

Ирина Сергеевна Родикова родилась в 1978 г. Окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2001 г. Аспирантка кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

I.S. Rodikova (b. 1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2001. Post-graduate of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University.



УДК 531.66

В. В. Лапшин

## УДАР О ПОВЕРХНОСТЬ ТЕЛА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРОЙ<sup>1</sup>

*Исследована плоская задача об абсолютно неупругом ударе тела о шероховатую поверхность в предположении, что до удара тело имело дополнительную неподвижную точку опоры.*

После удара возможны различные типы движения тела: останов тела; скольжение на двух точках опоры; вращение вокруг новой неподвижной точки опоры; скольжение на новой точке опоры и вращение вокруг нее. Для ряда частных случаев графически показаны области, соответствующие различным типам движения после удара. Случай абсолютно шероховатой поверхности ранее исследован в работах [1–3]. Интерес к проблеме обусловлен изучением движения шагающих машин [1, 3–5].

**1. Постановка задачи и исследование процесса удара.** Твердое тело, совершающее плоское движение (рис. 1), опирается на опорную поверхность в точке  $S_1$ , которая имеет нулевую скорость. В результате вращения твердого тела вокруг этой точки происходит удар об опорную поверхность в новой точке опоры  $S_2$ . Удар предполагается абсолютно неупругим. После удара вертикальная составляющая

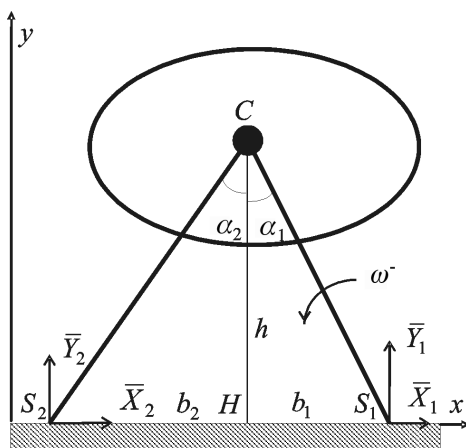


Рис. 1. Схема удара. Основные обозначения

<sup>1</sup>Работа выполнена по гранту по поддержке ведущих научных школ РФ.

скорости точки  $S_2$  равна нулю, т.е.  $S_2$  остается на опорной поверхности. Ударные импульсы реакции опорной поверхности возникают в точке соударения  $S_2$  и в точке опоры  $S_1$ . В результате удара первоначальная точка опоры  $S_1$  может остаться на опорной поверхности, либо покинуть ее, и может начаться скольжение тела.

Назовем виртуальной ногой отрезок, соединяющий центр масс тела  $C$  корпуса с концом ноги. В дальнейшем для описания движения тела будем использовать только центр масс и виртуальные ноги. Последние будем называть ногами, опуская слово виртуальные. Тем самым сведем задачу об ударе тела к задаче об ударе плоского двуногого устройства, состоящего из массивного корпуса и двух невесомых ног. Конец ноги, соприкасающийся с опорной поверхностью, будем называть стопой.

Введем следующие обозначения (см. рис. 1):  $C$  — центр масс тела;  $m$  — масса;  $J_C = m\rho^2$  — момент инерции относительно центра масс,  $\rho$  — радиус инерции. Стопы опорных ног:  $S_1$  — стопа передней ноги,  $S_2$  — стопа задней ноги. Ось  $Ox$  совпадает с опорной поверхностью, ось  $Oy$  направлена вертикально вверх. Точка  $H$  — проекция центра масс на горизонтальную поверхность;  $h$  — вертикальная координата центра масс;  $b_1$  — передний вынос передней ноги,  $b_2$  — задний вынос задней ноги;  $\bar{V}$  — скорость центра масс. Точка  $H$  находится между точками опоры  $S_1, S_2$  или  $b_1 > 0, b_2 > 0$ .

Решение задачи не изменится, если опорная поверхность не является горизонтальной, так как при ударе не учитывается действие конечных сил (в том числе и силы тяжести).

В момент удара возникают ударные импульсы в точках опоры ног (ударные реакции опорной поверхности), их проекции на оси координат обозначим  $X_1, Y_1$  в стопе  $S_1$  и  $X_2, Y_2$  в стопе  $S_2$ . Наложенные на координаты стоп опорных ног связи являются неудерживающими, следовательно,  $Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0$ .

