

А. Н. Морозов, А. В. Скрипкин

## ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ КАК НЕМАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

*С использованием интегрального уравнения Вольтерра второго рода проведено описание флуктуаций скорости сферической броуновской частицы, находящейся в вязкой безграничной среде. Показано, что эти флуктуации представляют собой немарковский случайный процесс и имеют характерные особенности, отличающие их от флуктуаций в классическом представлении. Проведено сравнение резонансных кривых для осцилляторов в классическом случае и при описании с помощью интегрального уравнения.*

Классическое рассмотрение движения броуновской частицы в вязкой среде, при котором сила сопротивления, действующая на нее, считается пропорциональной скорости, приводит к марковскому характеру флуктуаций скорости частицы [1]. Однако, как показано в работе [2] для случая движения плоской стенки в вязкой среде, использование выражения для силы сопротивления, учитывающего увлечение вязкой жидкости, приводит к тому, что флуктуации скорости стенки становятся немарковским случайным процессом. При этом флуктуации скорости приобретают характер фликкер-шума [3] в области низких частот, в то время как при классическом рассмотрении спектральная плотность этих флуктуаций в этой области частот стремится к постоянной величине [4]. В данной работе проведено описание движения сферической частицы в неограниченной вязкой среде с использованием для описания силы сопротивления выражения, полученного в работе [5].

**Частица в вязкой среде.** Рассмотрим движение шарообразной броуновской частицы радиуса  $R$  и массы  $M$  в среде (жидкости или газе) с кинематической вязкостью  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . Уравнение движения такой частицы имеет вид

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где  $V(t)$  — скорость частицы,  $F(t)$  — внешняя сила, действующая на частицу,  $\xi(t)$  — случайная сила. Запишем

$$F(t) = F_0(t) + F_c(t), \quad (2)$$

где  $F_c(t)$  — сила сопротивления,  $F_0(t)$  — сумма остальных внешних заданных сил.

Уравнение (1) с учетом выражения (2) примет вид

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F_0(t) + F_c(t) + \xi(t). \quad (3)$$

Когда случайное воздействие  $\xi(t)$  является производной от процесса с независимыми приращениями (например, представляет собой белый гауссов шум), а сила сопротивления  $F_c(t) = F_{c0}(t)$  записывается в виде

$$F_{c0}(t) = -\gamma V(t), \quad (4)$$

где  $\gamma$  — коэффициент вязкого трения, то скорость частицы  $V(t)$  описывается марковским случайным процессом, вследствие чего для нее можно определить любые  $L$ -мерные характеристические функции, а значит, и любые  $L$ -мерные функции распределения [6]. Такой подход приводит, в частности, к следующей функции спектральной плотности для флуктуаций скорости частицы  $V(t)$  [4]:

$$G_V(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (5)$$

где  $\alpha = 2\gamma kT/M^2$ ,  $\beta = \gamma/M$  и для шарообразной частицы  $\gamma = 6\pi\rho\nu R$ . Для низких частот спектральная плотность  $G_V(\omega)$  стремится к постоянной величине:

$$G_V(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2kT}{\gamma}. \quad (6)$$

Однако, как показано в работе [5], в случае движения частицы в неограниченной вязкой среде, соотношение для силы сопротивления имеет вид

$$F_c(t) = -2\pi\rho R^3 \left[ \frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (7)$$

В последнем выражении момент времени  $t = 0$  принят за начало движения частицы. На рис. 1 показаны графики функций  $F_{c0}(t)$  и  $F_c(t)$ . При этом принято, что  $V(t) = V_0 \cos(2\pi t)$ ,  $V_0 = 1$  м/с. Из графиков хорошо видно существенное отличие сил сопротивления, описываемых выражениями (4) и (7).

На рис. 2 изображена зависимость силы сопротивления (7) от скорости частицы при  $t \rightarrow \infty$  для разных  $R$ , причем  $V(t) = V_0 \cos(2\pi t)$ ,  $V_0 = 1$  м/с,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Легко видеть, что график зависимости  $F_c(V)$  имеет вид, напоминающий петлю гистерезиса для магнитного материала на участке линейной намагниченности, зеркально отображенной относительно оси скоростей.

