УДК 519.218.27

А. В. Калинкин, А. В. Мастихин

МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ ВЕЙСА И ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

Предложенный в работе [17] метод построения замкнутого решения уравнений Колмогорова для экспоненциальной (двойной) производящей функции переходных вероятностей применен к двумерному марковскому процессу гибели специального вида. Получено интегральное представление для производящей функции переходных вероятностей, использующее специальные функции. Приведены выражения для математического ожидания и дисперсии случайного процесса, и установлена предельная теорема.

Определение марковского процесса эпидемии. На множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2 = 0,1,\ldots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t),\xi_2(t))$, $t\in[0,\infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1,\beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1,\alpha_2)\}$. Пусть при $t\to 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\mu\ge 0)$

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}(t) = p_1\alpha_1\alpha_2 t + o\,(t),\quad P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}(t) = p_2\alpha_1\alpha_2 t + o\,(t),$$

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}(t) = \mu\alpha_1 t + o\,(t),\quad P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1-(\alpha_1\alpha_2+\mu\alpha_1)t + o\,(t). \tag{1}$$

Здесь $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0$, $p_1+p_2 = 1$. Введем производящие функции $(|s_1|\le 1,\ |s_2|\le 1)$

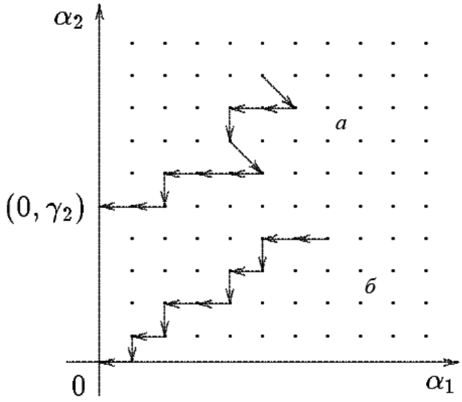
$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2},\qquad (\alpha_1,\alpha_2)\in N^2. \tag{2}$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае процесса $\xi(t)$ равносильна уравнению в частных производных [2, 15]:

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial t} = (p_2s_1^2+p_1s_1-s_1s_2)\frac{\partial^2 F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_1\partial s_2} + \mu\,(1-s_1)\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_1}, \tag{3}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(0;s_1,s_2) = s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}$.

Событие $\{\xi(t) = (\alpha_1,\alpha_2)\}$ интерпретируется как наличие совокупности из α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2. Следующее



Скачки марковских процессов гибели на N^2

описание принято в вероятностных моделях распространения эпидемии [2–4]. Частицы типа T_1 интерпретируются как больные особи, частицы типа T_2 как здоровые особи, восприимчивые к инфекционному заболеванию. Можно полагать, что через случайное время $\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\{\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)} \le t\} = 1 - e^{-\alpha_1\alpha_2 t}$, происходит контакт частицы типа T_1 с частицей типа T_2. Эта пара частиц с вероятностью p_1 заменяется частицей типа T_1 (заболевшая особь удаляется из популяции) — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 - 1)$, или с вероятностью p_2 заменяется двумя частицами типа T_1 (заболевшая особь не удаляется из популяции) — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 - 1)$. Кроме того, через случайное время $\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\{\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)} \le t\} = 1 - e^{-\mu\alpha_1 t}$, одна из частиц типа T_1 гибнет — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$. Предполагается, что случайные величины $\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ независимы; в состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \min(\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}, \tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)})$. Пример реализации процесса изображен на рисунке, a.

Задача решения уравнения (3). Марковский процесс $\xi(t)$ в случае $p_1 = 1$ называется моделью эпидемии Вейса [6], [12], а в случае $p_2 = 1$ называется моделью эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика [1], [2]. Процесс $\xi(t)$ принадлежит специальному классу марковских процессов, определенному Б.А. Севастьяновым [15]; в работе [16] описан наиболее общий процесс с двумя типами частиц T_1, T_2 и двумя комплексами взаимодействия $\varepsilon^1 = (1, 1)$, $\varepsilon^2 = (1, 0)$ — уравнение такого процесса обобщает уравнение (3). Обзор задач для вероятностных моделей процессов эпидемии содержится в статье А.Н. Старцева [12].

