поиске асимптотического представления многообразия, которое определяет связь переменных в режиме синхронизации.

Слабо неидентичные системы. Рассматриваем связанную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X); \\ \dot{X}_1 &= F(X_1) - \varepsilon C(X_1 - X) + \mu F_1^*(X_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Представление многообразия степенным рядом по малому параметру μ имеет вид

$$X_1 = X + \mu X_{11}(X) + \mu^2 X_{12}(X) + \dots$$

Проводя с рядом те же процедуры, что и в случае взаимной синхронизации, получаем уравнения, определяющие функции X_{1j} . В частности, для функции первого приближения получаем уравнение

$$\dot{X}_{11} = \frac{\partial F}{\partial X} X_{11} - \varepsilon C X_{11} + F_1^*(X). \quad (19)$$

Уравнение в частных производных, соответствующее уравнению (19), имеет вид

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial X} F - \frac{\partial F}{\partial X} X_{11} + \varepsilon C X_{11} = F_1^*(X). \quad (20)$$

Отметим, что при значении $\varepsilon = 0$ соответствующее уравнению (19) однородное уравнение является уравнением в вариациях относительно решения, представляющего некоторую траекторию хаотического аттрактора ведущего осциллятора. Пусть $\lambda_{\max} > 0$ — максимальный ляпуновский показатель решений этого уравнения. В таком случае всегда найдется такая ненулевая матрица C , что при выполнении неравенства $\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda_{\max})$ соответствующее уравнению (19) однородное уравнение будет устойчивым, т.е. любое решение уравнения (19) является ограниченным. Пороговое значения ε^* зависит, в том числе, и от структуры связи осцилляторов. Его измеряют экспериментально или вычисляют. Заметим, что если $C = I$, то $\varepsilon^* = \lambda_{\max}$. При заданном векторе возмущений $F_1^*(X)$ функцию X_{11} находят, решая уравнение (20). В частности, если $F_1^*(X) = \nu F$, то $X_{11} = \Delta F(X)$ является решением уравнения (20), где ν и Δ — некоторые числа.

Сильно неидентичные системы, содержащие сильные связи. Допустим, что k уравнений ведомого осциллятора содержат сильную связь, а $m - k$ уравнений содержат умеренную связь или вовсе не содержат таковой. Объединяя соответствующие уравнения в группы, рассматриваем связанную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, Y); \\ \dot{Y} &= \Phi(X, Y); \\ \dot{X}_1 &= F_1(X_1, Y_1) - \varepsilon C(X_1 - X); \\ \dot{Y}_1 &= \Phi(X_1, Y_1) - D(Y_1 - Y) + \mu \Phi_1^*(X_1, Y_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $X_{1,2} \in R^k$, $Y_{1,2} \in R^{m-k}$; $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k)$, $c_i > 0$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{m-k})$, $d_j \geq 0$; $\varepsilon^{-1} = \mu$ — малый параметр.

Как и в случае взаимной синхронизации, ищем представление многообразия M_μ в виде степенных рядов по малому параметру вида

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \mu X_{11}(X, Y) + \mu^2 X_{12}(X, Y) + \dots; \\ Y_1 &= Y + \mu Y_{11}(X, Y) + \mu^2 Y_{12}(X, Y) + \dots. \end{aligned}$$

Проводя процедуру со степенными рядами, для функций первого

приближения получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mu \dot{X}_{11} &= F_1 - F_2 - CX_{11} + \mu \left(\frac{\partial F_1}{\partial X} X_{11} + \frac{\partial F_1}{\partial Y} Y_{11} \right); \\ \dot{Y}_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{11} - DY_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{11} + \Phi_1^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Первое уравнение системы (22) как сингулярно-возмущенное уравнение имеет устойчивую интегральную поверхность медленных движений, которая в нулевом приближении имеет следующий вид: $X_{11} = C^{-1}(F_1 - F)$. Учитывая данное решение, для нахождения функции Y_{11} решаем второе уравнение системы или соответствующее ему уравнение в частных производных

$$\frac{\partial Y_{11}}{\partial X} F + \frac{\partial Y_{11}}{\partial Y} \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} Y_{11} + DY_{11} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} X_{11} + \Phi_1^*.$$

Таким образом, в режиме устойчивой принудительной синхронизации фазовые переменные ведущего и ведомого осцилляторов связаны (точность μ^2) уравнениями

$$X_1 = X + \mu C^{-1}(F_1(X, Y) - F_2(X, Y)); \quad Y_1 = Y + \mu Y_{11},$$

где $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ — решение, соответствующее некоторой траектории хаотического аттрактора ведущего осциллятора.

