УДК 536.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ. Ч. 2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г.Н. Кувыркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru

Современные конструкционные и функциональные материалы, представляющие собой совокупность микро- и наноструктурных элементов, называют структурно-чувствительными материалами. Общая методология построения математических моделей, позволяющих описать поведение этих материалов в широком диапазоне изменения внешних воздействий, еще далека от завершения. В настоящей работе рассмотрена математическая модель теплопроводности структурно-чувствительных материалов, учитывающая временны́е эффекты при аккумуляции и распространении теплоты и деформировании. Для вывода уравнения теплопроводности использованы соотношения рациональной термодинамики необратимых процессов с внутренними параметрами состояния. Предложенное уравнение теплопроводности при принятых допущениях относительно структуры материала открывает широкие возможности детального анализа процессов термического деформирования материалов в ряде практически важных случаев.

Ключевые слова: нелокальная среда, внутренние параметры состояния, уравнение теплопроводности.

MATHEMATICAL MODEL OF NONLOCAL THERMAL VISCOELASTIC MEDIUM. PART 2. HEAT EQUATION

G.N. Kuvyrkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru

Modern structural and functional materials presenting an aggregate of micro- and nanostructured elements are named structure-sensitive materials. A general methodology for construction of mathematical models allowing the behavior of these materials to be described in a wide range of change in environmental exposure effects is still far from being complete. A mathematical model of heat conduction of structure-sensitive materials is considered which takes into account temporal effects during the heat accumulation and emission and while deforming. For deducing the heat equation, relationships of rational thermodynamics of irreversible processes with internal state parameters are used. The proposed equation of heat conduction with the assumptions relative to material structure opens broad possibilities of the detailed analysis of thermal deforming of materials in some practically important cases.

Keywords: nonlocal continuum, internal state parameters, heat conduction equation.

Важным этапом в создании и использовании современных конструкционных и функциональных материалов, представляющих собой совокупность микро- и наноструктурных элементов и называемых структурно-чувствительными, является построение математических моделей теплопроводности и деформирования этих материалов. В работе [1] на основе соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов для среды с внутренними параметрами состояния получены соотношения для массовой плотности энтропии

$$h = \frac{1}{\rho} \int\limits_V C_{jikl} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{\partial e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x})}{\partial T} e_{ij}(\boldsymbol{x}') dV(\boldsymbol{x}') - B_0(\kappa), \qquad (1)$$

где ρ — плотность среды; C_{jikl} — компоненты тензора коэффициентов упругости; $C_{jikl} = C_{klji}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)$ — функция влияния, определяющая эффект пространственной “памяти”, причем

$$\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) dV(\boldsymbol{x}') = 1,$$

а также $\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \neq 0$ только при $(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \in V(\boldsymbol{x}')$; e_{ij}, $e_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензоров микродеформации и температурной микродеформации, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + e_{ijk}(\omega_k - \varphi_k)$, $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, u_i — проекции вектора перемещения на оси $O\mathrm{x}_i$ прямоугольной системы координат; x_i — декартовы координаты; e_{ijk} — символы Леви-Чивиты; $\omega_k = e_{kmn}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_m} - \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)$; φ_k — проекции векторов линейного поворота и микроповорота; $m, n = 1, 2, 3$; $B_0(\kappa)$ — часть массовой плотности энтропии h, зависящая только от изменения термодинамической температуры κ.

Положим, что в материале определяющим является только один, фононный, механизм теплопроводности. Тогда кинетические уравнения, описывающие изменение $\boldsymbol{\kappa}$ — вектора, характеризующего процесс распространения теплоты, и κ — термодинамической температуры, ассоциированной с локально неравновесным процессом аккумуляции теплоты, можно представить в виде

$$t_q^* \dot{\kappa}_i + A_{ij}\kappa_j = \bar{\kappa}_i, \quad t_T^* \dot{\kappa} + A_{44}\kappa = \bar{\kappa}, \qquad (2)$$

где $(\dot{\ }) = \dfrac{\partial(\ )}{\partial t}$, t — время; κ_i — проекции вектора $\boldsymbol{\kappa}$ по оси $O\mathrm{x}_i$ прямоугольной системы координат; t_q^*, t_T^* — времена релаксации κ_i и κ соответственно; $\bar{\kappa}_i$, $\bar{\kappa}$ — равновесные значения этих же параметров.

