

УДК 539.3

Ю. И. Димитриенко, А. И. Кашкаров,
А. А. Макашов

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ

Разработан метод решения задач теории малых упруго-пластических деформаций А.А.Ильюшина на ячейке периодичности для композитов с пространственной структурой армирования, основанный на сведении исходной задачи к задаче “классического” типа, для которой применен метод конечных элементов. Разработана численная процедура, и решена задача расчета эффективных упругопластических характеристик для пространственно-армированного композита.

Метод асимптотического осреднения периодических структур, идея которого была предложена в 1974 г. Н.С.Бахваловым и независимо Э.Санчес-Паленсией (см. список литературы к работам [1], [2]), позволяет математически точно вычислять так называемые эффективные характеристики композиционных материалов, как линейные, так и нелинейные. Применение этого метода для расчета упругих модулей композитов, а также для расчета нелинейно-упругих и упруго-пластических свойств было впервые предложено Б.Е.Победрей [3]. Было показано, что для этих целей необходимо решение специальных задач на ячейке периодичности композита. Однако методы решения этих задач до настоящего времени удалось разработать только для очень ограниченного типа структур — слоистых и однонаправленно-армированных. В недавних работах [4–7] был предложен новый метод решения задач на ячейке периодичности, основанный на сведении их к задачам классического типа, к которым уже может быть применен метод конечного элемента. С помощью этого метода были рассчитаны упругие модули пространственно-армированных композитов. Цель настоящей работы — дальнейшее развитие этого метода для расчета упруго-пластических характеристик композитов со сложными структурами армирования.

Метод асимптотического осреднения для упруго-пластических задач. Рассмотрим пространственно-армированный композит (рис. 1),

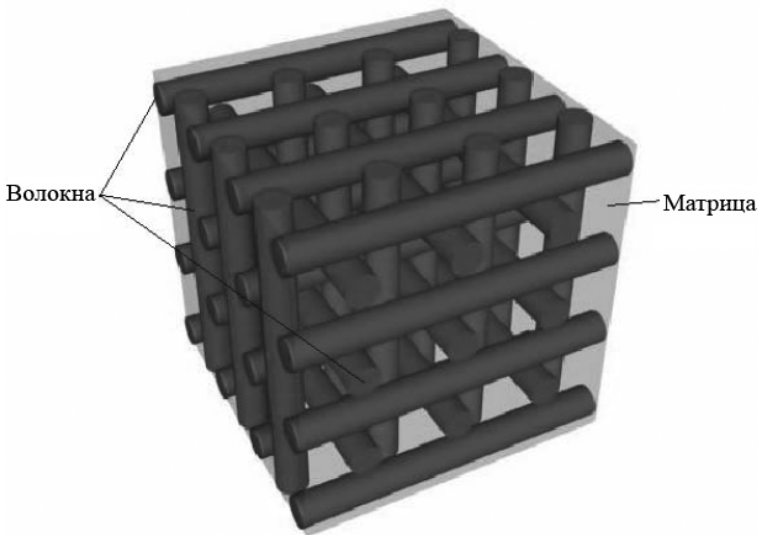


Рис. 1. Композиционный материал с пространственной (3-D) схемой армирования

которому в пространстве \mathbb{R}_3 соответствует область V с поверхностью Σ . Композит состоит из N компонентов. Компоненты с индексами $\alpha = 1, \dots, N-1$ представляют собой волокна различных типов, ориентированные по α -му направлению в \mathbb{R}_3 , а компонент с индексом $\alpha = N$ — это матрица. Обозначим V_α , $\alpha = 1 \dots N$, — области в \mathbb{R}_3 , соответствующие α -му компоненту композита; Σ_α — поверхности областей V_α и $\Sigma_{\alpha N}$ — поверхности контакта матрицы и волокон (волокна полагаем не контактирующими между собой); $\Sigma_{\alpha e}$ — часть поверхности Σ композита, занятая α -м компонентом (причем $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{\alpha e}$ — для волокон и $\Sigma_N = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{Ne}$ — для матрицы). Волокна и матрицу полагаем изотропными упруго-пластическими, соответствующими деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина (теория малых упруго-пластических деформаций) [8]. Тогда в каждой области V_α , $\alpha = 1 \dots N$, можно рассмотреть следующую задачу малых упруго-пластических деформаций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j}^\alpha = 0, \quad \text{в } V_\alpha; \\ \sigma_{ij}^\alpha = F_{ij}^\alpha(\varepsilon_{kl}^\alpha), \quad \text{в } V_\alpha \cup \Sigma_\alpha; \\ \varepsilon_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\alpha + u_{j,i}^\alpha), \quad \text{в } V_\alpha; \\ u_i^\alpha = u_i^N, \quad (\sigma_{ij}^\alpha - \sigma_{ij}^N) n_j = 0 \quad \text{на } \Sigma_{\alpha N}; \\ u_i^\alpha = u_{ie}, \quad \text{на } \Sigma_{\alpha e}^1 \quad \sigma_{ij}^\alpha n_j = S_{ie}, \quad \text{на } \Sigma_{\alpha e}^2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь u_i^α , σ_{ij}^α , ε_{ij}^α — перемещения, напряжения и деформации в α -м

компоненте, последние два условия в системе (1) — это условия идеального контакта матрицы и волокон, и условия на α .

Пусть теперь композиционный материал обладает периодической структурой (см. рис. 1), ячейка периодичности (ЯП) V_ξ которого состоит из N компонентов $V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1, \dots, N$. Введем малый параметр $\kappa = l/L \ll 1$ как отношение характерного размера ЯП к характерному размеру всего композита, а также глобальные x^k и локальные ξ^k координаты. Будем полагать, что матрица является связной областью. Обозначим также $\Sigma_{\xi\alpha N} = \Sigma_{\alpha N} \cap V_\xi$ — поверхности раздела матрицы и волокон в ЯП.

В этом случае для такой структуры может быть применен метод асимптотического осреднения [1–5], согласно которому решение задачи (1) для матрицы и волокон строится в виде асимптотических разложений [5]:

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= u_i^{\alpha(0)}(x^k) + \kappa u_i^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots, \\ \varepsilon_{ij}^\alpha &= \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \varepsilon_{ij}^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots, \\ \sigma_{ij}^\alpha &= \sigma_{ij}^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \sigma_{ij}^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

причем по аргументу ξ^l эти функции полагаются периодическими. Деформации и напряжения “нулевого уровня” имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)}), \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^{\alpha(0)} = F_{ij}^\alpha \left(\varepsilon_{kl}^{\alpha(0)} \right), \quad \text{если } \xi^k \in V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Здесь $_{,l} = \partial/\partial x^l$ и $_{/l} = \partial/\partial \xi^l$ — производные по двум типам координат. При выводе формул (3)–(5) и далее используется правило дифференцирования асимптотических разложений:

$$\frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial \xi_k}.$$

Подставляя разложения (2) в систему (1), применяя правило дифференцирования и собирая члены при одинаковых степенях k , получаем так называемую локальную задачу на ячейке периодичности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij/j}^{\alpha(0)} = 0, \quad \text{в } V_{\xi}, \\ \sigma_{ij}^{\alpha(0)} = F_{ij}^{\alpha} \left(\varepsilon_{kl}^{\alpha(0)} \right), \quad \text{в } V_{\xi} \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \left(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)} \right), \quad \text{в } V_{\xi}, \\ \left. \begin{array}{l} u_i^{\alpha(1)} = u_i^{N(1)} \\ \left(\sigma_{ij}^{\alpha(1)} - \sigma_{ij}^{N(1)} \right) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \Sigma_{\xi\alpha N}, \\ \left\langle u_i^{\alpha(1)} \right\rangle = 0, \quad \left[\left[u_i^{\alpha(1)} \right] \right] = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Здесь

$$\left\langle u_i^{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi\alpha}} u_i^{\alpha} dV_{\xi}, \quad \left\langle \varepsilon_{ij}^{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi\alpha}} \varepsilon_{ij}^{\alpha} dV_{\xi} \quad (7)$$

— операторы осреднения.