Имеется обширная литература по точным решениям уравнений различных марковских процессов эпидемии и способам их вывода (см. [4], [5], обзор [10], [11], [18] и др.). Для уравнения (3) в случае $p_1 = 1$ выражение для $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ известно (см. далее замечание 1). В случае $p_2 = 1$ Дж. Гани [7] получил решение уравнения (3) методом преобразования Лапласа и выписал формулы для переходных вероятностей. В. Сискинд [8] получил те же формулы, решив (3) способом прямого рекурсивного интегрирования. Несколько более простые ряды для решения уравнения (3) дал С. Сакино [9]. Все эти явные выражения для $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ имеют необозримо громоздкий вид; например решение, найденное в работе [7], занимает две страницы журнального текста. Такие формулы малопригодны, в частности, для вывода асимптотических следствий о поведении марковского процесса $\xi(t)$.

А. Баруча-Рид [3] и Н. Бейли [4] ставят задачу сведения выражений для производящей функции переходных вероятностей к виду, содержащему известные функции. В работе [4] обсуждается необходимость вывода замкнутых решений для уравнений эпидемии.

В настоящей работе построение решения для уравнения (3) основано на положениях теории ветвящихся случайных процессов с независимыми частицами [14].

Нелинейное свойство ветвящихся процессов и процесс эпидемии. Простейшим ветвящимся процессом является марковский процесс на множестве состояний N^2 такой, что при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$)

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}(t) = \mu_1\alpha_1 t + o\,(t), \quad P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}(t) = \mu_2\alpha_2 t + o\,(t),$$

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)t + o\,(t).$$

Производящая функция переходных вероятностей (2) удовлетворяет уравнению в частных производных (см. [14], гл. 4, § 3, уравнение (12)):

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial t} = \mu_1(1-s_1)\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_1} + \mu_2(1-s_2)\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_2}, \tag{4}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Состояние (α_1, α_2) интерпретируется как наличие совокупности из α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2. Через случайное время $\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\left\{\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)} \leq t\right\} = 1 - e^{-\mu_1\alpha_1 t}$, одна из частиц типа T_1 гибнет — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$. Кроме того, через случайное время $\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\mathbf{P}\left\{\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)} \leq t\right\} = 1 - e^{-\mu_2\alpha_2 t}$, гибнет частица типа T_2 — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 - 1)$. Случайные величины $\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ независимы; в состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \min(\tau^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}, \tau^2_{(\alpha_1,\alpha_2)})$. Пример реализации такого процесса гибели изображен на рисунке, *б*.

Решение уравнения первого порядка (4) находится стандартными методами и имеет вид *свойства ветвления* ([14], гл. 4, § 2, формула (3)):

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = (1 - e^{-\mu_1 t} + s_1 e^{-\mu_1 t})^{\alpha_1}(1 - e^{-\mu_2 t} + s_2 e^{-\mu_2 t})^{\alpha_2}. \tag{5}$$

Теоремой 1 настоящей работы установлено, что в случае марковского процесса эпидемии Вейса решение уравнения в частных производных второго порядка (3) имеет вид, обобщающий формулу (5). Для построения такого представления для $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ применяется метод, предложенный в работе [17]. Рассматриваются одновременно первое и второе уравнения Колмогорова для экспоненциальной (двойной) производящей функции переходных вероятностей и находится решение этих уравнений в виде ряда с тремя разделенными переменными. Затем строится интегральное представление решения, при этом подынтегральное выражение содержит специальные функции. Дальнейшие преобразования приводят замкнутое решение к виду, аналогичному нелинейному свойству (5).

В теореме 1 решение уравнения (3) дано при $p_1 = 1$, но изложенный метод применим при труднопреодолимой технике вычислений к построению замкнутого решения при $p_1 < 1$.

Отдельной задачей [20] является нахождение интегрального представления решения уравнения (3) при $\mu = 0$ в виде, обобщающем формулу (5).

Замкнутое решение уравнений Колмогорова. Ограничимся рассмотрением процесса $\xi(t)$ в случае $p_1 = 1$. Введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) =$$

$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}. \quad (6)$$

Первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$ записываются в виде уравнений в частных производных [16, 17]:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = z_1 z_2 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \mu z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = (s_1 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu(1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1}, \quad (8)$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Далее нам потребуется функция ($x > 0$, $y > 0$)

$$H(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux}) J_0(2\sqrt{vy}) {}_0F_2(1, 1; -uv)\, du dv, \quad (9)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль, ${}_0F_2(1,1;z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция,

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!k!}, \quad {}_0F_2(1,1;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^3}.$$