Для получения уравнения закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности необходимо конкретизировать выражения для равновесных значений $\bar{\kappa}_i$ и $\bar{\kappa}$ параметров состояния и проекций вектора плотности теплового потока q_i, приняв их, например, в виде

$$\bar{\kappa}_i = -\int\limits_V Z_{ij}^{(1)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j'} dV(\boldsymbol{x}') - \int\limits_V Z_{ij}^{(2)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j'} dV(\boldsymbol{x}'),$$

$$\bar{\kappa} = \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) T(\boldsymbol{x}', t) dV(\boldsymbol{x}'), \; q_i = \int\limits_V \varphi_{ij} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \kappa_j(\boldsymbol{x}', t) dV(\boldsymbol{x}'), \tag{3}$$

где T — абсолютная температура.

Равенства (3) не противоречат основным принципам рациональной термодинамики необратимых процессов [2].

Решив систему уравнений (2) относительно κ_i и κ с начальными условиями ($\kappa_i = 0$ и $\kappa = T_0$ при $t = 0$), получим функциональные зависимости для $\kappa_i = \kappa_i \left(\dfrac{\partial T}{\partial x_j}, \dfrac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right)$ и $\kappa = \kappa(T)$.

В дальнейшем, в целях упрощения окончательного выражения уравнения теплопроводности, положим в первом уравнении (2) $A_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), $A_{44} = \mathrm{const}$.

Тогда

$$\kappa_i(\boldsymbol{x}, t) = -\int\limits_V Z_{ij}^{(1)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j'} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_q^*} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t')}{\partial x_j'} \right) dt' \right) dV(\boldsymbol{x}') -$$

$$- \int\limits_V Z_{ij}^{(2)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \left(\frac{\partial \kappa(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j'} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_q^*} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \kappa(\boldsymbol{x}', t')}{\partial x_j'} \right) dt' \right) dV(\boldsymbol{x}'), \tag{4}$$

$$\kappa(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{A_{44}} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \left(T(\boldsymbol{x}', t) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_T^*/A_{44}} \right) \frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t')}{\partial t'} dt' \right) dV(\boldsymbol{x}') -$$

$$- \left(\frac{1 - A_{44}}{A_{44}} \right) T_0 \exp\left(-\frac{t}{t_T^*/A_{44}} \right), \; \kappa(\boldsymbol{x}, 0) = T_0 = \mathrm{const},$$

а закон сохранения энергии

$$\rho T\dot{h} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V + \delta_D,$$

где q_V — объемная плотность мощности источников (стоков) теплоты, δ_D — диссипативная функция, с учетом (1) и последнего равенства из (3) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\rho c_\varepsilon \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \\
&= -T\int\limits_V dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V C_{jikl}\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}')}{\partial T}\frac{\partial e_{ij}(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial t}dV(\boldsymbol{x}'')+ \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V \lambda_{ij}^{(T)}\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}-\right. \\
&\quad \left. - \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x}'',t')}{\partial x_j''}\right)dt'\right)dV(\boldsymbol{x}'')+ \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V \lambda_{ij}^{(\kappa)}\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\left(\frac{\partial \kappa(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}-\right. \\
&\quad \left. - \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \kappa(\boldsymbol{x}'',t')}{\partial x_j''}\right)dt'\right)dV(\boldsymbol{x}'') + \delta_D + q_V. \qquad (5)
\end{aligned}$$

В (5) $c_\varepsilon = -T\dfrac{dB_0}{d\kappa}$ — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации, характеризующая аккумуляцию теплоты при изменении абсолютной и термодинамической температур; $\lambda_{ij}^{(T)} = \varphi_{ik}Z_{kj}^{(1)}$, $\lambda_{ij}^{(\kappa)} = \varphi_{ik}Z_{kj}^{(2)}$ — компоненты тензоров теплопроводности, обусловленные абсолютной и термодинамической температурами.