В выражении (6) условие $\left[\left[u_i^{\alpha} \right] \right] = 0$ — это условие периодичности функций на границе ячейки периодичности, а условие $\left\langle u_i^{\alpha} \right\rangle = 0$ вызвано требованием единственности решения локальной задачи [3]. В силу периодичности функций $u_i^{\alpha(1)}$ имеет место следующее соотношение:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \left\langle \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)} \right). \quad (8)$$

Метод упругих решений для локальных задач \mathcal{J}_{pq} на ячейке периодичности. Будем полагать далее, что волокна и матрица — изотропные, а ЯП является симметричной при зеркальном отражении относительно трех координатных плоскостей $\Sigma_s = \{ \xi^s = 0 \}$, а также симметричной относительно поворота на угол π вокруг каждой оси координат $O\xi^s$ и симметричной при преобразовании центральной симметрии с центром в точке O (подробнее об этих преобразованиях см. работу [9]). Это ограничение назовем *основным допущением симметрии композита*. Согласно этому допущению, вместо решения локальной задачи (6) на всей ЯП V_{ξ} , можно перейти к решению задачи на области \tilde{V}_{ξ} , представляющей $1/8$ ЯП.

Поскольку задача (6) нелинейная, то для ее решения применим итерационный метод, являющийся разновидностью метода упругих решений [8]. Согласно этому методу определяющие соотношения в системе (6) для компонентов композита линеаризуются следующим

образом:

$$\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}} + F_{ij}^{\alpha} \left(\varepsilon_{kl}^{\alpha\{m-1\}} \right) - C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m-1\}} \quad (9)$$

где $\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}}$ и $\varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}}$ — значения напряжений $\sigma_{ij}^{\alpha(o)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{\alpha(o)}$ на m -м шаге итерационного цикла, а $C_{ijkl}^{\alpha\{m\}}$ — тензоры модулей упругости компонентов композита на m -м шаге итерации. В простейшем варианте метода эти модули являются константами и совпадают с C_{ijkl}^{α} . Обозначим также $u_{ij}^{\alpha\{m\}}$ — значения перемещений $u_{ij}^{\alpha(1)}$ на m -м шаге итерационного цикла. Тогда на m -м шаге итерации вместо задачи (6) получаем следующую линеаризованную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij/j}^{\alpha\{m\}} = 0 \quad \text{в } \tilde{V}_{\xi}, \\ \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}} + F_{ij}^{\alpha} \left(\varepsilon_{kl}^{\alpha\{m-1\}} \right) - C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m-1\}} \quad \text{в } \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \left(u_{i/j}^{\alpha\{m\}} + u_{j/i}^{\alpha\{m\}} \right) \quad \text{в } \tilde{V}_{\xi}, \\ \left. \begin{array}{l} u_i^{\alpha\{m\}} = u_i^{N\{m\}}, \\ (\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} - \sigma_{ij}^{N\{m\}}) n_j = 0 \end{array} \right\} \quad \text{на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Согласно предложенному в работе [5] варианту метода асимптотического осреднения, перемещения первого уровня и напряжения нулевого уровня при каждом значении m представляются в виде следующих сумм :

$$u_i^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^3 u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}, \quad \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^3 \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}}, \quad \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^3 \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}}, \quad (11)$$

если $\xi^k \in V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1, \dots, N$, причем для функций $u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}$ в каждой комбинации (pq) выделяется линейная часть по локальным координатам:

$$u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = -\bar{\varepsilon}_{pq} (\delta_{ip}\xi^q + \delta_{iq}\xi^p) + U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}(\xi^l), \quad (12)$$

где δ_{ip} — символ Кронекера, а $U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}(\xi_i)$ — некоторые функции, называемые псевдоперемещениями, для которых при каждом фиксированном наборе индексов (pq) получаем следующую задачу, называемую “линеаризованной локальной задачей \mathcal{J}_{pq} на ячейке периодичности”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha\{m\}} \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} - C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m-1\}} + \frac{1}{6} \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}} \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} = \frac{1}{2} \left(U_{i(pq)/j}^{\alpha\{m\}} + U_{j(pq)/i}^{\alpha\{m\}} \right) \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\ U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = U_{i(pq)}^{N\{m\}}, \\ \left(\sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} - \sigma_{ij(pq)}^{N\{m\}} \right) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \quad (13)$$

Здесь обозначено:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}} = F_{ij}^\alpha \left(\sum_{p,q=1}^3 \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha\{m-1\}} \right); \quad (14)$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl(pq)} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} (\delta_{kp} \delta_{lq} + \delta_{kq} \delta_{lp}). \quad (15)$$

Кроме того, к системе (13) присоединяются условия на координатных плоскостях $\Sigma_s = \{\xi^s = 0\}$ и на торцевых поверхностях ЯП $\Sigma'_s = \{\xi_s = 1/2\}$, $s = 1, 2, 3$, которые записываются следующим образом:

$$\text{при } p = q \quad U_{i(pq)}^\alpha = 1/2 \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, \quad S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_i, \quad (16)$$

$$i \neq j \neq k \neq i;$$

$$\text{при } p \neq q \quad U_{i(pq)}^\alpha = 1/4 \bar{\varepsilon}_{ip} \delta_{ip}, \quad S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0$$

$$\text{на } \Sigma'_j, i, j = \{p, q\}; \quad (17)$$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_k, \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

а также

$$\text{при } p = q, \quad U_{i(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_i, \quad (18)$$

$$i \neq j \neq k \neq i;$$

$$\text{при } p \neq q \quad U_{i(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_j, i, j = \{p, q\};$$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0, \quad S_{j(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_k, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (19)$$

Вывод этих граничных условий для линеаризованных задач (13) такой же, как и полученный в работе [5], для линейных задач на ячейке периодичности. Здесь введены обозначения для векторов усилий $S_{i(pq)}$:

$$S_{i(pq)} \equiv \sum_{l=1}^3 \sigma_{il(pq)}^{\alpha\{m\}} n_l. \quad (20)$$

Решение задачи (13)–(17) разыскивается в области \tilde{V}_ξ , представляющей $1/8$ ЯП: $\tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$, здесь также обозначена $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ — поверхность контакта компонентов внутри \tilde{V}_ξ : $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta} = \Sigma_{\xi\alpha\beta} \cap \tilde{V}_\xi$.