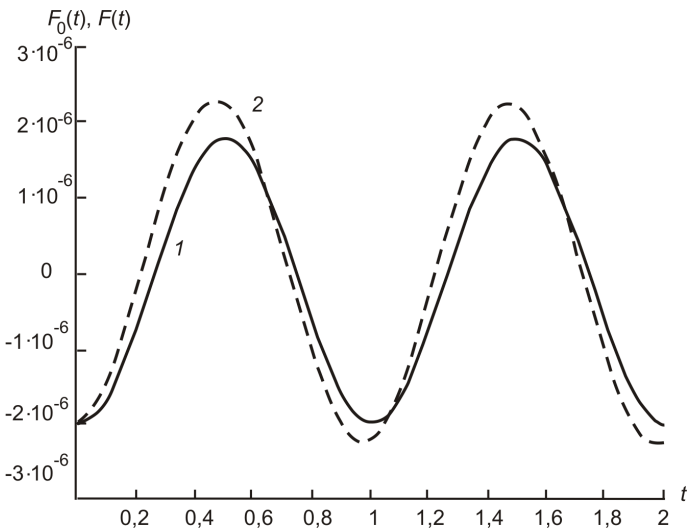


Рис. 1. Графики функций  $F_{c0}(t)$  (1) и  $F_c$  (2) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $R = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $V(t) = V_0 \cos(2\pi t)$ ,  $V_0 = 1 \text{ м/с}$

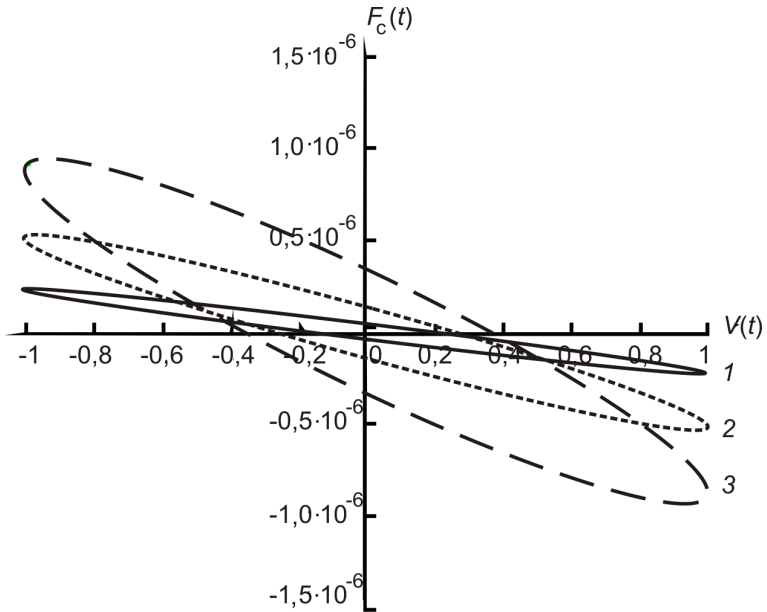


Рис. 2. Зависимость силы сопротивления  $F_c(t)$  от скорости;  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $V(t) = V_0 \cos(2\pi t)$ ,  $V_0 = 1 \text{ м/с}$  для радиусов частицы  $R = 10^{-4} \text{ м}$  (1),  $R = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  (2),  $R = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  (3)

Подставляя выражение (7) в уравнение (3), получим следующую зависимость:

$$\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3\right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi\rho\nu RV(t) + 6\rho R^2\sqrt{\pi\nu} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F_0(t) + \xi(t). \quad (8)$$

Введя замены

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad (9)$$

$$A = \frac{6\pi\rho\nu R}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad B = R\sqrt{\frac{1}{\pi\nu}}, \quad (10)$$

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{F_0(t)}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad \tilde{\xi}(t) = \frac{\xi(t)}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad (11)$$

придем к выражению

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}}\right) Z(\tau) d\tau = \tilde{F}_0(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (12)$$

в котором учтено, что  $V(t) = \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau$ , так как  $V(0) = 0$ . Выражение (12) описывает случайный процесс  $Z(t)$ , являющийся в этом случае немарковским случайным процессом. Таким образом, использование для силы сопротивления выражения (7), вместо формулы (4), приводит к необходимости применения интегральных уравнений, а, следовательно, и теории немарковских процессов [7].