Если стопа  $S_1$  в результате удара отрывается от опорной поверхности, то после удара скорость стопы  $S_1$  направлена вверх:  $\dot{y}_1^+ > 0$ . Примем гипотезу, что в этом случае ударные реакции в точке опоры  $S_1$  равны нулю [1–3]. Это предположение равносильно отсутствию импульсных управлений, которые могли бы дополнительно “подтолкнуть” тело ногой, которая оторвется от опорной поверхности.

Обозначим  $\bar{V}^- = (\dot{x}_C^-, \dot{y}_C^-)$ ,  $\bar{V}^+ = (\dot{x}_C^+, \dot{y}_C^+)$ ,  $\omega^-, \omega^+$  скорость центра масс  $C$  и угловую скорость тела до и после удара. За положительное принимается направление угловой скорости против хода часовой стрелки. До удара тело вращалось вокруг неподвижной стопы  $S_1$ , и в момент соприкосновения стопы  $S_2$  с опорной поверхностью (до удара)  $\omega^- > 0, \dot{x}_C^- = -h\omega^-, \dot{y}_C^- = -b_1\omega^-$ .

Удар стопы  $S_2$  об опорную поверхность является абсолютно неупругим, тогда, в силу теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно центра масс, уравнения удара имеют вид

$$m(\dot{x}_C^+ + h\omega^-) = X_1 + X_2, \quad m(\dot{y}_C^+ + b_1\omega^-) = Y_1 + Y_2,$$

$$m\rho_C^2(\omega^+ - \omega^-) = Y_1b_1 - Y_2b_2 + (X_1 + X_2)h.$$

Примем гипотезу Рауса [1–3] о том, что при ударе трение сводится к сухому трению  $|X_i| \leq fY_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $f$  — коэффициент трения.

В работе [8] показано, что возможны четыре различных режима движения после удара:

— после удара тело останавливается:  $\dot{x}_C^+ = 0$ ,  $\dot{y}_C^+ = 0$ ,  $\omega^+ = 0$ , обе ноги остаются на опорной поверхности;

— после удара тело скользит на обеих ногах:  $\dot{x}_C^+ = -V^+ < 0$ ,  $\dot{y}_C^+ = 0$ ,  $\omega^+ = 0$ ,  $X_i = fY_i$ ,  $i = 1, 2$ , обе ноги остаются на опорной поверхности;

— после удара тело начинает вращение вокруг неподвижной стопы  $S_2$  с угловой скоростью  $\omega^+ > 0$  и  $\dot{x}_C^+ = -h\omega^+$ ,  $\dot{y}_C^+ = b_2\omega^+$ ;

— после удара начинается вращение тела вокруг стопы  $S_2$  с угловой скоростью  $\omega^+$  и скольжение на этой стопе со скоростью  $V_2^+$ , при этом  $\omega^+ > 0$ ,  $V_2^+ > 0$ ,  $\dot{x}_C^+ = -V_2^+ - h\omega^+$ ,  $\dot{y}_C^+ = b_2\omega^+$ ,  $X_2 = fY_2$ ,  $X_1 = Y_1 = 0$ .

До удара скорость центра масс направлена налево, а скорость новой точки соприкосновения вертикально вниз. Если, в результате удара начинается скольжение тела на одной или двух ногах, то имеет место скольжение налево. Невозможность скольжения тела направо в результате удара вполне очевидна и легко проверяется формально. Если предположить, что имеет место скольжение направо, то ограничения на значения характеристик движения тела после удара и ударных реакций в точках опоры ног оказываются несовместными.

В работе [8] получены формулы для расчета характеристик движения тела после удара, ударных реакций в точках опоры и доказано утверждение.

**Основное утверждение.** Обозначим  $\delta = \rho^2 + h^2 - b_1b_2$ . При  $\delta \leq 0$  после удара тело либо останавливается при  $f \geq h/b_1$ , либо начинает скользить на двух ногах при  $f < h/b_1$ . При  $\delta > 0$  после удара тело либо скользит на двух ногах при  $f \leq (b_1b_2 - \rho^2)/(b_1h)$ , либо скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее при  $(b_1b_2 - \rho^2)/(b_1h) < f < b_2h/(\rho^2 + h^2)$ , либо вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$  при  $f \geq b_2h/(\rho^2 + h^2)$ .