Теорема 1. *Пусть марковский процесс $\xi(t)$ на множестве состояний N^2 задан соотношениями* (1) *и* $p_1 = 1$. *Производящая функция переходных вероятностей имеет вид*

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \Bigg((s_1 e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1} (1 - e^{-y} + s_2 e^{-y})^{\alpha_2} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \Bigg(\frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \varphi_1^{\alpha_1}(t;x,u;s_1) \varphi_2^{\alpha_2}(y,v;s_2) e^{(u-\mu)v} du \Bigg) dv \Bigg) H(x,y)\, dx dy, \tag{10}$$

где линейные по переменным s_1, s_2 функции $\varphi_1(t;x,u;s_1)$, $\varphi_2(y,v;s_2)$ определены формулами

$$\varphi_1(t;x,u;s_1) = \mu(1 - e^{-(x+\mu)t})/u + s_1 e^{-(x+\mu)t},$$

$$\varphi_2(y,v;s_2) = 1 - e^{-y-v} + s_2 e^{-y-v}.$$

Доказательство. Применим к линейным уравнениям в частных производных второго порядка (7), (8) метод Фурье:

а) *метод разделения переменных*. Решение ищем в форме ряда

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2;s_1,s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1,z_2) C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1,s_2) e^{-\lambda_{\alpha_1\alpha_2} t}. \tag{11}$$

Подставив ряд (11) в уравнения (7) и (8), получаем уравнения для функций $\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1,z_2)$ и $C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1,s_2)$:

$$z_1 z_2 \Bigg(\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1 \partial z_2} \Bigg) + \\ + \mu z_1 \Bigg(\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1} \Bigg) + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} = 0; \tag{12}$$

$$(s_1 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu(1 - s_1) \frac{\partial C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_1} + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_1\alpha_2} = 0; \tag{13}$$

$\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$. Из условий на скачки процесса $\xi(t)$ следует, что для уравнения (13) имеет место краевое условие “$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1,s_2)$

есть многочлен". Тогда последовательность собственных значений $\lambda_{\alpha_1\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1$, $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$, и каждому $\lambda_{\alpha_1\alpha_2}$ соответствует собственная функция

$$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = \left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2 + \mu}\right)^{\alpha_1} (s_2 - 1)^{\alpha_2}.$$

Соответственно, уравнение (12) принимает вид

$$z_1 z_2 \left(\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1 \partial z_2}\right) + \mu z_1 \left(\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1}\right) + (\alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1)\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} = 0.$$

Из условий на скачки процесса $\xi(t)$ следует также, что нас интересует аналитическое при любых z_1, z_2 решение

$$\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}\, e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu) + z_2}.$$

Таким образом, искомый ряд (11) имеет вид

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) =$$
$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}\, e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)+z_2} \left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2 + \mu}\right)^{\alpha_1} (s_2 - 1)^{\alpha_2} e^{-\lambda_{\alpha_1\alpha_2} t}.$$

Значения $A_{\alpha_1\alpha_2}$ определяются из сравнения начального условия $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$ с разложением для экспоненты

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = e^{z_1 s_1 + z_2} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!}(s_2 - 1)^{\alpha_2} =$$

$$= e^{z_2} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!}(s_2 - 1)^{\alpha_2} e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)} e^{z_1(s_1 - \mu/(\alpha_2+\mu))} =$$

$$= e^{z_2} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!}(s_2 - 1)^{\alpha_2} e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2 + \mu}\right)^{\alpha_1}.$$

Получаем $A_{\alpha_1\alpha_2} = 1/(\alpha_1!\alpha_2!)$ и приходим к выражению

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)+z_2} \times$$

$$\times \left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2 + \mu}\right)^{\alpha_1} (s_2 - 1)^{\alpha_2} e^{-(\alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1)t}. \quad (14)$$

Абсолютная сходимость ряда (14) при любых z_1, z_2, s_1, s_2 и $t \in [0, \infty)$ очевидна.