Краевые условия для получения однозначного решения системы уравнений (5) и второго из (4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
t = 0 \quad & T(\boldsymbol{x},0) = \kappa(\boldsymbol{x},0) = T_0, \\
& \dot{T}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \dot{\kappa}(\boldsymbol{x},0) = -(1-A_{44})T_0/t_T^*,
\end{aligned}$$

на граничной поверхности S

$$\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dV(\boldsymbol{x}')\int\limits_V\left(\lambda_{ij}^{(T)}\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}-\right.\right.$$

$$
-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x}'',t')}{\partial x_j''}\right)dt'\Biggr)+\lambda_{ij}^{(\kappa)}\varphi(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|)\left(\frac{\partial\kappa(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}-\right.
$$

$$
\left.-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\kappa(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}\right)dt'\right)\Biggr)\,dV(\boldsymbol{x}'')n_i(\boldsymbol{x},t)=
$$

$$
=\alpha(\boldsymbol{x},t)\bigl(T_c(\boldsymbol{x},t)-T(\boldsymbol{x},t)\bigr),\quad (6)
$$

$$
\frac{\partial\kappa}{\partial x_j}=\frac{1}{A_{44}}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\left(T(\boldsymbol{x}',t)-\right.
$$

$$
\left.-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial T(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}dt'\right)dV(\boldsymbol{x}'),
$$

где n_i — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, ограничивающей рассматриваемую область V; α и T_c — коэффициент теплообмена и температура окружающей среды.

Совместное решение уравнения (5) и второго уравнения из (4) с соответствующими краевыми условиями дает возможность при известных свойствах материала определить как абсолютную, так и термодинамическую температуры.

При $c_\varepsilon=\text{const}$, $T\approx T_0$ и $B_0(T_0)=0$ имеем $B_0(\kappa)=c_\varepsilon(\kappa-T_0)/T_0$.

Диссипативная функция

$$
\delta_D=-\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\kappa_{ij}^{(1)}\partial\kappa_{kl}^{(1)}}\kappa_{kl}^{(1)}\dot\kappa_{ij}^{(1)}+\frac{\partial^2 A}{\partial\kappa_{ij}^{(2)}\partial\kappa_{kl}^{(2)}}\kappa_{kl}^{(2)}\dot\kappa_{ij}^{(2)}+\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial\kappa_{kl}^{(1)}}e_{ij}\dot\kappa_{kl}^{(1)}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial^2 A}{\partial\zeta_{ij}\partial\kappa_{kl}^{(2)}}\zeta_{ij}\dot\kappa_{kl}^{(2)}-H_{jikl}e_{ij}\frac{\partial e_{kl}^{(\kappa)}}{\partial\kappa}\dot\kappa\right)
$$

линейна по малым аргументам $\kappa_{kl}^{(1)}$, $\kappa_{kl}^{(2)}$, e_{ij}, ζ_{ij} и $(T-T_0)/T_0$, поэтому диссипацией энергии, как правило, пренебрегают и полагают $\delta_D=0$.

Если заменить в (4) функцию $\varphi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)$ на δ-функцию Дирака с соответствующим аргументом, то получим уравнение теплопроводности вида

$$
\frac{\rho c_\varepsilon}{t_T^*}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t')}{\partial t'}dt'=-TC_{ijkl}\frac{\partial\varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T}\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}+
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}^{(T)}\left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x},t')}{\partial t'\partial x_j}dt'\right)\right)+
$$

$$+\frac{1}{A_{44}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}^{(\kappa)}\left(\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}-\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x},t')}{\partial t'\partial x_j}dt'\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{t_T^*}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}^{(\kappa)}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\int\limits_0^{t'}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x},t'')}{\partial t''\partial x_j}dt''dt''\right)+$$

$$+\delta_D+q_V.$$

Поскольку $\max|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|\ll L$, $\max|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|\ll L$, где L — характерный размер тела, то $T(\boldsymbol{x}',t)$, $\kappa(\boldsymbol{x}',t)$, $\partial T(\boldsymbol{x}',t)/\partial x_j'$, $\partial\kappa(\boldsymbol{x}',t)/\partial x_j'$, $\partial T(\boldsymbol{x}'',t)/\partial x_j''$, $\partial\kappa(\boldsymbol{x}'',t)/\partial x_j''$ и $\partial e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}',t)/\partial T$, $\partial e_{ij}(\boldsymbol{x}'',t)/\partial t$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ соответственно:

$$\kappa(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{A_{44}}\left(T(\boldsymbol{x},t)+|x_i'-x_i|\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}|x_i'-x_i||x_j'-x_j|\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+...\right),$$