Решение интегрального уравнения (12) имеет вид [8]

$$Z(t) = \int_0^t (\delta(t-\tau) - R(t,\tau)) (\tilde{F}_0(\tau) + \tilde{\xi}(\tau)) d\tau, \quad (13)$$

где резольвента

$$R(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,\tau). \quad (14)$$

В последнем выражении члены ряда определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$K_{n+1}(t,\tau) = \int_{\tau}^t K_1(t,s) K_n(s,\tau) ds, \quad (15)$$

где

$$K_1(t,\tau) = A \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}}\right). \quad (16)$$

Вычисление по формуле (15) приводит к следующим выражениям для первых членов ряда (14):

$$K_2(t,\tau) = -A^2 [(t-\tau) + 4B(t-\tau)^{1/2} + \pi B^2], \quad (17)$$

$$K_3(t, \tau) = A^3 \left[ \frac{1}{2}(t - \tau)^2 + 4B(t - \tau)^{3/2} + 3\pi B^2(t - \tau) + 2\pi B^3(t - \tau)^{1/2} \right], \quad (18)$$

$$K_4(t, \tau) = -A^4 \left[ \frac{1}{6}(t - \tau)^3 + \frac{32}{15}B(t - \tau)^{5/2} + 3\pi B^2(t - \tau)^2 + \frac{16}{3}\pi B^3(t - \tau)^{3/2} + \pi^2 B^4(t - \tau) \right]. \quad (19)$$

Из выражений (16)–(19) видно, что ряд (14) является знакочередующимся, причем резольвента  $R(t, \tau)$  является функцией только от разности аргументов:  $R(t, \tau) = R(t - \tau)$ . Из (16)–(19) следует также, что абсолютные значения членов ряда (за исключением первого) возрастают при росте  $t - \tau$  таким образом, что  $|K_n(t - \tau)| \rightarrow \infty$  при  $(t - \tau) \rightarrow \infty$ . График функции  $R(t - \tau)$  (для первых четырех членов) при  $A = 250 \text{ с}^{-1}$  и  $B = 0,05 \text{ с}^{1/2}$  показан на рис. 3. Видно, что график быстро стремится к нулю с ростом  $t - \tau$ . Для не слишком больших  $t$  ( $t \leq 10 \text{ с}$ ) и  $A \ll 1 \text{ с}^{-1}$  ряд (14) с большой степенью точности можно заменить следующей суммой:

$$R(t - \tau) = A - \pi A^2 B^2 + \frac{AB}{\sqrt{t - \tau}} - 4BA^2 \sqrt{t - \tau}. \quad (20)$$

**Свободная частица.** Будем далее считать, что  $\tilde{F}_0(t) = 0$ . В этом случае выражение (13) примет вид

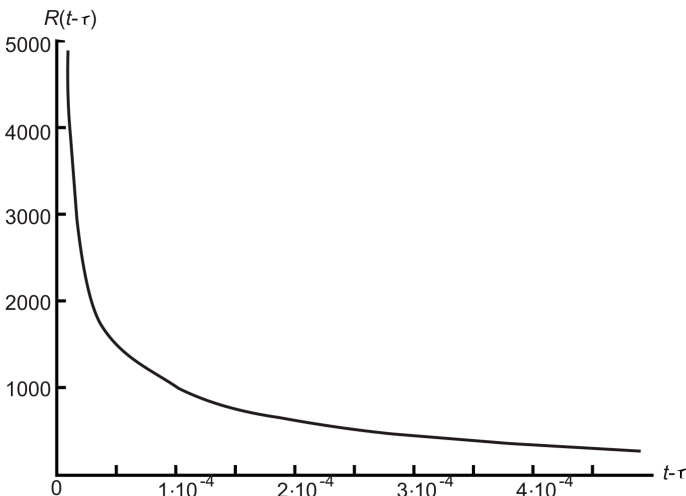


Рис. 3. График функции  $R(t - \tau)$  (для первых четырех членов) при  $A = 250 \text{ с}^{-1}$  и  $B = 0,05 \text{ с}^{1/2}$