**Следствие.** В случае абсолютно шероховатой поверхности (когда коэффициент трения  $f = \infty$ ) характер движения после удара определяется знаком  $\delta$ . При  $\delta > 0$  после удара начинается вращение вокруг стопы  $S_2$ , а при  $\delta \leq 0$  в результате удара тело останавливается.

**Частные случаи.** Рассмотрим несколько частных случаев, для которых удалось построить графически области, в которых имеет место тот или иной тип удара.

Стопы ног расположены симметрично относительно центра масс ( $b_1 = b_2 = b$ ). Введем безразмерные параметры  $\tilde{\rho} = \rho/b$ ,  $\tilde{h} = h/b$ . В силу утверждения 1 после удара тело останавливается, если  $\tilde{h} \leq \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$  и  $f \geq \tilde{h}$ ; скользит на двух ногах, если  $\tilde{h} \leq \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$  и  $f < \tilde{h}$ , либо  $\tilde{h} > \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$  и  $f \leq F$ ; скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, если  $\tilde{h} > \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$  и  $F < f < \Phi$ ; вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , если  $\tilde{h} > \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$  и  $f \geq \Phi$ . Здесь

$$F(\tilde{h}) = (1 - \tilde{\rho}^2)/\tilde{h}, \quad \Phi(\tilde{h}) = \tilde{h}/(\tilde{\rho}^2 + \tilde{h}^2).$$

Функция  $\Phi(\tilde{h})$  имеет локальный максимум в точке  $\tilde{h} = \tilde{\rho}$ , точку перегиба при  $\tilde{h} = \sqrt{3}\tilde{\rho}$  и

$$\Phi|_{\tilde{h}=0} = 0, \quad \Phi|_{\tilde{h}=\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} = \sqrt{1-\tilde{\rho}^2}, \quad \max_{\tilde{h}} \Phi = \Phi|_{\tilde{h}=\tilde{\rho}} = \frac{1}{2\tilde{\rho}}, \quad \lim_{\tilde{h} \rightarrow \infty} \Phi = 0$$

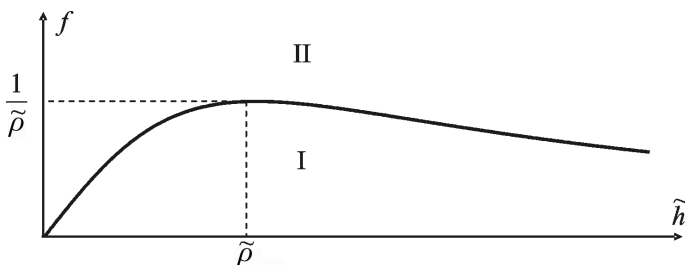
График функции  $\Phi(\tilde{h})$  показан на рис. 2.

Если  $\tilde{\rho} \geq 1$ , то функция  $F(\tilde{h}) \leq 0$  и  $\delta \geq 0$ , причем  $\delta = 0$  только при  $\tilde{h} = 0$ . Следовательно, удар двумя ногами с последующим остановом тела или скольжением на двух ногах невозможны. Функция  $\Phi(\tilde{h})$  делит множество допустимых значений параметров  $\tilde{h} \geq 0$  и  $f \geq 0$  на две области (рис. 2). В области I после удара тело скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, а в области II – вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ .

Если  $\tilde{\rho} < 1$ , то функция  $F(\tilde{h})$  является монотонно убывающей гиперболой и

$$F(\tilde{h}) > 0, \quad F|_{\tilde{h}=\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} = \sqrt{1-\tilde{\rho}^2}, \quad \lim_{\tilde{h} \rightarrow \infty} F = 0.$$

Возможны все четыре типа удара. Графические изображения отличаются для случаев  $1/\sqrt{2} \leq \tilde{\rho} < 1$  (рис. 3) и  $0 < \tilde{\rho} < 1/\sqrt{2}$  (рис. 4).