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}=\frac{\partial T(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}+|x_i''-x_i'|\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_i'\partial x_j'}+$$

$$+\frac{1}{2!}|x_k''-x_k'||x_i''-x_i'|\frac{\partial^3 T(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_k'\partial x_i'\partial x_j}+...,$$

$$\frac{\partial\kappa(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial x_j''}=\frac{\partial\kappa(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}+|x_i''-x_i'|\frac{\partial^2\kappa(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_i'\partial x_j'}+$$

$$+\frac{1}{2!}|x_k''-x_k'||x_i''-x_i'|\frac{\partial^3\kappa(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_k'\partial x_i'\partial x_j}+...,$$

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}=\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}+|x_m'-x_m|\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_m\partial x_j}+$$

$$+\frac{1}{2!}|x_n'-x_n||x_m'-x_m|\frac{\partial^3 T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n\partial x_m\partial x_j}+...,$$

$$\frac{\partial\kappa(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_j'}=\frac{\partial\kappa(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}+|x_m'-x_m|\frac{\partial^2\kappa(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_m\partial x_j}+$$

$$+\frac{1}{2!}|x_n'-x_n||x_m'-x_m|\frac{\partial^3\kappa(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n\partial x_m\partial x_j}+...,$$

$$\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x_i'\partial x_j'}=\frac{\partial^2 T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+|x_m'-x_m|\frac{\partial^3 T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_m\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\frac{1}{2!}|x'_n - x_n||x'_m - x_m|\frac{\partial^4 T(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n \partial x_m \partial x_i \partial x_j} + ...,$$

$$\frac{\partial^2 \kappa(\boldsymbol{x}',t)}{\partial x'_i \partial x'_j} = \frac{\partial^2 \kappa(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} + |x'_m - x_m|\frac{\partial^3 \kappa(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_m \partial x_i \partial x_j} +$$

$$+\frac{1}{2!}|x'_n - x_n||x'_m - x_m|\frac{\partial^4 \kappa(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n \partial x_m \partial x_i \partial x_j} + ...,$$

$$\frac{\partial e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}',t)}{\partial T} = \frac{\partial e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial T} + |x'_i - x_i|\frac{\partial^2 e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial T} +$$

$$+\frac{1}{2!}|x'_j - x_j||x'_i - x_i|\frac{\partial^3 e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j \partial x_i \partial T} + ...,$$

$$\frac{\partial e_{ij}(\boldsymbol{x}'',t)}{\partial t} = \frac{\partial e_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + |x''_m - x'_m|\frac{\partial^2 e_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_m \partial t} +$$

$$+\frac{1}{2!}|x''_n - x'_n||x''_m - x'_m|\frac{\partial^3 e_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n \partial x_m \partial t} + ...$$

и т.д. Подставив (6) во второе уравнение из (4) и (5) и проведя интегрирование по объему, получим систему уравнений, описывающих процесс теплопроводности в твердом теле с микро- и наноструктурой, уже не содержащих интегралы по объему от искомых функций. В нулевом приближении эти уравнения можно свести к одному:

$$\frac{\rho c_\varepsilon}{t_T^*}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t'}dt' =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}^{(T)}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t')}{\partial x_j}dt'\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{A_{44}}\lambda_{ij}^{(\kappa)}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t')}{\partial x_j}dt'\right)\right) +$$
$$+\delta_D + q_V - (A_{44}-1)\frac{T_0}{t_T^*}\exp\left(-\frac{t}{t_T^*/A_{44}}\right) - TC_{jikl}\frac{\partial e_{kl}^{(T)}}{\partial T}\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}. \qquad (7)$$

При $|t_T^* \dot{\kappa}| \ll \min\bigl(|A_{44}\kappa|, |\bar{\kappa}|\bigr)$ и $\lambda_{ij}^{(\kappa)} = 0$ из (3) следует известное гиперболическое уравнение теплопроводности с учетом термоупругой связанности [3].

