КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.374

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ

К.И. Романов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: romanovki@mail.ru

Введена операторная переменная, названная универсальной, которая дает возможность перехода от исходного дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, а затем к анализу двух мод движения в задачах теории ползучести. Указанный прямой и обратный переходы позволяют качественно определить характеристики устойчивости.

Ключевые слова: нелинейный потенциал, ползучесть, характеристики устойчивости.

A UNIVERSAL VARIABLE IN CREEP PROBLEMS

K.I. Romanov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
e-mail: romanovki@mail.ru

The operator variable named a universal variable is introduced, which makes it possible to transfer from the initial partial differential equation to the ordinary differential equation and further to the analysis of two modes of motion in problems of creep theory. These direct and inverse transfers allow the stability characteristics to be determined qualitatively.

Keywords: nonlinear potential, potential, creep, stability characteristics.

В процессе ползучести шарнирно закрепленной балки, нагруженной продольной силой P, определено числовое критическое время с помощью разделения переменных [1]

$$u = A(t) f(x), \tag{1}$$

где u — прогиб, A и f — функции своих аргументов.

Внешний потенциал, учитывающий особенности нагружения, определяется с помощью диссипативной функции

$$W = P\dot{\lambda},$$

где $\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t$ — скорость перемещения точки приложения силы.

В соответствии с формулой для балки длиной l

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

имеет место равенство

$$W = P\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dx.$$

Удельная мощность в процессе ползучести определяется производной

$$w = \frac{\partial W}{\partial x} = P\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \quad (2)$$

Внутренний потенциал, соответствующий уравнению состояния нелинейно-вязкого материала, может быть получен на основе схемы чистого изгиба $w = M\dot{\chi}$, где M — изгибающий момент, $\dot{\chi}$ — скорость изменения кривизны изогнутой оси, связанная с M соотношением

$$\dot{\chi} = \frac{k}{J_n^n}M^n.$$

Здесь k и n — постоянные, зависящие от температуры, J_n — обобщенный момент инерции поперечного сечения.

Уравнение равновесия $M = Pu$ приводит к диссипативной функции по методу сил

$$w = \frac{kP^{n+1}}{J_n^n}u^{n+1}.$$

Используя закон сохранения мощности формула (2) и последнее соотношение, приходим к основному уравнению

$$P\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{kP^{n+1}}{J_n^n}u^{n+1}.$$

Введем вместо разделения переменных по формуле (1) универсальную переменную по формуле [2] $z = x - ct$. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dz}\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{kP^n}{cJ_n^n}u^{n+1}$$

или

$$\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right] = -\frac{2kP^n}{cJ_n^n}u^{n+1}. \quad (3)$$

Решение этого уравнения вызывает затруднения из-за неопределенности граничных условий, наложенных на искомую функцию прогиба. Поэтому представляет интерес исследование интегральной кривой в зависимости от каждой переменной (x или t) в отдельности. Вследствие равенства $du/dz = \partial u/\partial x$ имеем на основе уравнения (3) моду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] = -\frac{2kP^n}{cJ_n^n}u^{n+1} \quad (4)$$

с наложенными на прогиб условиями по концам балки: при $x = 0$ $u = 0$ и $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ и при $x = l$ $u = 0$ и $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$.

Приближенно это уравнение удовлетворяется, например, кривой $u = a\sin(\pi x/l)$, где a — постоянная, определяемая с помощью уравнения (4) одним из вариантов метода взвешенных остатков [3].

Отметим, что в частном случае $n = 1$ уравнение (4) приводится к задаче на собственные значения, когда решение определяет координатную функцию с точностью до постоянной.

Поскольку $du/dz = -\left(\partial u/\partial t\right)/c$, то обратимся в аналогичной постановке к задаче с начальным условием: определить вид зависимости прогиба от времени, если при $t = 0$ $y = y(0)$. На основе уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{2kP^n c^2}{J_n^n} u^{n+1} \tag{5}$$

при $P =$ const будем отыскивать решение в виде

$$u = u(0)(1 - at)^{-m}, \tag{6}$$

где a и m — постоянные.

Подставим это уравнение в (5). Тогда получим $m = 3/(n-1)$. Значение m в (6) можно квалифицировать как показатель Ляпунова в задаче устойчивости [4]. Якобиан преобразования координат $\partial_0 u = \partial u/\left[\partial u(0)\right] = (1 - at)^{-3/(n-1)}$ отличается от своего значения в способе определения критического времени с разделением переменных [3], в котором этот показатель определяет разбегание траекторий по уравнению

$$\partial_0 A = \left[1 - \frac{2\,(n-1)\,kl^2 I A_0^{n-1} P^n t}{\pi^3 J_n^n}\right]^{-\frac{n}{n-1}},$$

где $I = I(n)$.

Таким образом, операторный метод решения дает возможность в общем виде выяснить свойства решения задачи в частных производных. Ограничением указанной схемы является отсутствие числового значения критического времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р о м а н о в К. И. Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. Вып. 33. М.: Машиностроение, 1993. С. 139–151.
2. С т а н ю к о в и ч К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
3. Б р е б б и я К., У о к е р С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
4. Р о м а н о в К. И. Статистическая постановка задачи устойчивости при ползучести // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 134–139.

REFERENCES

1. *Romanov K. I.* Buckling of nonlinear viscous bars. Raschety na prochnost' — Strength Analysis, 1993, vol. 33, pp. 139–151 (in Russian).
2. *Stanyukovich K. P.* Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoy sredy [Unsteady motion of a continuum]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 854 p.
3. *Brebbia C. A.*, *Walker S.* Boundary element techniques in engineering, London, 1980, 210 p. (Russ. ed.: Brebbiya K., Uoker S. Primenenie metoda granichnykh elementov v tekhnike. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1982, 248 p.)
4. *Romanov K. I.* Static statement of the stability problem under creep. Mechanics of solids, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 277–282. doi: 10.3103/S0025654408020143

Статья поступила в редакцию 5.04.2010

Константин Игоревич Романов — д-р техн. наук, профессор кафедры "Прикладная механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ в области механики деформируемого твердого тела.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

K.I.Romanov (b. 1952) — Dr. Sci. (Eng.), professor of "Applied Mechanics" Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 120 publications in the field of mechanics of deformable solid.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.