Замечание 2. Об асимптотической теории синхронизации систем с медленно изменяющимися параметрами. Допустим, что $X_{11} = X_{11}(X(t), a)$ — некоторое решение соответствующего уравнения для функции первого приближения, где a — некоторый постоянный вектор параметров. Допустим теперь, что $a = a(\eta)$ — гладкая функция, $\dot{\eta} = \mu$, где μ — малый параметр. При этом условии $a(\mu t)$ — медленно изменяющийся параметр. В таком случае выражение для производной решения имеет вид $\dot{X}_{11} = \frac{\partial X_{11}}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial X_{11}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \eta} \mu$. Допустим,

что $\left\| \mu \frac{\partial X_{11}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right\| < \mu K$ (в силу предположения о гладкости правых

частей уравнений осцилляторов по параметрам, частные производные решений уравнений для функций X_{ij} , Y_{ij} по соответствующим па-

раметрам ограничены [22]). При этом условии выражение $\mu \frac{\partial X_{11}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \eta}$

должно быть отнесено к приближению μ^2 , т.е. в случае медленно изменяющихся параметров, уравнения, определяющие функции первого приближения, являются теми же самыми, что и в случае постоянных параметров. Это значит, что выводы теории, изложенные для систем с постоянными параметрами, переносятся на случай систем с медленно изменяющимися параметрами с соответствующей интерпретацией результатов.

Замечание 3. О формировании сигналов с заданным законом модуляции хаотической несущей. Пусть имеется некоторый осциллятор (автогенератор) с хаотической динамикой. Сформулируем следующую задачу: какие параметры осциллятора следует модулировать так, чтобы хаотические колебания осциллятора имели заданный закон модуляции относительно хаотических колебаний невозмущенного осциллятора. Переформулируем эту задачу на “языке” синхронизации: пусть имеется связанная система вида

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X) + \mu f(X, \eta); \\ \dot{X}_1 &= F(X_1) - \varepsilon C(X_1 - X); \\ \dot{\eta} &= \mu.\end{aligned}\quad (23)$$

Здесь μ — малый параметр, $f(X, \eta)$ — функция с медленно изменяющимися параметрами — модулятор.

Требуется определить модулятор $f(X, \eta)$ и матрицу C таким образом, чтобы в режиме принудительной синхронизации была обеспечена заданная временная связь переменных ведущего и ведомого осцилляторов.

Задачу решаем следующим образом.

1. Задаем связь переменных X_1 и X в виде степенного ряда

$$X_1 = X + \mu X_{11}(X, \eta) + \mu^2 X_{12}(X, \eta) + \dots$$

2. Подставляем этот ряд во второе уравнение системы (23). Проводя разложение функций и учитывая вид первого уравнения системы, получаем следующее уравнение для функции первого приближения:

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial X} F - \frac{\partial F}{\partial X} X_{11} + \varepsilon C X_{11} = -f(X, \eta). \quad (24)$$

Поскольку функция X_{11} является заданной, то уравнение (24) определяет искомый модулятор.

Например, пусть вектор-функция X_{11} имеет вид $X_{11} = \alpha X + \Delta \dot{X}$, где $\alpha(\mu t)$ — некоторая диагональная матрица, $\Delta(\mu t)$ — скалярная функция. Этот случай с точностью μ^2 соответствует амплитудно-фазовой модуляции хаотической несущей ведущего осциллятора. В режиме синхронизации с точностью μ^2 имеет место равенство $X_1 = (I + \mu \alpha(\mu t)) X(t + \mu \Delta(\mu t))$. Если $\Delta(\mu t) = 0$, то имеет место амплитудная модуляция, а если $\alpha(\mu t) = 0$, то фазовая.