**Рис. 2.** Области, соответствующие различным типам удара. Случай симметричного расположения стоп, радиус инерции  $\tilde{\rho} > 1$

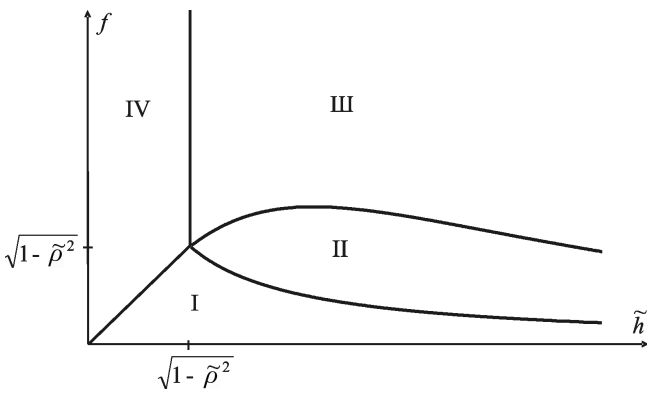


Рис. 3. Области, соответствующие различным типам удара. Случай симметричного расположения стоп, радиус инерции  $1/\sqrt{2} \leq \tilde{\rho} < 1$

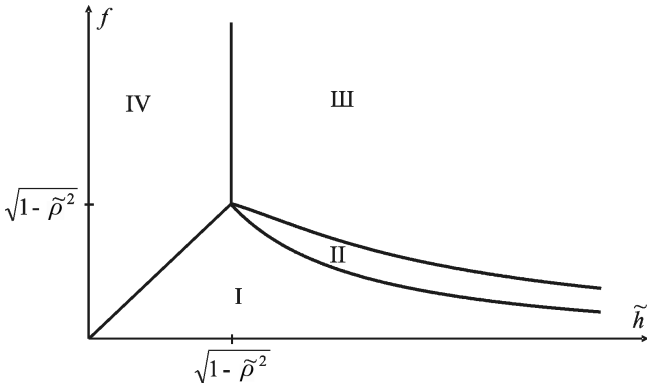


Рис. 4. Области, соответствующие различным типам удара. Случай симметричного расположения стоп, радиус инерции  $0 \leq \tilde{\rho} < 1/\sqrt{2}$

В первом случае максимум функции  $\Phi(\tilde{h})$  лежит справа от точки бифуркации  $\tilde{h} = f = \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}$ , а втором случае — слева от нее и поэтому он отсутствует на границе, разделяющей области I и II. В области I после удара тело скользит на двух ногах, в области II скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, в области III вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , в области IV останавливается.

В этих случаях решение задачи является корректным с точки зрения непрерывной зависимости решения от параметров. На границах пределы каждой из этих областей совпадают, и решение можно определять по любой из формул, соответствующих граничным областям, а в точке бифуркации — по формулам, соответствующим любому из четырех случаев.

Если тело является материальной точкой  $\tilde{\rho} = 0$  (рис. 5), то  $\Phi(\tilde{h}) = F(\tilde{h})$ . Становится невозможным случай скольжения на стопе  $S_2$  с вращением вокруг нее, что ранее отмечалось в работе [4]. На рис. 5 в области I после удара тело скользит на двух ногах, в области II вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , в области III останавливается. При

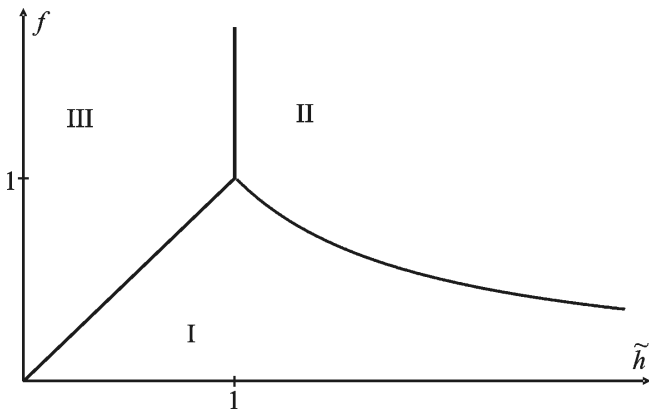


Рис. 5. Области, соответствующие различным типам удара для материальной точки с симметричным расположением стоп

этом решение задачи становится некорректным — на границе областей I и II решение меняется скачкообразно.