б) *интегральное представление.* Используем следующее представление экспоненты ([13], часть 2, формула (3.5), и часть 1, гл. 2, § 12):

$$e^{-\alpha_1\alpha_2 t} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha_1 tx-\alpha_2 y} H(x,y)\,dxdy,$$

где функция $H(x,y)$ определена формулой (9). Из выражения (14) получаем (изменение порядка интегрирования и суммирования допустимо, так как интеграл сходится абсолютно)

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2;s_1,s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)+z_2} \times$$

$$\times \left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2+\mu}\right)^{\alpha_1} (s_2-1)^{\alpha_2} e^{-\mu\alpha_1 t} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha_1 tx-\alpha_2 y} H(x,y)\,dxdy =$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{z_2} \left\{ \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)} \left[(s_2-1)e^{-y}\right]^{\alpha_2} \times\right.$$

$$\left.\times \left\{ \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \left[\left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2+\mu}\right) e^{-(x+\mu)t} \right]^{\alpha_1} \right\}\right\} H(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{z_1 s_1 e^{-(x+\mu)t}+z_2} \left\{ \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{\left[z_2(s_2-1)e^{-y}\right]^{\alpha_2}}{\alpha_2!} e^{z_1\mu(1-e^{-(x+\mu)t})/(\alpha_2+\mu)} \right\} \times$$

$$\times H(x,y)\,dxdy. \quad (15)$$

Для суммирования ряда в фигурных скобках воспользуемся формулой

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{b^\alpha}{\alpha!(\alpha+\mu)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty v^{k-1} e^{-\mu v + be^{-v}}\,dv, \quad k=1,2,\ldots,$$

и модифицированной функцией Бесселя

$$I_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

(делаем замену $a = z_1\mu(1-e^{-(x+\mu)t})$, $b = z_2(s_2-1)e^{-y}$):

$$\sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_2}}{\alpha_2!} e^{a/(\alpha_2+\mu)} =$$

$$= \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!(\alpha_2+\mu)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{b^{\alpha_2}}{\alpha_2!(\alpha_2+\mu)^k} =$$

$$= e^b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!(k-1)!} \int\limits_0^{\infty} v^{k-1} e^{-\mu v + be^{-v}} dv =$$

$$= e^b + \int\limits_0^{\infty} \sqrt{\frac{a}{v}}\, I_1(2\sqrt{av}) e^{-\mu v + be^{-v}} dv. \quad (16)$$

Из известного представления функции Бесселя

$$I_1(z) = I_{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0+} e^{(z/2)(u+1/u)}\, du$$

нетрудно получить

$$\sqrt{\frac{a}{v}}\, I_1(2\sqrt{av}) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0+} e^{vu+a/u}\, du. \quad (17)$$

Подставляя уравнение (17) в формулу (16), и (16) в выражение (15), получаем окончательно

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{z_1 s_1 e^{-(x+\mu)t} + z_2} \Bigg(e^{z_2(s_2-1)e^{-y}} +$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} \Bigg(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0+} e^{z_1\mu(1-e^{-(x+\mu)t})/u + z_2(s_2-1)e^{-y-v} + (u-\mu)v} du \Bigg) dv \Bigg) H(x,y)\, dxdy. \quad (18)$$

Из определения двойной производящей функции (6), формулы (18) и разложения экспоненты

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$$

следует интегральное представление (10). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Преобразуем ряд (14) к виду

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \\
&= \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} e^{z_1\mu/(\alpha_2+\mu)+z_2} (s_2-1)^{\alpha_2} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \left(s_1 - \frac{\mu}{\alpha_2+\mu}\right)^{\alpha_1} \left(e^{-(\alpha_2+\mu)t}\right)^{\alpha_1} = \\
&\qquad = \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2}(s_2-1)^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\, e^{z_1[\mu/(\alpha_2+\mu)+(s_1-\mu/(\alpha_2+\mu))e^{-(\alpha_2+\mu)t}]} = \\
&= \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} z_2^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\alpha_2} \frac{(s_2-1)^k}{k!(\alpha_2-k)!} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \left(s_1 e^{-(k+\mu)t} + \frac{\mu}{k+\mu}\left(1-e^{-(k+\mu)t}\right)\right)^{\alpha_1}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Из определения экспоненциальной производящей функции (6) и разложения (19), приравнивая коэффициенты при степенях $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$, получаем известное представление [5, 10]:

$$
\begin{aligned}
&F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^k \left(s_1 e^{-(k+\mu)t} + \frac{\mu}{k+\mu}\left(1-e^{-(k+\mu)t}\right)\right)^{\alpha_1} (s_2-1)^k.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

А.М. Зубков предложил вероятностный вывод формулы (20), основанный на свойствах траекторий марковского процесса эпидемии Вейса (2001 г., устное сообщение).