Пример 3. Определим модулятор, задающий фазовую модуляцию хаотических колебаний осциллятора Лоренца.

Подставляя решение $X_{11} = \Delta \dot{X} = \Delta F$ в уравнение (24), получаем

уравнение, определяющее модулятор,

$$\varepsilon \Delta \begin{pmatrix} -c_1 \sigma (x - y) \\ c_2 (-y + rx - xz) \\ c_3 (-bz + xy) \end{pmatrix} = f(\mathbf{X}, \eta).$$

Из условия простоты модулятора и минимальности числа связей определяем элементы матрицы \mathbf{C} : $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. В результате получаем вектор $f(\mathbf{X}, \mu t) = (-\varepsilon \Delta(\mu t) \sigma(x - y), 0, 0)^T$. Осциллятор Лоренца с фазовой модуляцией хаотической несущей имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1 + \mu \varepsilon \Delta(\mu t)) \sigma(x - y); \\ \dot{y} &= -y + rx - xz; \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \quad (25)$$

Информационный сигнал $\Delta(\mu t)$ может быть любой ограниченной гладкой функцией. Возможно, что данный сигнал сам может быть реализацией случайного процесса.

На рис. 2 приведена элементарная блок-схема передачи информации при непосредственной синхронизации автогенераторов с фазовым детектированием полезного сигнала. На рис. 3 приведены результаты численного эксперимента, проведенного по схеме рис. 2. Ведущим автогенератором является осциллятор Лоренца (25), модулированный периодическим сигналом $\Delta(\mu t) = A \sin \mu \omega t$. Параметры системы Лоренца: $\sigma = 10$, $r = 27$, $b = 8/3$. Подстраиваемым автогенератором является невозмущенный осциллятор Лоренца с теми же параметрами. Связь осцилляторов осуществляется согласно уравнениям (23) с матрицей $\mathbf{C} = \text{diag}(1, 0, 0)$. Фильтр является резонансным. На рис. 3, а проиллюстрирован режим биений автогенераторов, параметр связи $\varepsilon = 0,5$ мал и, тем самым, подстраиваемый автогенератор находится вне полосы удержания синхронизации. На плоскости $(\Delta, \varphi(\Delta))$

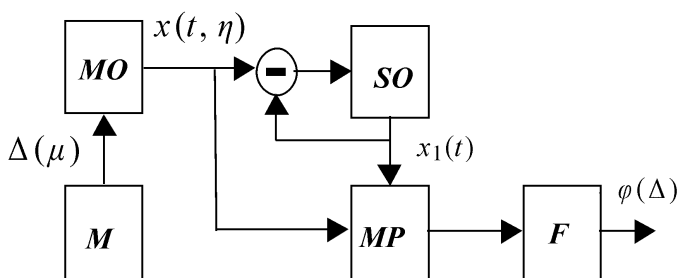


Рис. 2. Блок-схема передачи информации:

MO – ведущий автогенератор; SO – подстраиваемый автогенератор; M – модулятор; MP – умножающее устройство; F – фильтр