Однородная прямоугольная пластина на ножках, размерами которых можно пренебречь;  $2b$  — ширина пластины,  $2a$  — высота. Введем безразмерный параметр  $\tilde{a} = a/b$ , тогда

$$\rho^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2), \quad h = a, \quad b_1 = b_2 = b, \quad \frac{h}{b} = \tilde{a},$$

$$\delta = \frac{2}{3}b^2(2\tilde{a}^2 - 1), \quad \frac{b_1b_2 - \rho^2}{b_1h} = \frac{2 - \tilde{a}^2}{3\tilde{a}}, \quad \frac{b_2h}{\rho^2 + h^2} = \frac{3\tilde{a}}{4\tilde{a}^2 + 1}.$$

В силу основного утверждения после удара тело останавливается, если  $0 \leq \tilde{a} \leq 1/\sqrt{2}$  и  $f \geq \tilde{a}$ ; скользит на двух ногах, если  $0 \leq \tilde{a} \leq 1/\sqrt{2}$  и  $f < \tilde{a}$  либо  $\tilde{a} > 1/\sqrt{2}$  и  $f \leq (2 - \tilde{a}^2)/3\tilde{a}$ ; скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, если  $\tilde{a} > 1/\sqrt{2}$  и  $(2 - \tilde{a}^2)/3\tilde{a} < f < 3\tilde{a}/(4\tilde{a}^2 + 1)$ ; вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , если  $\tilde{a} > 1/\sqrt{2}$  и  $f \geq 3\tilde{a}/(4\tilde{a}^2 + 1)$ .

На плоскости безразмерных параметров  $\tilde{a}$  — отношение высоты пластины к ее ширине,  $f$  — коэффициент трения — (рис. 6), и в области I после удара тело скользит на двух ногах, в области II скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, в области III вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , в области IV останавливается. Точка бифуркации имеет координаты  $\tilde{a} = f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

*Циркуль.* Рассмотрим тело, состоящее из двух одинаковых однородных стержней, скрепленных за концы под углом  $2\alpha$  (рис. 7). Масса каждого стержня равна  $m$ , длина  $2l$ . Центр масс тела расположен в точке  $C$ , причем  $C_1C = C_2C$ ,  $OC_1 = OC_2 = C_1S_1 = C_2S_2 = l$ . Удар

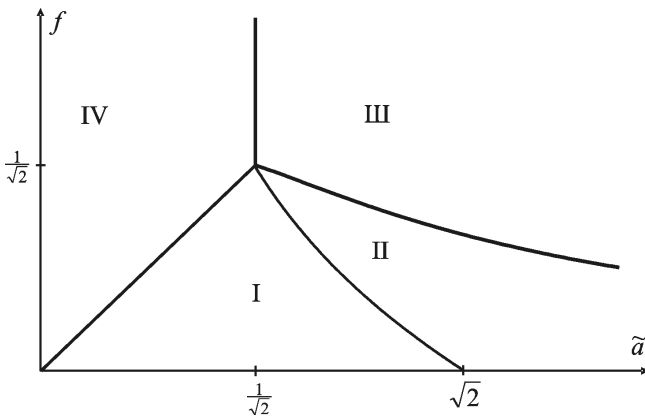


Рис. 6. Области, соответствующие различным типам удара для однородной прямоугольной пластины

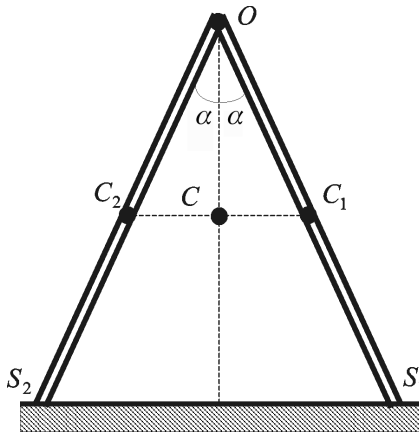


Рис. 7. Циркуль

циркуля об абсолютно шероховатую поверхность рассмотрен в работе [1]. Определим области, соответствующие различным типам удара, на плоскости параметров  $\alpha, f$ , где угол  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ .

Для рассматриваемого случая

$$\rho^2 = l^2 \left( \frac{1}{3} + \sin^2 \alpha \right), \quad h = l \cos \alpha, \quad b_1 = b_2 = b = 2l \sin \alpha, \quad h/b_1 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\delta = \frac{4}{3} l^2 (1 - 3 \sin^2 \alpha), \quad \frac{b_1 b_2 - \rho^2}{b_1 h} = \frac{9 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin 2\alpha}, \quad \frac{b_2 h}{\rho^2 + h^2} = \frac{3}{4} \sin 2\alpha.$$