$$Z(t) = \int_0^t [\delta(t - \tau) - R(t - \tau)] \tilde{\xi}(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Используя метод описания немарковских случайных процессов, изложенный в работе [7], для одномерной и  $L$ -мерной характеристических функций случайного процесса  $Z(t)$ , задаваемого интегральным уравнением (21), для не слишком больших  $t$  ( $t \leq 10$  с) и  $A \ll 1$  с<sup>-1</sup> получим

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\sigma} \lambda^2 \left( A^2 B^2 \ln \frac{t}{\delta t} - 4ABC\sqrt{t} + \right. \right. \\ \left. \left. + (C^2 - 8A^2 B^2) t + \frac{16}{3} A^2 BC \sqrt{t^3} + 8A^4 B^2 t^2 \right) \right], \quad (22)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ -\tilde{\sigma} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \lambda_l \lambda_k Q_{lk}(t_l, t_k) \right]. \quad (23)$$

Здесь  $\tilde{\sigma}$  — интенсивность случайного процесса  $\tilde{\xi}(t)$ ,  $\delta t$  — малая положительная величина, а функция  $Q_{lk}(t_l, t_k)$  имеет вид

$$Q_{lk}(t_l, t_k) = \frac{1}{2} C^2 t_k - ABC (\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k} - \sqrt{t_l - t_k}) + \\ + \frac{4}{3} A^2 BC \left( \sqrt{t_l^3} + \sqrt{t_k^3} - \sqrt{(t_l - t_k)^3} \right) - 4A^3 B^2 \sqrt{t_k t_l} + \\ + A^2 B^2 (1 + 8A^2(t_l - t_k)) \ln \frac{\sqrt{t_k} + \sqrt{t_l}}{\sqrt{t_l - t_k} + \delta t + \sqrt{\delta t}} + 4A^4 B^2 \sqrt{t_k t_l^3}. \quad (24)$$

В выражениях (22) и (24)  $C = -A + \pi A^2 B^2$ . График функции  $g_1(\lambda; t)$  при различных  $t$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$  м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>,  $A = 0,01$  с<sup>-1</sup>,  $B = 0,1$  с<sup>1/2</sup> показан на рис. 4.

Многомерные характеристические функции  $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ , задаваемые выражением (23), позволяют найти моменты любого порядка случайного процесса  $Z(t)$  [6]. В частности, для корреляционной функции получим

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = 2\tilde{\sigma} Q_{12}(t_1, t_2). \quad (25)$$

Для нахождения спектральной плотности случайного процесса  $Z(t)$  найдем преобразование Лапласа уравнения (12) при  $\tilde{F}_0(t) = 0$ , что позволяет записать его в изображениях:

$$\hat{Z}(p) \left[ 1 + A \left( \frac{1}{p} + \frac{B\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \right) \right] = \hat{\xi}(p) \quad (26)$$