Появление условий (16), (17) связано с требованием периодичности всех функций (1) на границе ЯП, а также наличием симметрии ЯП относительно трех координатных плоскостей для рассматриваемого типа композита. Более подробно эти условия обсуждаются в работе [5]. Там же на рисунках приведены граничные условия для задач \mathcal{J}_{33} , \mathcal{J}_{13} и \mathcal{J}_{31} .

Вариационная формулировка локальной задачи \mathcal{J}_{pq} . Для произвольного конечного объема $V \subset \tilde{V}_\xi$ вариационная формулировка задачи \mathcal{J}_{pq} (13) при фиксированных p и q имеет вид

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma + \int_V \delta \varepsilon^T \hat{\sigma}^{\{m-1\}} dV. \quad (21)$$

Здесь обозначены координатные столбцы псевдоперемещений U , напряжений σ , деформаций ε и поверхностных усилий S :

$$U = \left[U_{1(pq)}^{\alpha\{m\}}, U_{2(pq)}^{\alpha\{m\}}, U_{3(pq)}^{\alpha\{m\}} \right]^T,$$

$$\sigma = \left[\sigma_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, \sigma_{22(pq)}^{\alpha\{m\}}, \sigma_{33(pq)}^{\alpha\{m\}}, \sigma_{13(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, \quad \sigma_{23(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, \quad \sigma_{12(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2} \right]^T,$$

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{22(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{33(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{13(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, \quad \varepsilon_{23(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2}, \quad \varepsilon_{12(pq)}^{\alpha\{m\}}/\sqrt{2} \right]^T, \quad (22)$$

$$S = \left[S_{1(pq)}^\alpha, S_{2(pq)}^\alpha, S_{3(pq)}^\alpha \right]^T,$$

$$\hat{\sigma}^{\{m-1\}} = \left[\hat{\sigma}_{11(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{22(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{33(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{13(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{23(pq)}^{\alpha\{m-1\}}, \hat{\sigma}_{12(pq)}^{\alpha\{m-1\}} \right]^T,$$

$$\hat{\sigma}_{ij(pq)}^{\alpha\{m-1\}} = C_{ijkl}^{\alpha\{m\}} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha\{m-1\}} - \frac{1}{6} \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}}.$$

Линеаризованные определяющие соотношения, следующие из второй группы уравнений в системе (13), с использованием координатных столбцов записываются следующим образом:

$$\sigma = C \varepsilon, \quad (23)$$

где C — матрица упругости размером $[6 \times 6]$, составленная из компонентов тензора $C_{ijkl}^{\alpha\{m\}}$ стандартным образом [9]:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1111}^{\alpha\{m\}} & C_{1112}^{\alpha\{m\}} & C_{1113}^{\alpha\{m\}} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222}^{\alpha\{m\}} & C_{1123}^{\alpha\{m\}} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333}^{\alpha\{m\}} & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & 2C_{1212}^{\alpha\{m\}} & 0 & 0 \\ & & & & 2C_{1313}^{\alpha\{m\}} & 0 \\ & & & & & 2C_{2323}^{\alpha\{m\}} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Соотношения Коши (третья группа уравнений в системе (13)) в матричном виде записываются следующим образом:

$$\varepsilon = DU, \quad (25)$$

где D — матрица линейных дифференциальных операторов дифференцирования ($\partial_i = \partial/\partial\xi^i$):

$$D = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_3/\sqrt{8} & 0 & \partial_1/\sqrt{8} \\ 0 & \partial_3/\sqrt{8} & \partial_2/\sqrt{8} \\ \partial_2/\sqrt{8} & \partial_1/\sqrt{8} & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

С учетом определяющих отношений (23) и (25) вариационное уравнение (21) можно представить в виде

$$\int_V (D\delta U)^T C D U dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma + \int_V (D\delta U)^T \tilde{\sigma} dV. \quad (27)$$

Метод конечного элемента для задач \mathcal{J}_{pq} . Аппроксимируя псевдоперемещения U в КЭ линейными функциями

$$U = \Phi q, \quad (28)$$

где q — координатный столбец псевдоперемещений в узлах КЭ, а $\Phi_j(\xi_i)$ — матрица функции формы, зависящая от типа КЭ, получаем итоговую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений:

$$Kq = f, \quad (29)$$

где

$$K = \int_V B^T C B dV \quad (30)$$

— локальная матрица жесткости, $B = D\Phi$, а

$$f = \int_{\Sigma} \Phi^T S d\Sigma + \int_V B^T \tilde{\sigma} dV \quad (31)$$

— столбец нагрузок.

Глобальная матрица жесткости задачи составляется из локальной матрицы жесткости стандартным образом [10], после ее формирования к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) применяются граничные условия (16) и (17). Граничные условия идеального контакта (последняя группа соотношений в системе (13)) не требуют специального учета, так как при данном варианте МКЭ они удовлетворяются автоматически.

Решая СЛАУ, находим перемещения q в узлах, по которым вычисляем псевдоперемещения $U = \Phi q$, деформации $\varepsilon = Bq$ и напряжения $\sigma^{\{m\}} = CBq - \hat{\sigma}^{\{m-1\}}$ в КЭ. Для решения СЛАУ применялся метод сопряженных градиентов.

Рассматривались два типа конечных элементов — четырех узловой тетраэдр, обеспечивающий линейную аппроксимацию псевдоперемещений U и приводящий к постоянным напряжениям σ в каждом КЭ, а также десяти узловой тетраэдр, обеспечивающий квадратичную аппроксимацию псевдоперемещений и линейную аппроксимацию напряжений в КЭ.

Каждая из указанных задач \mathcal{J}_{pq} решалась несколько раз: при заданных значениях деформаций $\bar{\varepsilon}_{pq}$ осуществлялся итерационный цикл решения соответствующей задачи до достижения условия сходимости решения, которое выбиралось следующим образом:

$$\sum_{\beta, \gamma=1}^3 \left| \sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{m\}} - \sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{m-1\}} \right| \cdot \left(\sum_{\beta, \gamma=1}^3 \left| \sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{m-1\}} \right| \right)^{-1} \leq \delta, \quad (32)$$

где $\delta = 0,01 \dots 0,001$. Число итераций $m = M$, обеспечивающее выполнение данного условия, было различным для разных задач \mathcal{J}_{pq} и для разных значений $\bar{\varepsilon}_{pq}$, но не превышало $10 \dots 15$. Напряжения при максимальном значении номера итерации $m = M$ обозначались как $\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{M\}}$. Для повышения устойчивости счета задачи \mathcal{J}_{11} , \mathcal{J}_{22} и \mathcal{J}_{33} решались совместно — как общая задача с входными данными $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{\varepsilon}_{22}$ и $\bar{\varepsilon}_{33}$. Также совместно решались задачи \mathcal{J}_{13} и \mathcal{J}_{31} , \mathcal{J}_{12} и \mathcal{J}_{21} , \mathcal{J}_{23} и \mathcal{J}_{32} . Далее совершался еще один цикл решения задач \mathcal{J}_{pq} — по значениям входных данных $\bar{\varepsilon}_{pq}$.