В силу основного утверждения после удара тело останавливается, если  $f \geq \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$  и  $\frac{1}{2} f \geq \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ ; скользит на двух ногах, если  $\frac{1}{2}\pi \geq \alpha \geq \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $f < \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$  либо  $0 \leq \alpha < \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$  и

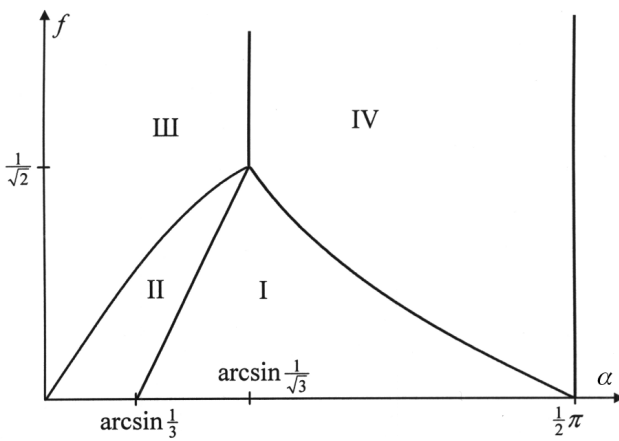


Рис. 8. Области, соответствующие различным типам удара для циркуля

$f \leq \frac{9 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin 2\alpha}$ ; скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, если  $0 \leq \alpha < \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{9 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin 2\alpha} < f < \frac{3}{4} \sin 2\alpha$ ; вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , если  $0 \leq \alpha < \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $f \geq \frac{3}{4} \sin 2\alpha$ .

На плоскости безразмерных параметров угол  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ ,  $f$  – коэффициент трения (рис. 8), и в области I после удара тело скользит на двух ногах, в области II скользит на стопе  $S_2$  и вращается вокруг нее, в области III вращается вокруг неподвижной стопы  $S_2$ , в области IV останавливается. Точка бифуркации имеет координаты  $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф о р м а л ь с к и й А. М. Перемещение антропоморфных механизмов. – М.: Наука, 1982.
2. Ф о р м а л ь с к и й А. М., Ш е в а л ь р о К., П е р р а Б. Об ударном взаимодействии тела с опорой // Вестник Московского ун-та. Сер. “Математика, механика”. – 2000. – № 1. – С. 27–32.
3. Л а п ш и н В. В. Экстренный останов шагающей машины на абсолютно шероховатой поверхности // Препринт Ин-та прикл. мат. РАН. – 1996. – № 85.
4. L a p s h i n V. Model problem of a walking machine emergency stop // 5th IFAC Symposium on Robot Control, Vol. 3, Nantes, France, 1997. – P. 807–812.
5. О х о ц и м с к и й Д. Е., Г о л у б е в Ю. Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. – М.: Наука, 1984.
6. П л я в н и е к с В. Ю. Расчет косо го удара о препятствие // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1969. – № 18. – С. 87–109.



7. Лапшин В. В. Плоский удар тела о шероховатую поверхность // Препринт Ин-та прикл. мат. РАН. – 2001. – № 10.
8. Лапшин В. В. Удар тела о поверхность при наличии дополнительной точки соприкосновения. // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. – М.: “Логос”, 2005. – С. 214–224.

Статья поступила в редакцию 3.05.2005

Владимир Владимирович Лапшин родился в 1954 г. Окончил механико-математический факультет МГУ в 1975 г., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области механики и управления движением шагающих аппаратов и робототехники.

V.V. Lapshin (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1975. D. Sc. (Phys. Math.), professor of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mechanics and motion control of walking robots and robotics.

---

**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
в 2006 г. вышла в свет книга**

**Суржиков С.Т.**

Физическая механика газовых разрядов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 640 с.: 384 ил. (Компьютерные модели физической механики).

Рассмотрены методы компьютерного моделирования электро-разрядных процессов и динамики частично ионизованных газов, которые используются в задачах физической механики, физики газовых разрядов и аэрофизики. Основное внимание уделено решению двумерных задач физической механики тлеющих разрядов в аэрокосмических приложениях.

Для научных сотрудников и инженеров, работающих в области физической газовой динамики, физики низкотемпературной плазмы и газовых разрядов, а также для студентов и аспирантов физико-технических специальностей университетов.

По вопросам приобретения обращаться по тел. 433-82-98;  
e-mail: [surg@ipmnet.ru](mailto:surg@ipmnet.ru)