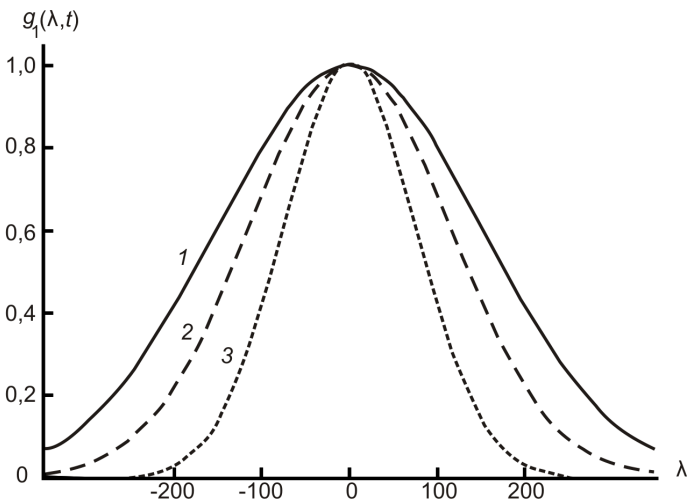


Рис. 4. График функции  $g_1(\lambda; t)$  при  $\tilde{\sigma} = 0,5 \text{ м}^2/\text{с}^3$ ,  $A = 0,01 \text{ с}^{-1}$ ,  $B = 0,1 \text{ с}^{1/2}$ ,  $t = 0,01 \text{ с}$  (1),  $t = 0,1 \text{ с}$  (2),  $t = 0,5 \text{ с}$  (3)

или

$$\hat{Z}(p) = \frac{p}{p + AB\sqrt{\pi p} + A} \hat{\xi}(p), \quad (27)$$

где  $\hat{Z}(p)$  и  $\hat{\xi}(p)$  — изображения функций  $Z(t)$  и  $\tilde{\xi}(t)$  соответственно.

В связи с тем, что спектральная плотность  $G_{\tilde{\xi}} = \tilde{\sigma}$  процесса  $\tilde{\xi}(t)$  постоянна и равна

$$G_{\tilde{\xi}} = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3\right)^2}, \quad (28)$$

то в соответствии с формулой (27) спектральная плотность процесса  $Z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  принимает вид

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{i\omega}{i\omega + AB\sqrt{\pi \cdot i\omega} + A} \right|^2 G_{\tilde{\xi}} \quad (29)$$

или

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2B^2\pi\omega + A^2B\sqrt{2\pi\omega} + A^2} G_{\tilde{\xi}}. \quad (30)$$

На рис. 5 приведены графики спектральных плотностей для различных значений  $A$  и  $G_{\tilde{\xi}} = 1 \text{ м}^2/\text{с}^3$ , задаваемые формулой (30).

Из последнего выражения может быть найдена спектральная плотность флуктуаций скорости броуновской частицы  $V(t)$ . Согласно выражению (9)  $G_V(\omega) = \frac{G_Z(\omega)}{\omega^2}$  или

$$G_V(\omega) = \frac{G_{\tilde{\xi}}}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2B^2\pi\omega + A^2B\sqrt{2\pi\omega} + A^2}. \quad (31)$$

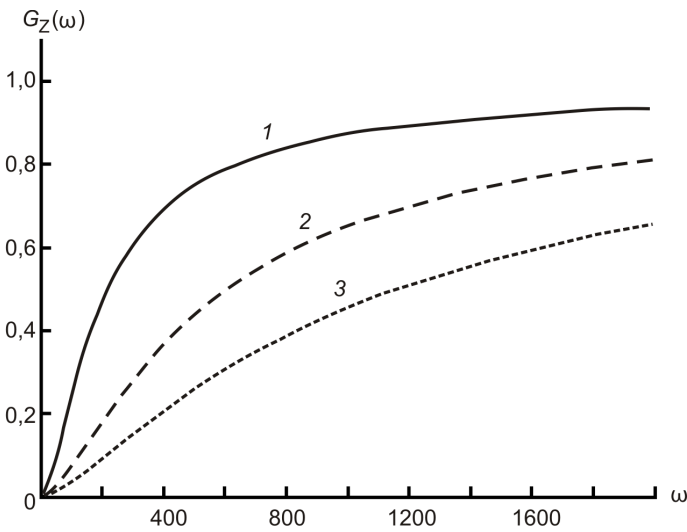


Рис. 5. Графики спектральных плотностей для  $A = 100 \text{ с}^{-1}$  (1),  $A = 200 \text{ с}^{-1}$  (2),  $A = 300 \text{ с}^{-1}$  (3),  $B = 0,05 \text{ с}^{1/2}$  и  $G_{\xi} = 1 \text{ м}^2/\text{с}^3$

Сравнение формул (31) и (5) показывает, что использование для силы сопротивления выражения (7), вместо формулы (4), приводит к существенному различию спектральных плотностей флуктуаций скорости частицы, в особенности в полосе низких и средних частот. При  $\omega \rightarrow \infty$  функции (5) и (31) совпадают. На рис. 6 показаны в сравнении графики спектральных плотностей, задаваемые формулами (5) и (31).