Расчет эффективных упруго-пластических характеристик композиционного материала. После решения серии задач \mathcal{J}_{pq} (13), (16), (19) указанным методом для всех pq проинтегрируем напряжения $\sigma_{\beta\gamma}^{(\alpha)\{M\}}$ по областям, занятым волокнами и матрицей,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left\langle \sigma_{ij}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^3 \left\langle \bar{\sigma}_{ij(pq)}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle. \quad (33)$$

В результате получим осредненные напряжения в локальной упруго-пластической задаче (6). Тогда эффективные упруго-пластические соотношения, связывающие осредненные напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ и деформации $\bar{\varepsilon}_{pq}$ можно записать в следующем символическом операторном виде:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{pq}). \quad (34)$$

Поскольку ранее указан алгоритм вычисления средних напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ (формулы (33), в которых $\sigma_{\beta\gamma}^{(\alpha)\{M\}}$ вычисляются по методу, описанному в предыдущем пункте) по заданным значениям осредненных деформаций $\bar{\varepsilon}_{pq}$, то, тем самым, фактически указан алгоритм нахождения значений символического оператора (34).

Данный символический оператор (34) может быть конкретизирован, если имеется информация о типе геометрической симметрии ЯП композита и типе анизотропии волокон и матрицы. Поскольку принято основное допущение симметрии, то решение всех задач \mathcal{J}_{pq} будет обладать указанными типами симметрии (т.е. не изменится во всей ЯП при указанных выше преобразованиях). Это означает, что и оператор (34) должен обладать данным типом симметрии. Но перечисленные выше преобразования вместе с тождественным преобразованием образуют группу ортотропии (8 преобразований [9]), следовательно по терминологии, введенной в работе [9], оператор (34) будет тензорной функцией, индифферентной относительно группы ортотропии. Но тогда для такой функции можно использовать представление ее в тензорном базисе группы ортотропии, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{pq}) = & \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_{\gamma} \delta_{i\gamma} \delta_{j\gamma} + \frac{1}{2} (\varphi_4 \bar{\varepsilon}_{23} + \varphi_6 \bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{13}) (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) + \\ & + \frac{1}{2} (\varphi_5 \bar{\varepsilon}_{13} + \varphi_6 \bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{23}) (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + \\ & + \frac{1}{2} (\varphi_7 \bar{\varepsilon}_{12} + \varphi_6 \bar{\varepsilon}_{13} \bar{\varepsilon}_{23}) (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}), \quad (35) \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma}(I_1^{\varepsilon}, \dots, I_7^{\varepsilon}), \quad \gamma = 1, \dots, 7, \quad (36)$$

скалярные функции от семи инвариантов тензора осредненных деформаций (независимых из них только шесть):

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{11}, & I_2^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{22}, & I_3^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{33}, & I_4^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{23}^2, \\ I_5^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{13}^2, & I_6^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{13}\bar{\varepsilon}_{12}\bar{\varepsilon}_{23}, & I_7^\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_{12}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Эти функции φ_γ фактически и представляют собой искомые эффективные упругопластические характеристики композита. Зная значения $\bar{\sigma}_{ij}$ и $\bar{\varepsilon}_{pq}$, функции φ_γ могут быть вычислены следующим образом. Запишем формулы (35) в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \varphi_1(I_1^\varepsilon, \dots, I_7^\varepsilon), \\ \bar{\sigma}_{22} &= \varphi_1(I_1^\varepsilon, \dots, I_7^\varepsilon), \\ \bar{\sigma}_{33} &= \varphi_1(I_1^\varepsilon, \dots, I_7^\varepsilon), \\ \bar{\sigma}_{23} &= \varphi_4\bar{\varepsilon}_{23} + \varphi_6\bar{\varepsilon}_{12}\bar{\varepsilon}_{13}, \\ \bar{\sigma}_{13} &= \varphi_5\bar{\varepsilon}_{13} + \varphi_6\bar{\varepsilon}_{12}\bar{\varepsilon}_{23}, \\ \bar{\sigma}_{12} &= \varphi_7\bar{\varepsilon}_{12} + \varphi_6\bar{\varepsilon}_{13}\bar{\varepsilon}_{23}, \end{aligned} \quad (38)$$

а затем образуем из этих соотношений семь инвариантов тензора средних напряжений I_γ^σ , $\gamma = 1, \dots, 7$, аналогичных инвариантам I_γ^ε , $\gamma = 1, \dots, 7$ (37), в результате получим систему семи нелинейных уравнений относительно семи функций φ_γ :

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= \varphi_1, & I_2^\sigma &= \varphi_2, & I_3^\sigma &= \varphi_3, \\ I_4^\sigma &= \varphi_4^2 I_4^\varepsilon + 2\varphi_6\varphi_4 I_5^\varepsilon I_7^\varepsilon + \varphi_6^2 I_6^\varepsilon, & I_5^\sigma &= \varphi_5^2 I_5^\varepsilon + 2\varphi_6\varphi_5 I_4^\varepsilon I_7^\varepsilon + \varphi_6^2 I_6^\varepsilon, \\ I_7^\sigma &= \varphi_7^2 I_7^\varepsilon + 2\varphi_7\varphi_6 I_4^\varepsilon I_5^\varepsilon + \varphi_6^2 I_6^\varepsilon, \\ I_6^\sigma &= (\varphi_4\varphi_5\varphi_7 + \varphi_6^2(\varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_7))I_6^\varepsilon + \varphi_5\varphi_6\varphi_7 I_5^{\varepsilon 2} I_7^{\varepsilon 2} + \\ &+ \varphi_4\varphi_6\varphi_7 I_4^{\varepsilon 2} I_7^{\varepsilon 2} + \varphi_4\varphi_5\varphi_6 I_4^{\varepsilon 2} I_5^{\varepsilon 2} + \varphi_6^3 I_6^{\varepsilon 2}, \end{aligned} \quad (39)$$

решая которую находим искомые эффективные упругопластические функции композита (34).

Теорема. Пусть для композита с периодической структурой выполнены следующие условия: 1) принято основное допущение симметрии, 2) волокна и матрица являются квазилинейными упругопластическими изотропными материалами, т.е. их операторы (5) $F_{ij}^\alpha(\varepsilon_{kl}^\alpha) = F_{ij}^\alpha(I_1^{\varepsilon(\alpha)}, I_2^{\varepsilon(\alpha)})$ зависят только от двух инвариантов тензора деформаций относительно группы изотропии:

$$\begin{aligned} I_1^{\varepsilon(\alpha)} &= \varepsilon_{11}^\alpha + \varepsilon_{22}^\alpha + \varepsilon_{33}^\alpha, & I_2^{\varepsilon(\alpha)} &= \\ &= (\varepsilon_{11}^\alpha - \varepsilon_{22}^\alpha)^2 + (\varepsilon_{33}^\alpha - \varepsilon_{22}^\alpha)^2 + (\varepsilon_{11}^\alpha - \varepsilon_{33}^\alpha)^2 + 6(\varepsilon_{13}^{\alpha 2} + \varepsilon_{12}^{\alpha 2} + \varepsilon_{23}^{\alpha 2}), \end{aligned} \quad (40)$$

и не зависят от третьего инварианта в этой группе $I_3^{\varepsilon(\alpha)} = \det(\varepsilon_{ij}^\alpha)$, тогда эффективные упругопластические функции (33), (34) композита являются: а) индифферентными относительно группы ортотропии, б) квазилинейными: зависящими только от линейных и квадратичных инвариантов тензора осредненных деформаций $I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon, I_4^\varepsilon, I_5^\varepsilon, I_7^\varepsilon$ и не зависящими от кубического инварианта I_6^ε , т.е. имеют следующий вид:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{pq}) = \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma \delta_{i\gamma} \delta_{j\gamma} + \frac{1}{2} \varphi_4 \bar{\varepsilon}_{23} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) + \frac{1}{2} \varphi_5 \bar{\varepsilon}_{13} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + \frac{1}{2} \varphi_7 \bar{\varepsilon}_{12} (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}) \quad (41)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon, I_4^\varepsilon, I_5^\varepsilon, I_7^\varepsilon) \quad (42)$$

а $\varphi_6 = 0$.