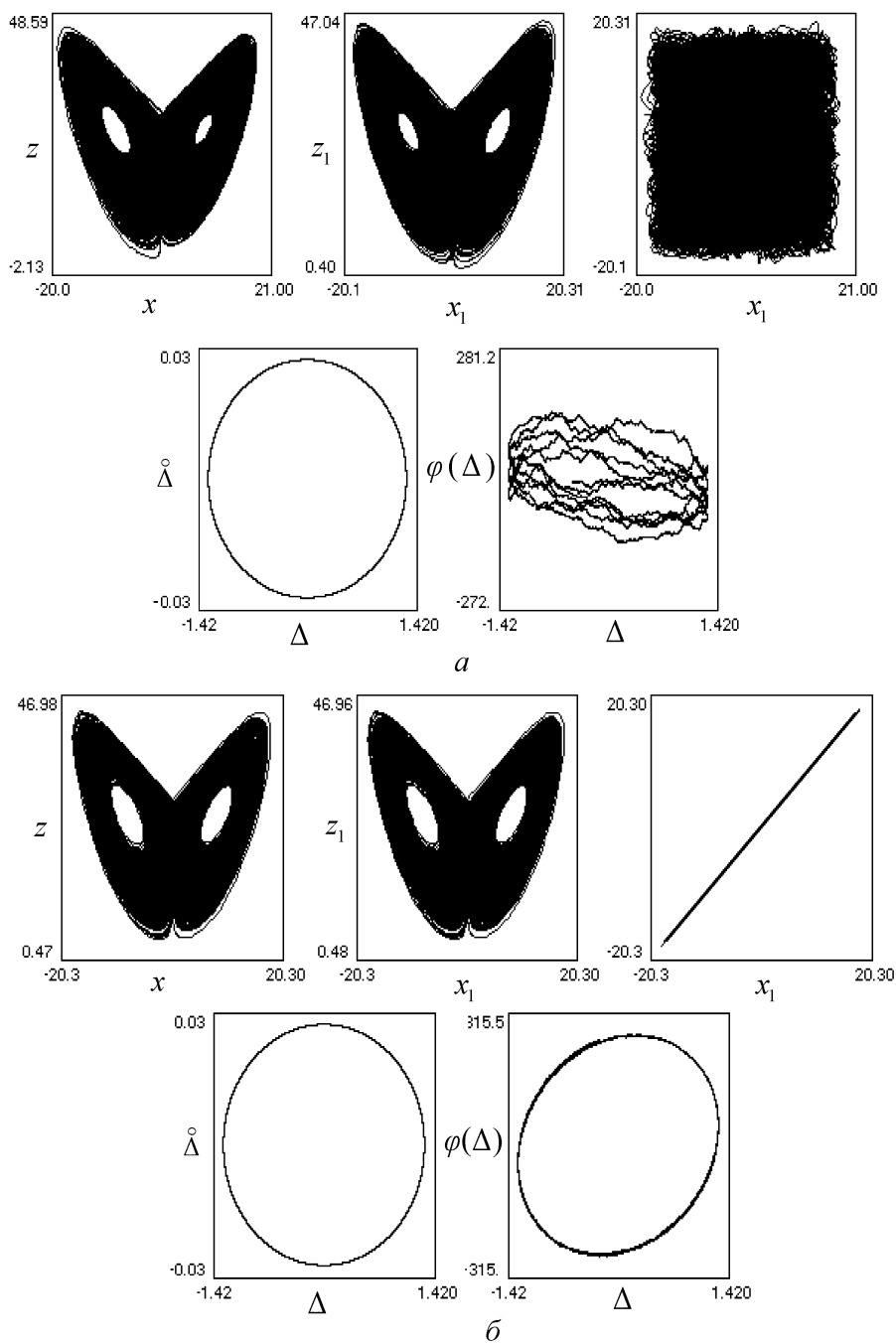


Рис. 3. Динамика системы вне полосы удержания (а) и в режиме захвата синхронизации (б)

наблюдается хаотическое движение. На рис. 3, б проиллюстрирован режим захвата синхронизации хаотических колебаний осцилляторов ($\varepsilon = 10$). Полоса на плоскости (x_1, x) , ширина которой $\approx \mu$, является проекцией многообразия M_μ на эту плоскость. На плоскости

$(\Delta, \varphi(\Delta))$ наблюдается периодическое движение с периодом сигнала модуляции.