Некоторые следствия. Интегральная формула (10) для производящей функции переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ простым образом содержит начальные условия α_1, α_2 и переменные s_1, s_2, что определяет стандартные пути вывода следствий. Числовые характеристики марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ находятся по формулам ([14], гл. 4, § 1):

$$
A_i(t) = \mathbf{M}\,\xi_i(t) = \left.\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_i}\right|_{s_1=1, s_2=1},
$$

$$
B_i(t) = \mathbf{M}\,\xi_i(t)(\xi_i(t)-1) = \left.\frac{\partial^2 F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_i^2}\right|_{s_1=1, s_2=1},
$$

$$
D_i(t) = \mathbf{D}\,\xi_i(t) = B_i(t) + A_i(t) - A_i^2(t), \quad i = 1, 2.
$$

Следствие 1. *Для процесса эпидемии Вейса средние и дисперсии равны*:

$$
\begin{aligned}
&A_1(t) = \alpha_1 e^{-\mu t}, \quad A_2(t) = \alpha_2\Big(\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+1}e^{-(\mu+1)t}\Big)^{\alpha_1};\\
&D_1(t) = \alpha_1(e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}),\\
&D_2(t) = \alpha_2(\alpha_2-1)\Big(\frac{\mu}{\mu+2} + \frac{2}{\mu+2}e^{-(\mu+2)t}\Big)^{\alpha_1} +\\
&\alpha_2\Big(\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+1}e^{-(\mu+1)t}\Big)^{\alpha_1} - \alpha_2^2\Big(\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+1}e^{-(\mu+1)t}\Big)^{2\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Доказательство. Приведем вычисления для $A_2(t)$:

$$
A_2(t) = \frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial s_2}\bigg|_{s_1=1,s_2=1} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \bigg(e^{-\alpha_1(x+\mu)t}\alpha_2 e^{-y} +
$$

$$
+ \int\limits_0^\infty\bigg(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{0+}\Big(\frac{\mu}{u}(1-e^{-(x+\mu)t}) + e^{-(x+\mu)t}\Big)^{\alpha_1}\alpha_2 e^{-y-v}e^{(u-\mu)v}du\bigg)dv\bigg)\times
$$

$$
\times H(x,y)dxdy = \alpha_2 e^{-\alpha_1(\mu+1)t} +
$$

$$
+\alpha_2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\bigg(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{0+}\sum_{k=0}^{\alpha_1}C_{\alpha_1}^k\frac{\mu^k}{u^k}(1-e^{-(x+\mu)t})^k(e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1-k}e^{uv-(\mu+1)v-y}du\bigg)\times
$$

$$
\times H(x,y)dvdxdy = \alpha_2 e^{-\alpha_1(\mu+1)t} +
$$

$$
+\alpha_2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\sum_{k=1}^{\alpha_1}C_{\alpha_1}^k\frac{\mu^k v^{k-1}}{(k-1)!}(1-e^{-(x+\mu)t})^k(e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1-k}e^{-(\mu+1)v-y}\times
$$

$$
\times H(x,y)dvdxdy = \alpha_2 e^{-\alpha_1(\mu+1)t} +
$$

$$
+\alpha_2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\sum_{k=1}^{\alpha_1}C_{\alpha_1}^k\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^k\sum_{l=0}^{k}C_k^l(-1)^l(e^{-(x+\mu)t})^l(e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1-k}e^{-y}\times
$$

$$
\times H(x,y)dxdy = \alpha_2 e^{-\alpha_1(\mu+1)t} +
$$

$$
+\alpha_2\sum_{k=1}^{\alpha_1}C_{\alpha_1}^k\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^k\sum_{l=0}^{k}C_k^l(-1)^l e^{-l\mu t}e^{-(\alpha_1-k)\mu t}e^{-(l+\alpha_1-k)t} =
$$

$$
= \alpha_2(e^{-(\mu+1)t})^{\alpha_1} + \alpha_2\sum_{k=1}^{\alpha_1}C_{\alpha_1}^k\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^k(1-e^{-(\mu+1)t})^k(e^{-(\mu+1)t})^{\alpha_1-k} =
$$

$$= \alpha_2\Big(\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+1}e^{-(\mu+1)t}\Big)^{\alpha_1}. \qquad (22)$$

Для $A_1(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ вычисления аналогичны. Следствие 1 доказано.