**Осциллятор.** Пусть теперь на сферическую частицу вдоль оси  $X$ , кроме случайной силы и силы сопротивления, действует возвращаю-

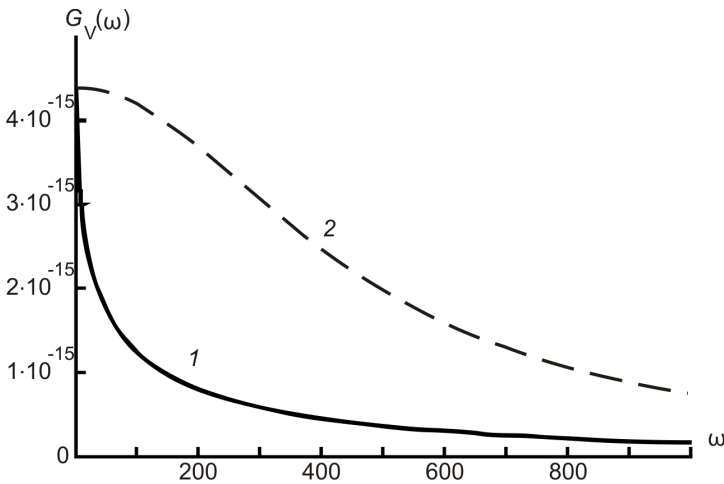


Рис. 6. Графики спектральных плотностей, задаваемые формулами (5) (кривая 2) и (31) (кривая 1) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $R = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $M = 4 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$ ,  $T = 300 \text{ К}$



щая сила  $F_0(t) = -kX(t)$ . В этом случае уравнение (12) примет вид

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}}\right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{k}X(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (32)$$

где

$$\tilde{k} = \frac{k}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}. \quad (33)$$

Найдем в этом случае спектральные плотности процессов  $Z(t)$  и  $V(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Учтя, что преобразование Лапласа функций  $X(t)$  и  $Z(t)$  связаны соотношением  $\hat{X}(p) = \hat{Z}(p)/p^2$ , для уравнения (32) в изображениях имеем

$$\hat{Z}(p) \left[1 + \frac{k}{p^2} + \frac{AB\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} + \frac{A}{p}\right] = \hat{\xi}(p), \quad (34)$$

или

$$\hat{Z}(p) = \frac{p^2}{p^2 + AB\sqrt{\pi p^3} + Ap + \tilde{k}} \hat{\xi}(p). \quad (35)$$

Выполнив процедуру, проведенную при выводе формул (30) и (31), для спектральных плотностей процессов  $Z(t)$  и  $V(t)$  получим

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^4}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\tilde{\xi}}, \quad (36)$$

$$G_V(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\tilde{\xi}}. \quad (37)$$

Из выражения (37) легко найти спектральную плотность для координаты  $X(t)$ . Получим

$$G_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\tilde{\xi}}. \quad (38)$$

Сравним последнее выражение со спектральной плотностью классического осциллятора, которая получается из уравнения (38) при условии, что  $B = 0 \text{ с}^{1/2}$ , а в формулах (10) (для коэффициента  $A$ ), (28) и (33) слагаемое  $\frac{2}{3}\pi\rho R^3$ , стоящее в знаменателе, обращается в нуль. В этом случае выражение (38) переходит в формулу

$$G_X^{\text{клас}}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (A'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_\xi, \quad (39)$$

где теперь  $A' = \frac{6\pi\rho\nu R}{M}$ ,  $k' = \frac{k}{M}$ ,  $G'_\xi = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{M^2}$ .