Доказательство. Утверждение а) было нами доказано ранее. Эффективные упругопластические функции (34) композита полностью определяются видом символического оператора (34) эффективных определяющих соотношений, который в свою очередь определяется решением локальной задачи (13), (16), (17). Решение же этой задачи зависит от $\bar{\varepsilon}_{pq}$ только через граничные условия (16), в которых деформации $\bar{\varepsilon}_{pq}$ входят в виде комбинаций $I_1^\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{11}, I_2^\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{22}, I_3^\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{33}, \sqrt{I_4^\varepsilon} = |\bar{\varepsilon}_{23}|, \sqrt{I_5^\varepsilon} = |\bar{\varepsilon}_{13}|, \sqrt{I_6^\varepsilon} = |\bar{\varepsilon}_{12}|$, совпадающих с шестью указанными инвариантами тензора $\bar{\varepsilon}_{pq}$. Зависимости от кубического инварианта I_6^ε у данного оператора нет. Таким образом и утверждение б) теоремы, а следовательно, и сама теорема доказаны.

Если выполнены условия теоремы, то соотношения (39) для нахождения эффективных упруго-пластических функций φ_γ упрощаются и имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1^\sigma, & \varphi_2 &= I_2^\sigma, & \varphi_3 &= I_3^\sigma, \\ \varphi_4^2 &= I_4^\sigma / I_4^\varepsilon, & \varphi_5^2 &= I_5^\sigma / I_5^\varepsilon, & \varphi_7^2 &= I_7^\sigma / I_7^\varepsilon \end{aligned} \quad (43)$$

Для того чтобы воспользоваться этими соотношениями, необходимо: 1) в шестимерном пространстве инвариантов $I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon, I_4^\varepsilon, I_5^\varepsilon, I_7^\varepsilon$ ввести область допустимых значений, например, шестимерный куб $Q_6 = \{a_{\min} \leq I_\gamma^\varepsilon \leq a_{\max}, \gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$; ввести сетку $I_{\gamma i_\gamma}^\varepsilon = i_\gamma I_\gamma^\varepsilon, \gamma = 1, \dots, 5, 7$, где $I_{\gamma i_\gamma}^\varepsilon$ — значения инварианта I_γ^ε в узле сетки с шестимерным номером $i_\gamma, \gamma = 1, \dots, 5, 7$, а $I = (a_{\max} - a_{\min})/N$ — шаг сетки; 2) для каждого значения $I_{\gamma i_\gamma}^\varepsilon, \gamma = 1, \dots, 5, 7$ в узле сетки решить серию задач \mathcal{J}_{pq} и, получив значения осредненных напряжений (33) $\bar{\sigma}_{ij}$, найти значения их инвариантов $I_{\gamma i_\gamma}^\sigma$; 3) по формулам (43) найти значения $\varphi_{\gamma i_\gamma}$ функций φ_γ .

Данный способ приводит к значительному числу вычислений, так, если введена сетка с числом узлов на ребре куба Q_6 $N=10$, то общее

число узлов сетки составит 10^6 , а число необходимых для решения задач \mathcal{J}_{pq} составит $6 \cdot 10^6$. Однако, если в расчетах используется модель малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина, то указанное число задач \mathcal{J}_{pq} может быть существенно сокращено.

Случай малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина. В случае малых упруго-пластических деформаций пластичности А.А. Ильюшина [8] операторы $F_{ij}^\alpha (\varepsilon_{kl}^\alpha)$ в системе (1) для волокон и матрицы имеют вид

$$\sigma_{ij}^\alpha = \left(\frac{2}{3} G^\alpha (1 - \omega_u^\alpha) - K^\alpha \right) \varepsilon_{kk}^\alpha \delta_{ij} + 2G^\alpha (1 - \omega_u^\alpha) \varepsilon_{ij}^\alpha, \quad (44)$$

где G^α — модуль сдвига, K^α — модуль объемного сжатия, $\omega_u^\alpha (I_2^{\varepsilon(\alpha)})$ — функция пластичности А.А. Ильюшина, причем линеаризованные определяющие соотношения (9) на m -м шаге будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = & \left(\frac{2}{3} G^\alpha (1 - \omega_u^{\alpha\{m\}}) - K^\alpha \right) \varepsilon_{kk}^{\alpha\{m\}} \delta_{ij} + 2G^\alpha (1 - \omega_u^{\alpha\{m\}}) \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} - \\ & - \left(\frac{2}{3} G^\alpha (1 - \omega_u^{\alpha\{m\}}) - K^\alpha \right) \varepsilon_{kk}^{\alpha\{m-1\}} \delta_{ij} + \\ & + 2G^\alpha (1 - \omega_u^{(m)}) \varepsilon_{ij}^{(k-1)} + \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha\{m-1\}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Соотношения (42) не зависят от траектории в пространстве деформаций, и часто решения прикладных задач ограничиваются случаем простого (пропорционального) деформирования, при котором $\bar{\varepsilon}_{pq}(t) = \bar{\varepsilon}_{pq}^0 \Psi(t)$, здесь t — параметр кривой в пространстве деформаций $\bar{\varepsilon}_{pq}$. Тогда в шестимерном пространстве инвариантов I_γ^ε , этой кривой будет соответствовать луч $I_\gamma^\varepsilon(t) = I_\gamma^0 \Psi(t)$, где I_γ^0 выражаются через $\bar{\varepsilon}_{pq}^0$ по формулам (37). Вводя сетку вдоль этого луча $I_{\gamma i_\gamma}^\varepsilon = i \Psi I_\gamma^0$, $\gamma = 1, \dots, 5, 7$, где $\Psi = \Psi_{\max}/N$ — приращение параметра деформирования (шаг сетки), получим, что число задач \mathcal{J}_{pq} , необходимое для расчета эффективных упруго-пластических функций φ_γ составит $6N$.