Предложенная теория может быть распространена на исследование синхронизации в неоднородных решеточных системах осцилляторов [23], в том числе и кластерной синхронизации.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-08-00520.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yamada T. & Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II – The mapping approach // Prog. Theor. Phys. – 1983. – No 70. – P. 1240–1248.
2. Afraimovich V. S., Verichev N. N., & Rabinovich M. I. Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems // Radiophys. Quantum Electron. – 1986. – No 29. – P. 795–803.
3. В е р и ч е в Н. Н. Взаимная синхронизация стохастических автоколебаний систем Лоренца. Методы качественной теории дифференциальных уравнений // Межвуз. тематич. сб. научн. тр. / Под ред. Е.А.Леонтович-Андроновой. – Горький, 1986. – С. 47–57.
4. Pecora L. M. & Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. – 1990. – No 64. – P. 821–824.
5. Dmitriev A. S., Panas A. I. & Starkov S. O. Experiments on speech and music signal transmission using chaos // Int. J. of Bif. and Chaos. – 1995. – Vol. 5. – No. 4. – P. 1249–1254.
6. Pecora L. M., Carroll T. L., Johnson G. A., Mar D. J., Heagy J. F. Fundamentals of synchronization in chaotic systems. Concepts and applications // Int. J. of Bif. and Chaos. – 1997. – Vol. 7. – No 4. – P. 520.
7. Rulkov N. F., Volkovskii A. R., Rodriguez-Lozano A., Del Rio E. & Velarde M. G. Mutual synchronization of chaotic self-oscillators with dissipative coupling. // Int. J. of Bif. and Chaos. – 1992. – No 2. – P. 669–676.
8. Chua L. O., Itoh M., Kocarev L. & Eckert K. Chaos synchronization in Chua's circuit // J. Circuits Syst. Comput. – 1993. – No 3(1). – P. 93–108.
9. Watanabe S., vander Zant H. S. J., Strogatz S. H. & Orlando T. P. Dynamics of circular arrays of Josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation // Physica D. – 1996. – No 97. – P. 429–470.
10. Belykh I., Verichev N. Global synchronization and strange attractors in coupled superconducting junctions // Proceedings of the Int. Conference NDES-97 (Nonlinear Dynamics of Electronic Systems), Moscow, 1997. – P. 145–149.
11. Hasler M., Schimming T. Chaos communication over noisy channels // Int. J. of Bif. and Chaos. – 2000. – No 10. – p. 719–736.
12. Kaneko K. Relevance of Clustering to Biological Networks // Physica D. – 1994. – No 75. – p. 55–73.
13. Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky & Jürgen Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. – 1997. – No 78. – P. 4193–4196.
14. В е р и ч е в Н. Н., М а к с и м о в А. Г. О синхронизации стохастических колебаний параметрически возбуждаемых нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. – 1989. – № 32(8). – С. 962–965.
15. Rulkov N. F., Afraimovich V. S., Lewis C. T., Chazottes J.-R. & Cordonet A. Multi-valued mappings in generalized chaos synchronization // Phys. Rev. E. – 2001. – No 64, 016217.

16. Б е л ы х В. Н., В е р и ч е в Н. Н. Пространственно однородные процессы – глобальная синхронизация в системах с переносом и диффузией // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. – Т. XXXIX. – № 5.
17. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Л ы к о в а О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973.
19. Д ж . Х е й л . Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966.
20. П л и с с В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977.
21. С и с т е м ы фазовой синхронизации / В.Н. Акимов, Л.Н. Белюстина и др.; Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. – М.: Радио и связь, 1982. – 288 с.
22. П о н т р я г и н Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
23. V e r i c h e v N. On a theory of stochastic synchronization of dissipative dynamic systems // Proc. of Int. conference Progress in Nonlinear Science. – Nizhny Novgorod, 2001.

Статья поступила в редакцию 16.04.2007

Николай Николаевич Веричев – канд. физ.-мат. наук, доцент НФ ИМАШ РАН.

N.N. Verichev – Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of Novosibirsk Branch of the Institute for Mechanical Engineering of RAS.

Станислав Николаевич Веричев – канд. физ.-мат. наук, сотрудник технологической компания Шлюмберже, г. Тюмень.

S.N. Verichev – Ph. D. (Phys.-Math.), member of technological company Schlumberge (city Tyumen’).

**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
в 2007 г. вышла в свет книга**

Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 664 с.

Решение задач исследования, синтеза регуляторов и оптимизации САУ, поведение которых описывается системами нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами высокого порядка, предполагает реализацию следующих этапов: построение адекватной математической модели, разработка методов, построение алгоритмов и их программная реализация.

Авторы стремились избегать громоздких и строгих процедур, а основное внимание уделено описанию идей и конструктивным подходам к их применению. Поэтому книга содержит большое число иллюстраций и технических приложений и ориентирована, в первую очередь, для применения инженерами-проектировщиками, создающими сложные автоматические системы.

По вопросам приобретения обращаться по тел. 263-60-45;
e-mail: press@bmstu.ru