Если положить $t_T^* = 0$ и $t_q^* = 0$, то, пренебрегая двумя последними слагаемыми в правой части уравнения (5), с учетом второго уравнения из (4) в нулевом приближении получим классическое параболическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\rho c_\varepsilon}{A_{44}} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\lambda_{ij}^{(T)} + \lambda_{ij}^{(\kappa)} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \qquad (8)$$

в котором коэффициент A_{44} учитывает увеличение удельной массовой теплоемкости вследствие наличия свободных поверхностей в объеме микро- и наноструктурного материала и относительной величины суммарной свободной поверхности в единице массы этого материала ($A_{44} = \dfrac{S_\Sigma - S'}{S_\Sigma}$, где S_Σ — суммарная площадь поверхности частиц в единице массы; S' — суммарная площадь свободной поверхности частиц в единице массы, $0 < A_{44} \leqslant 1$). Учесть влияние рассеяния фононов на свободных поверхностях микро- и наночастиц на процесс теплопроводности в материале позволяет тензор с компонентами $\lambda_{ij}^{(\kappa)}$. Очевидно, что $\lambda_{ij}^{(\kappa)} \to 0$ и $\lambda_{ij}^{(T)} \to \overset{\circ}{\lambda}{}_{ij}^{(T)}$ при $A_{44} \to 1$, где $\overset{\circ}{\lambda}{}_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора теплопроводности поликристаллического материала, в объеме которого отсутствуют свободные поверхности.

Следует отметить, что аналогичный подход к получению уравнения теплопроводности для нелокальной среды изложен в [4], там же приведены и некоторые численные результаты решения соответствующей краевой задачи. Отличие полученных выше результатов от [5] состоит в более полном учете эффектов термомеханической связанности и диссипации энергии при деформировании.

Несколько иной подход к построению модели нелокальной термоупругой среды без использования внутренних параметров состояния рассмотрен в [5]. В этой работе

$$h = \int\limits_V \Big(c_\varepsilon \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{T(\boldsymbol{x}', t) - T_0}{T_0} + \frac{1}{\rho} C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) e_{ij}(\boldsymbol{x}', t) \Big) dV(\boldsymbol{x}'),$$

$$\sigma_{ji} = \int\limits_V \Big(C_{jikl} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)(e_{kl}(\boldsymbol{x}') - e_{kl}^{(T)}(\boldsymbol{x}')) \Big) dV(\boldsymbol{x}'),$$

$$q_i = -\int\limits_V \lambda_{ij}^{(T)} \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \, \frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j} dV(\boldsymbol{x}'),$$

где $\alpha_{kl}^{(T)} = \partial e_{kl}^{(T)} / \partial T$ — компоненты тензора коэффициентов температурной деформации; $\varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|)$ — функции, аналогичные введенным в (1).

Закон сохранения энергии при $\delta_D = 0$ приводит к уравнению теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} dV(\boldsymbol{x}') +$$

$$+ T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{\partial e_{ij}(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} dV(\boldsymbol{x}') =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \int\limits_V \varphi(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|) \frac{\partial T(\boldsymbol{x}', t)}{\partial x_j} dV(\boldsymbol{x}') \right) + q_V.$$

Очевидно, что это уравнение можно получить с использованием приведенных выше соотношений, заметно их упростив.

Полученные в данной работе варианты уравнения теплопроводности при различных допущениях относительно структуры материала дают широкие возможности для их использования в конкретных случаях.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кувыркин Г.Н.* Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч. 1. Определяющие уравнения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 1. С. 26–33.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
4. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Нелокальная математическая модель теплопроводности в твердых телах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 3. С. 20–30.
5. *Eringen A.C.* Nonlocal Continuum Field Theories. New York–Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 2002. 393 pp.

REFERENCES

1. *Kuvyrkin G.N.* Mathematical model of a nonlocal thermoviscoelastic medium. Part 1. Governing equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2013, no. 1, pp. 26–33 (in Russ.).
2. *Truesdell C.A.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. New York, Academic Press, 1977, 303 p. (Russ. ed.: Trusdell K. Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mekhaniki sploshnykh sred. Moscow, Mir Publ., 1975. 592 p.).
3. *Zarubin V.S.*, *Kuvyrkin G.N.* Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p.
4. *Zarubin V.S.*, *Kuvyrkin G.N.*, *Savel'eva I.Yu.* A Nonlocal mathematical model of thermal conduction in solids. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2011, no. 3, pp. 20–30 (in Russ.).

5. *Eringen A.C.* Nonlocal continuum field theories. New York, Springer-Verlag, 2002. 393 p.

Статья поступила в редакцию 7.06.2012

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — D. Sc. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.