Случай кубической симметрии. Для композита, у которого армирование осуществлено одинаковым образом относительно всех трех осей координат, ячейка периодичности будет иметь кубическую симметрию [9], а число независимых инвариантов тензоров I_α^σ и $I_\alpha^{\bar{\varepsilon}}$ равно трем. В качестве таких инвариантов могут быть выбраны спектральные инварианты [9], которые образуются с помощью спектрального разложения симметричных тензоров второго ранга относительно кубической группы симметрии [9]:

$$\begin{aligned}
P_{ij(1)}^\sigma &= \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, & P_{ij(2)}^\sigma &= \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha\alpha}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \\
P_{ij(3)}^\sigma &= \sigma_{ij} - \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha\alpha}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}, \\
P_{ij(1)}^\varepsilon &= \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, & P_{ij(2)}^\varepsilon &= \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha\alpha}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \\
P_{ij(3)}^\varepsilon &= \varepsilon_{ij} - \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha\alpha}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Спектральные инварианты I_α^σ и I_α^ε представляют собой свертки соответствующих ортопроекторов $P_{ij(\alpha)}^\sigma$, $P_{ij(\alpha)}^\varepsilon$:

$$I_\alpha^\sigma = \sqrt{P_{ij(\alpha)}^\sigma P_{ij(\alpha)}^\sigma}, \quad I_\alpha^\varepsilon = \sqrt{P_{ij(\alpha)}^\varepsilon P_{ij(\alpha)}^\varepsilon}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{47}$$

и имеют следующий вид:

$$I_1^\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad I_2^\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2},$$

$$I_3^\sigma = \sqrt{2}\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2},$$

$$I_1^\varepsilon = \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_{ii}, \quad I_2^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\varepsilon}_{22})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33} - \bar{\varepsilon}_{11})^2},$$

$$I_3^\varepsilon = \sqrt{2}\sqrt{\bar{\varepsilon}_{12}^2 + \bar{\varepsilon}_{13}^2 + \bar{\varepsilon}_{23}^2}.$$

Тогда эффективные определяющие соотношения (34) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{pq}) &= \frac{\varphi_1}{\sqrt{3}}\delta_{ij} + \frac{\varphi_2}{I_2^\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^3 \left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3}I_1^\varepsilon\delta_{ij} \right) + \\
&+ \frac{\varphi_3}{I_3^\varepsilon} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} - \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \right), \tag{48}
\end{aligned}$$

где функции φ_α связывают спектральные инварианты

$$I_\alpha^\sigma = \varphi_\alpha(I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{49}$$

и представляют собой искомые эффективные упруго-пластические характеристики композита.

Функции $\varphi_\alpha(I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon)$ находились численным образом, процедура их вычисления была следующей. По формуле (33) вычислялись

средние напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ с помощью решения соответствующих задач J_{pq} при фиксированных значениях $\bar{\varepsilon}_{pq}$, затем вычислялись значения инвариантов I_α^σ и I_α^ε по формулам (47), тогда значение $I_\alpha^\sigma = \varphi_\alpha$ и является значением функции φ_α при фиксированных значениях $\bar{\varepsilon}_{pq}$. Меняя затем значения $\bar{\varepsilon}_{pq}$, получаем новые значения функции φ_α .

Для приложений важна возможность упрощения эффективных упруго-пластических характеристик (48). В работе [3] была предложена так называемая простейшая модель анизотропной пластичности, при которой линейные инварианты осредненных тензоров напряжений и деформаций связаны линейной зависимостью, а квадратичные – только с соответствующим инвариантом. Применительно к кубической симметрии простейшая модель имеет следующий вид:

$$I_1^\sigma = \lambda_1 I_1^\varepsilon, \quad I_\alpha^\sigma = \varphi_\alpha(I_\alpha^\varepsilon) = 2\lambda_\alpha(1 - \omega_\alpha(I_\alpha^\varepsilon)), \quad \alpha = 2, 3 \quad (50)$$

где λ_α – эффективные константы упругости композита, а $\omega_\alpha(I_\alpha^\varepsilon)$ – эффективные функции пластичности А.А. Ильюшина. Ниже приведены результаты проверки применимости простейшей модели пластичности для композитов с кубической симметрией.

Результаты численного моделирования упруго-пластического деформирования композита. При вычислительном эксперименте рассматривался пространственно-армированный углеалюминиевый композит, с алюминиевой матрицей и углеродными волокнами, которые для простоты предполагались изотропными и упругими. Константы упругости волокна были взяты следующими: $E = 250$ ГПа, $\nu = 0,35$. Матрица полагалась упруго-пластической, функция пластичности выбиралась в виде

$$\omega_u^\alpha(I_2^{\varepsilon(N)}) = \begin{cases} 0, & I_2^{\varepsilon(N)} \leq I_2^{*(N)}; \\ (1 - k^{(N)})(1 - I_2^{*(N)}/I_2^{\varepsilon(N)}), & I_2^{\varepsilon(N)} \geq I_2^{*(N)}, \end{cases} \quad (51)$$

который соответствует кусочно-линейной зависимости инвариантов $I_2^{\sigma(N)} = I_2^{\sigma(N)}(I_2^{\varepsilon(N)})$. Характеристики матрицы следующие: $E = 70$ ГПа, $\nu = 0,25$, $I_2^{*(N)} = \sigma_T^{(N)}/E^{(N)}$, где $\sigma_T^{(N)} = 300$ МПа – предел текучести матрицы, $k^{(N)} = \frac{E_p^{(N)}}{E^{(N)}} = 0,1$ – отношение модулей упругости в пластической и упругой зонах.

Результаты моделирования приведены на рис. 2–9.

На рис. 2 и 3 показаны эффективные диаграммы пластичности: напряжение $\bar{\sigma}_{33}$ –деформация $\bar{\varepsilon}_{33}$ и напряжение $\bar{\sigma}_{13}$ –деформация $\bar{\varepsilon}_{13}$ для композита с коэффициентом армирования 0,29, а также для волокна и матрицы. Из этой диаграммы видно, что даже в направлении армирования композит проявляет пластические свойства, причем предел

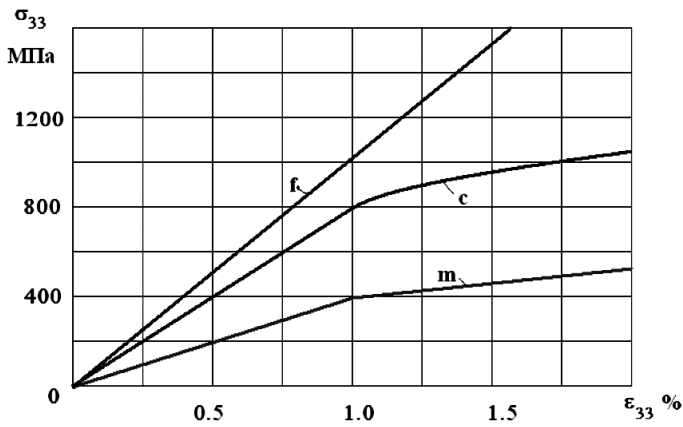


Рис. 2. Эффективная диаграмма пластичности:

напряжение $\bar{\sigma}_{33}$ –деформация $\bar{\epsilon}_{33}$ для упруго-пластического композита с коэффициентом армирования 0,35 (с), для волокна (f) и матрицы (m)

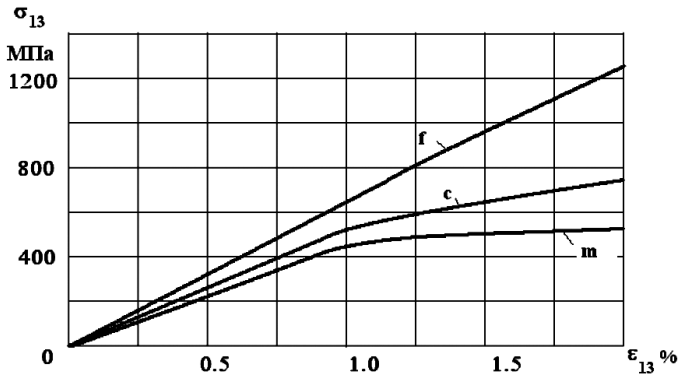


Рис. 3. Эффективная диаграмма пластичности:

напряжение $\bar{\sigma}_{13}$ –деформация $\bar{\epsilon}_{13}$ для упруго-пластического композита с коэффициентом армирования 0,35 (с), для волокна (f) и матрицы (m)

текучести по деформациям композита и матрицы примерно близки. Диаграмма деформирования композита в пластической зоне подобна диаграмме пластичности матрицы. Однако у композита она располагается в области более высоких значений.