На рис. 7–10 изображены спектральные плотности, задаваемые выражениями (38) и (39) при  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н}/\text{м}$ ,  $R = 5 \text{ мкм}$  (рис. 7),  $R = 10 \text{ мкм}$  (рис. 8),  $R = 100 \text{ мкм}$  (рис. 9),  $R = 1 \text{ мм}$  (рис. 10). Плотность частицы при этом принимается равной плотности среды.

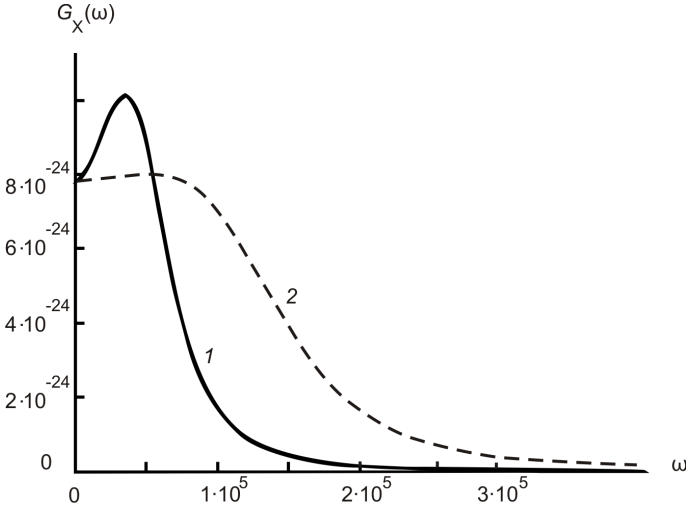


Рис. 7. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (38) (кривая 1) и (39) (кривая 2) при  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н}/\text{м}$ ,  $R = 5 \text{ мкм}$

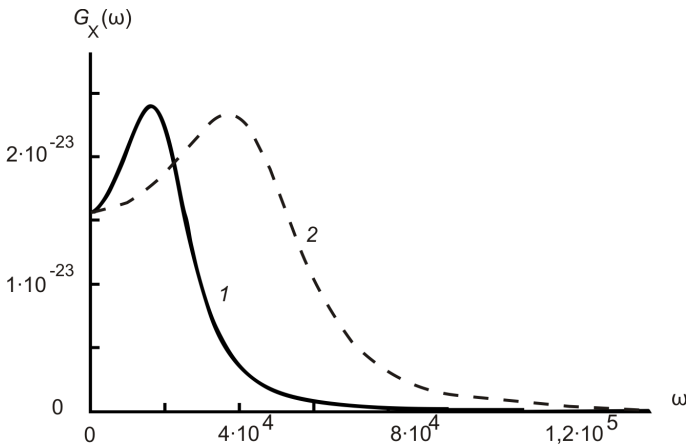


Рис. 8. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (38) (кривая 1) и (39) (кривая 2) при  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н}/\text{м}$ ,  $R = 10 \text{ мкм}$

Из графиков видно, что при малых радиусах частиц, когда классическое рассмотрение приводит к слабо выраженному резонансу, в случае использования выражения (7) для силы сопротивления, наблюдается типичная резонансная кривая (рис. 7). С увеличением размера частиц формы кривых становятся похожими, при этом классическому случаю соответствует большее амплитудное значение спектральной плотности (рис. 8, 9). Этот эффект становится наиболее заметным при больших размерах частиц (см. рис. 10). Из графиков видно также, что максимум спектральной плотности в классическом случае соответствует более высокой резонансной частоте. Этот факт является