Замечание 2. Для процессов распространения эпидемии рассматриваются также детерминированные модели; взаимосвязь вероятностного и детерминистического описаний для различных эпидемий обсуждается в работах [2–4, 19] и др. Процессу эпидемии Вейса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ соответствует аналог в виде системы дифференциальных уравнений (см. [6], уравнения (2)):

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1; \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2, \qquad (23)$$

где $x_1(t)$ — количество больных особей, $x_2(t)$ — количество особей, восприимчивых к инфекционному заболеванию. Решение уравнений (22) при начальных условиях $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ имеет вид

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-\mu t}; \quad x_2(t) = x_2^0\big(e^{-(1-e^{-\mu t})/\mu}\big)^{x_1^0}. \qquad (24)$$

Вывод детерминированной модели (22), исходя из уравнения (3) дан в работе [19]. Такой переход основывается на предположении [2–4], что средние величины процесса $A_i(t)$ совпадают с $x_i(t)$, $i = 1, 2$, при предельном переходе для начального состояния $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2)$, $n \to \infty$. Однако сравнение формул (21) и (23) показывает, что среднее $A_1(t)$ совпадает с $x_1(t)$, а среднее $A_2(t)$ отлично от $x_2(t)$, следовательно из вероятностной модели не может быть получена детерминированная модель указанным предельным переходом к большому числу частиц. В то же время лежащие в основании степени функции $(\mu + e^{-(\mu+1)t})/(\mu + 1)$ в формуле (21) и $e^{-(1-e^{-\mu t})/\mu}$ в уравнениях (23) являются близкими; в частности, их отношение стремится к 1 при $\mu \to 0$ или $\mu \to \infty$.

Для марковского процесса $\xi(t)$ состояния $\{(0, \gamma_2),\ \gamma_2 = 0, 1, 2, \ldots\}$ являются поглощающими, для финальных вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \lim\limits_{t\to\infty} P_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$ имеем производящую функцию:

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s_2) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s_2^{\gamma_2} = \lim_{t\to\infty} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2).$$

Вычисление предела, исходя из уравнения (10), приводит к интегральному выражению, полученному в работе [16] прямым решением стационарного первого уравнения Колмогорова.

Следствие 2. *Производящая функция финальных вероятностей имеет вид* $(\mu > 0,\ \alpha_1 = 1, 2, \ldots)$

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(s_2) = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int\limits_0^\infty v^{\alpha_1-1}(1-e^{-v}+s_2e^{-v})^{\alpha_2}e^{-\mu v}\,dv.$$

Для приложений представляет интерес случай, когда в процессе эпидемии в начальный момент времени число α_1 больных особей мало, а число α_2 особей, восприимчивых к инфекционному заболеванию, велико [3–5]. Используя явное выражение (10) для производящей функции числа частиц, стандартным образом применив метод характеристических функций (см. [14], гл. 5, § 5; [16], следствие 2), получим

Следствие 3. *Пусть $\xi_2(t)$ — число частиц типа T_2 в момент времени t для процесса эпидемии Вейса, и в момент времени $t=0$ имелось α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2 $(\mu>0,\ \alpha_1=1,2,\ldots)$. Тогда, при фиксированном $t>0$,*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_2(t)}{\alpha_2}\le x\right\} = F_{\alpha_1}(t;x), \tag{25}$$

где $F_{\alpha_1}(t;x)$ — функция распределения, характеристическая функция которого равна

$$\varphi_{\alpha_1}(t;\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}dF_{\alpha_1}(t;x) = e^{-\alpha_1\mu t}e^{i\lambda e^{-\alpha_1 t}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^k\frac{\mu^k}{(k-1)!}\sum_{l=0}^{k}C_k^l(-1)^l\int\limits_0^{e^{-(\alpha_1-k+l)t}} e^{i\lambda x}x^{\mu-1}(-\ln x-(\alpha_1-k+l)t)^{k-1}\,dx. \tag{26}$$

Из формулы (25) находится явное выражение для функции распределения

$$F_{\alpha_1}(t;x) = \begin{cases} 0, & x<e^{-\alpha_2 t};\\ e^{-\alpha_2\mu t}+\displaystyle\int\limits_{e^{-\alpha_2 t}}^{x} f_{\alpha_1}(t;y)\,dy, & e^{-\alpha_2 t}\le x<1;\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$$