На рис. 4 приведена эффективная диаграмма $\bar{\sigma}_{13}$ – $\bar{\epsilon}_{13}$ для упруго-пластического композита, полученная разработанным методом, а также аналогичные диаграммы, построенные приближенно-аналитическими методами по Фойгту (деформации сдвига у матрицы и волокна равны, а напряжения сдвига суммируются) и по Рейссу (наоборот, напряжения сдвига у матрицы и волокна равны, а деформации сдвига суммируются). Эффективные определяющие соотношения по Фойгту и по Рейссу записываются следующим образом:

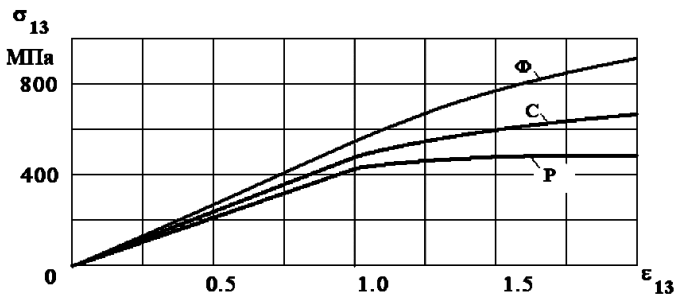


Рис. 4. Эффективные диаграммы:

напряжение $\bar{\sigma}_{13}$ –деформация $\bar{\epsilon}_{13}$ для упруго-пластического композита (с), оценки диаграммы по Фойгту (Ф) и Рейссу (Р)

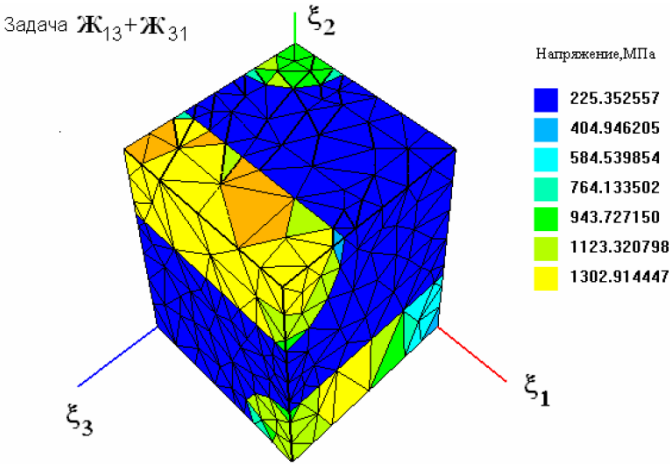


Рис. 5. Распределение напряжений σ_{13} в 1/8 ЯП упруго-пластического композита в задаче Ж13+Ж31, коэффициент армирования 0,35

$$\bar{\epsilon}_{13} = \left(\frac{1 - \varphi_f}{2G_m} (1 - \omega_m(\bar{\sigma}_{13})) + \frac{\varphi_f}{2G_f} (1 - \omega_f(\bar{\sigma}_{13})) \right) \bar{\sigma}_{13} \quad (\text{по Рейссу}),$$

$$\bar{\sigma}_{13} = 2(G_m(1 - \varphi_f)(1 - \omega_m(\bar{\epsilon}_{13})) + G_f\varphi_f(1 - \omega_f(\bar{\epsilon}_{13})))\bar{\epsilon}_{13} \quad (\text{по Фойгту}),$$
 где G_m , $\omega_m(\bar{\epsilon}_{13})$, G_f , $\omega_f(\bar{\epsilon}_{13})$ – модули сдвига и функции пластичности А.А. Ильюшина для матрицы и волокна. Проведенные расчеты показали, что вычисления эффективных диаграмм деформирования композита по этим приближенно-аналитическим методам приводят к значительной погрешности (см. рис. 4); отличие от результатов, получаемых разработанным методом, достигает 50 % по напряжениям.

На рис. 5 показано распределение напряжений σ_{13} в 1/8 ЯП упруго-пластического композита в задаче Ж13+Ж31, а на рис. 6 – распределение напряжений σ_{33} в задаче Ж33.

Эффективная зависимость инварианта I_1^σ от I_1^ϵ (функция (49) вида $I_1^\sigma = \varphi_1(I_1^\epsilon, 0, 0)$) для упруго-пластического композита с коэффициентом армирования 0,35 показана на рис. 7. Зависимости инвариантов I_2^σ

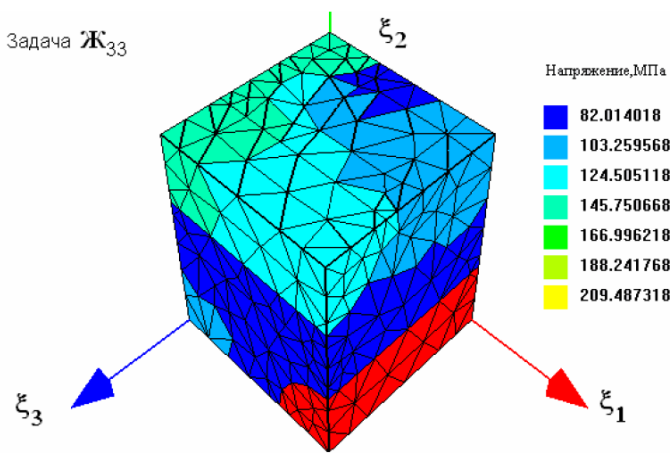


Рис. 6. Распределение напряжений σ_{33} в 1/8 ЯП упруго-пластического композита в задаче Ж33, коэффициент армирования 0,35

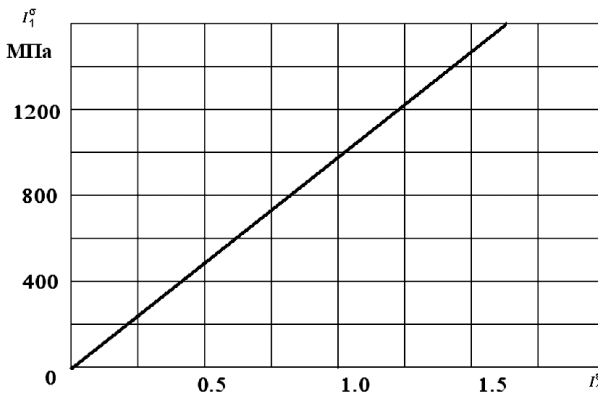


Рис. 7. Эффективная зависимость инварианта I_1^σ от I_1^ϵ (функция $I_1^\sigma = \varphi_1(I_1^\epsilon, I_2^\epsilon, I_3^\epsilon)$) для упруго-пластического композита с коэффициентом армирования 0,35

от I_2^ϵ при различных фиксированных значениях инварианта I_3^ϵ (функция $I_2^\sigma = \varphi_2(0, I_2^\epsilon, I_3^\epsilon)$ приведены на рис. 8, а зависимости инварианта I_3^σ от I_3^ϵ при различных фиксированных значениях инварианта I_2^ϵ (функция $I_3^\sigma = \varphi_3(0, I_2^\epsilon, I_3^\epsilon)$ показаны на рис. 9. Этими вычислениями проверялась возможность принятия простейшей модели (49) для композита. Они показали, что такая модель может быть принята, так как третий инвариант I_3^ϵ практически не влияет на зависимость между вторыми инвариантами I_2^σ и I_2^ϵ , и наоборот, второй инвариант I_2^ϵ практически не оказывает влияния на эффективную зависимость между третьими инвариантами. Этот вывод, по крайней мере, справедлив для исследованного диапазона изменений характеристик матрицы, волокна и коэффициента армирования.