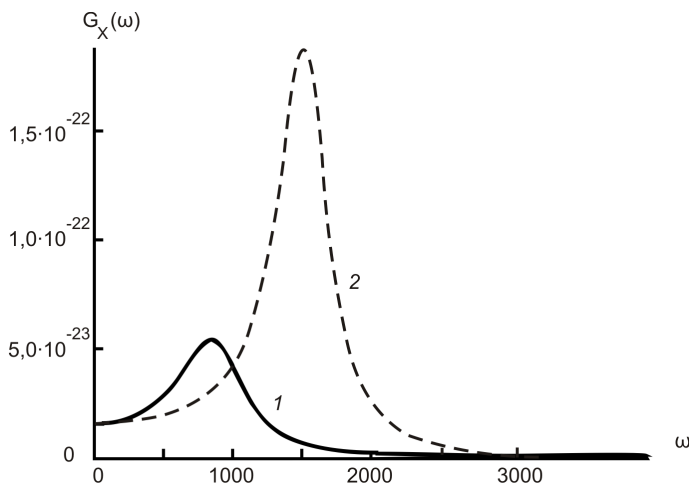


Рис. 9. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (38) (кривая 1) и (39) (кривая 2) при  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н}/\text{м}$ ,  $R = 100 \text{ мкм}$

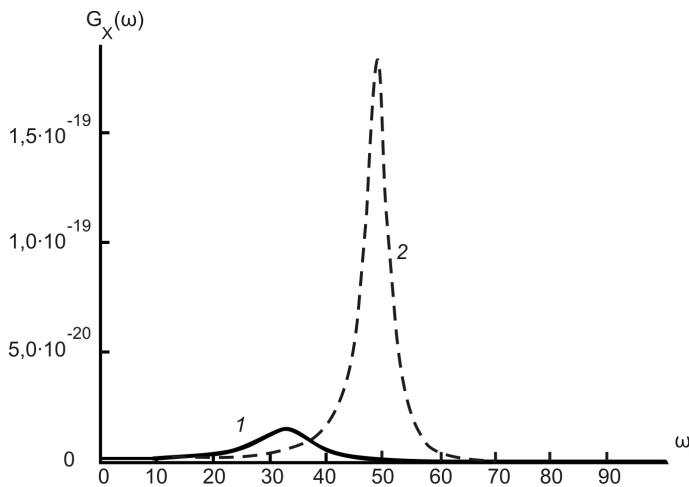


Рис. 10. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (38) (кривая 1) и (39) (кривая 2) при  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н}/\text{м}$ ,  $R = 1 \text{ мм}$

следствием того, что при неклассическом описании к массе частицы добавляется некоторая “эффeктивная” масса  $\frac{2}{3}\pi\rho R$ .

**Вывод.** Проведенное описание движения броуновской частицы шарообразной формы в неограниченной вязкой среде позволило установить, что флуктуации ее скорости представляют собой немарковский случайный процесс. Полученные резонансные кривые для механического осциллятора, размещенного в вязкой безграничной среде, по своей форме отличаются от классических. Последний результат может иметь существенное значение для устройств демпфирования колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение. – М.: ОНТИ, 1936. – 602 с.
2. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Применение уравнения Вольтерра второго рода для описания вязкого трения и теплопроводности // Вестник МГТУ. Сер. “Естественные науки”. – 2006. – № 3. – С. 62–71.
3. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. Новое в исследованиях  $1/f$ -шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, вып. 1. – С. 151–176.
4. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
6. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
7. Морозов А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ. Сер. “Естественные науки”. – 2004. – № 3. – С. 47–56.
8. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

Статья поступила в редакцию 26.05.2006

Морозов Андрей Николаевич, родился в 1959 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1982 г., д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

A.N. Morozov (b. 1959), graduated from the Bauman Moscow High Technical School in the 1982. DSc (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of high precision measuring systems and physical kinetics theory.

Скрипкин Алексей Владимирович, родился в 1983 г., окончил Курский государственный университет в 2005 г. Аспирант кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор двух работ в области взаимодействия электромагнитных полей с проводящими средами.

A.V. Skripkin (b. 1983), graduated from Kursk State University in the 2005. Post-graduate student of “Physics” Department of the Bauman Moscow Technical University. Author of 2 publications in the field of interaction of electromagnetic waves with conducting mediums.