где кусочно-непрерывная функция $f_{\alpha_1}(t;x)$ задана в каждом из интервалов $e^{-(\alpha_1-n)t}, e^{-(\alpha_1-n-1)t}$, $n=0,\ldots,\alpha_1-1$, формулой

$$f_{\alpha_1}(t;x) =$$

$$x^{\mu-1}\sum_{k=n+1}^{\alpha_1}C_{\alpha_1}^k\frac{\mu^k}{(k-1)!}\sum_{l=0}^{k-n-1}C_k^l(-1)^l(-\ln x-(\alpha_1-k+l)t)^{k-1}.$$

В частности,

$$F_1(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-t}; \\ x^{\mu}, & e^{-t} \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_2(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-2t}; \\ x^{\mu}(1 + \mu \ln x + 2\mu t), & e^{-2t} \le x < e^{-t}; \\ x^{\mu}(1 - \mu \ln x), & e^{-t} \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Отметим, что вывод предельной теоремы (24) из представления (20) является сложным, а вывод соотношения (24) из интегрального представления решения (10) простой и сводится к использованию второго замечательного предела.

Заключение. Основным прикладным результатом работы является предельная теорема (24) — утверждение типа "пороговой теоремы" [2, 12]. Так как в практических приложениях представляет интерес случай, когда при $t = 0$ число больных особей мало́, а число здоровых особей велико, то асимптотические свойства распределения компоненты $\xi_2(t)$ случайного процесса рассматриваются при $\alpha_2 \to \infty$. Теоремы такого типа используются при определении пороговой численности больных особей, при превышении которой принято говорить о начале эпидемии [4, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эпидемии процесс // В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 5. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – Кол. 1008.
2. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. – М.: ИЛ, 1958. – 384 с.
3. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
4. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. – М.: Мир, 1970. – 328 с.
5. Bailey N. T. J. The mathematical theory of infections diseases and its applications. – London: Griffin, 1975.
6. Weiss G. On the spread of epidemics by carries // Biometrics. – 1965. – V. 21, no. 2. – P. 481–490.
7. Gani J. On a partial differential equation of epidemic theory. I // Biometrika. – 1965. – V. 52. – P. 617–622.
8. Siskind V. The solution of a general stochastic epidemic // Biometrica. – 1965. – V. 52, no. 3–4. – P. 613–616.
9. Sakino S. On the solition of the epidemic equations // Ann. Inst. Statist. Math. – 1968, Suppl. V. – P. 9–19.

10. G a n i J. Approaches to the modelling of AIDS. In: Stochastic Processes in Epidemic Theory. (Conference Luminy, 1988.) // Lecture Notes in Biomathematics. V. 86. California: Santa Barbara Univ. Press, 1990. – 197 p.

11. E f e v r e C., P i c a r d P. On the algebraic structure in markovian processes of death and epidemic types // Adv. Appl. Prob. – 1999. – V. 31. – P. 742–757.

12. С т а р ц е в А. Н. О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели // Теория вероятн. и ее примен. – 1996. – Т. 41, вып. 4. – С. 827–839.

13. Д и т к и н В. А., П р у д н и к о в А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: Физматгиз, 1958. – 180 с.

14. С е в а с т ь я н о в Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.

15. С е в а с т ь я н о в Б. А., К а л и н к и н А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 264, вып. 2. С. 306–308.

16. К а л и н к и н А. В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятн. и ее примен. – 1998. – Т. 43, вып. 4. – С. 773–780.

17. К а л и н к и н А. В. Проблема точных решений уравнений Колмогорова для марковских процессов с дискретными состояниями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 1999. – № 1(2). – С. 14–24.

18. М а с т и х и н А. В. Решение стационарного первого уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии со схемой $T_1+T_2 \to T_1+T_3$, $T_1+T_3 \to T_1$, $T_1 \to 0$ // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2005. – № 2(17). – С. 75–86.

19. К а л и н к и н А. В., Л а н г е А. М., М а с т и х и н А. В., Ш а п о ш н и к о в А. А. Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2005. – № 2(17). – С. 53–74.

20. К а л и н к и н А. В. Незамкнутое решение уравнений Колмогорова для двухмерного процесса гибели квадратичного типа // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 347–348.

Статья поступила в редакцию 14.11.05

Александр Вячеславович Калинкин родился в 1956 г., окончил в 1978 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области теории вероятностей и математического моделирования.

A.V. Kalinkin (b. 1956) graduated from the Moscow State University n.a. M.V. Lomonosov in 1978. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 40 publications in the field of theory of probabilities and mathematical simulation.