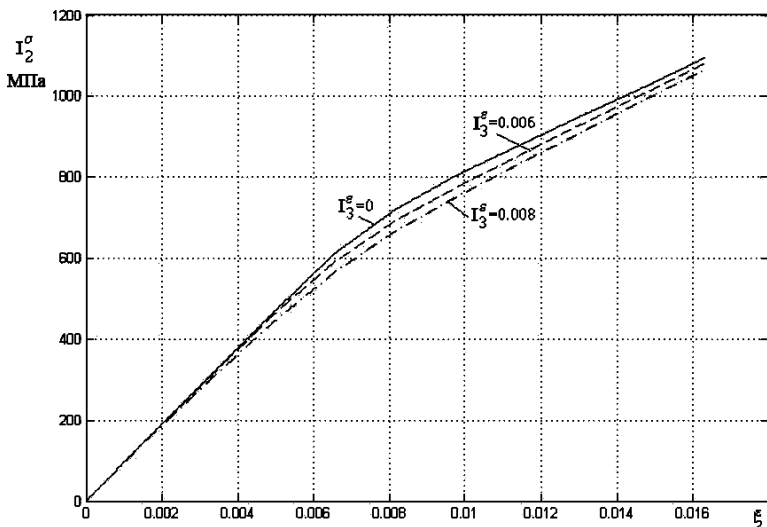


Рис. 8. Эффективные зависимости инварианта I_2^σ от I_2^ϵ при различных значениях инварианта I_3^ϵ для упруго-пластического композита с коэффициентом армирования 0,35

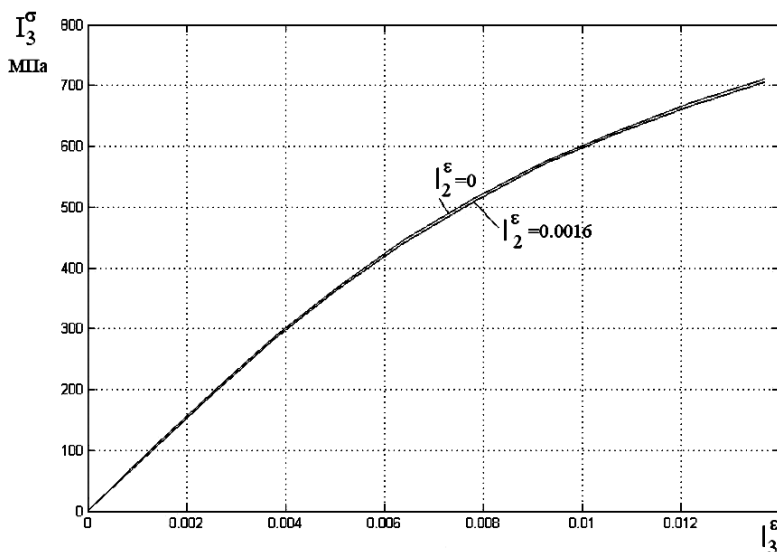


Рис. 9. Эффективные зависимости инварианта I_3^σ от I_3^ϵ при различных значениях инварианта I_2^ϵ для упруго-пластического композита с коэффициентом армирования 0,35

Выводы. Разработан конечно-элементный метод решения локальных задач на ячейке периодичности для упруго-пластических композитов. Метод позволяет рассчитывать эффективные диаграммы деформирования композита, связывающие компоненты эффективных тензоров напряжений и деформаций, а также вычислять микронапряжения в волокнах и матрице композита.

Показано, что для композитов с кубической симметрией ячейки периодичности эффективные диаграммы могут быть сведены к зависимостям между тремя инвариантами эффективных тензоров напряжений и деформаций.

Проведены сравнительные расчеты эффективных диаграмм деформирования для композита с углеродными волокнами и алюминиевой матрицей на основе разработанного метода и приближенно-аналитических методов типа Фойгта–Рейсса. Расчеты показали, что использование приближенно-аналитических методов приводит к существенным погрешностям при построении эффективных диаграмм пластичности композитов — ошибка достигает 50 %.

С помощью разработанного численного метода проведена проверка применимости простейшей модели анизотропной пластичности Б.Е. Победри, показавшая адекватность этой модели для исследованного типа композитов. Это позволяет ее рекомендовать для проведения расчетов конструкций из упруго-пластических композитов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ба х в а л о в Н. С., П а н а с е н к о Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. С а н ч е с - П а л е н с и я Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с
3. П о б е д р я Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.:Изд-во МГУ, 1984.
4. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997. – 366 с.
5. Д и м и т р и е н к о Ю. И., К а ш к а р о в А. В. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2002. – № 2. – С. 95–108.
6. Д и м и т р и е н к о Ю. И., К а ш к а р о в А. И., М а к а ш о в А. А. Конечно-элементное моделирование процесса разрушения пространственно-армированных композитов с периодической структурой / Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. – М.: Логос, 2005. – С. 485–498.
7. Д и м и т р и е н к о Ю. И., К а ш к а р о в А. И., М а к а ш о в А. А. Разработка конечно-элементного метода решения локальных задач теории упругости “на ячейке периодичности” для композитов с периодической пространственной структурой / Математика в современном мире: Под ред. Ю.А. Дробышева. – Калуга: Изд-во КГПУ, 2004. – С. 177–191.
8. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. – М.: ГИИТЛ. – 1948.
9. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
10. П о п о в Б. Г. Расчет конструкций вариационно-матричными методами. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 294 с.

Статья поступила в редакцию 27.01.2006



Юрий Иванович Димитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 100 научных работ в области вычислительной механики, нелинейного тензорного анализа, термомеханики композитов, математического моделирования в материаловедении.

Yu.I. Dimitrienko (b.1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D.Sc.(Phys.-Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Full member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of more than 100 publications in the field of computational mechanics, nonlinear tensor analysis, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in science of materials.

Александр Игоревич Кашкаров родился в 1978 г., окончил в 2001 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ассистент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ по численным методам в механике композитов.

A. I. Kashkarov (b.1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2001. Assistant of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of numerical methods for mechanics of composites.

Алексей Анатольевич Макашов родился в 1983 г., окончил в 2005 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Имеет ряд научных работ по применению метода конечных элементов для решения задач механики композитов.

A. A. Makashov (b.1983) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2005. Post-graduate of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of finite element method applications for solving problems of mechanics of composites.