

УДК 621.372.011.7

В. Г. Прокопенко

СХЕМА ЧУА И ЕЕ БЛИЖАЙШИЕ АНАЛОГИ: ДИНАМИЧЕСКАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ

На примере схемы Чуа показано, что свойственная эквивалентным схемам простейших электронных генераторов хаоса динамическая и топологическая двойственность может быть использована для отыскания неизвестных ранее электрических таких генераторов. Обсуждаются динамические свойства и способ практической реализации нового автономного автостохастического генератора, замыкающего фундаментальную группу из четырех простейших схем, являющихся динамическими или топологическими аналогами схемы Чуа.

Простейшие электронные автостохастические генераторы обладают по крайней мере двумя видами симметрии. Важнейшая из них — динамическая, или симметрия относительно уравнений движения — состоит в том, что динамика топологически различных схем определяется одной и той же системой безразмерных уравнений. Вторая — топологическая — заключается в том, что схемы, имеющие одинаковую топологию, демонстрируют качественно подобное (в смысле наличия хаотического аттрактора) поведение, несмотря на различные уравнения движения. Комбинированный учет обоих видов симметрии дает дополнительные возможности для поиска и синтеза новых разновидностей простейших генераторов хаотических колебаний.

Используем проявление этих видов симметрии в отношении схемы Чуа [1] (рис. 1, а) для отыскания нового автостохастического автогенератора. Известны соответствующие этой схеме динамический (рис. 1, б) [2] и топологический (рис. 1, в) [3] аналоги. Динамический аналог представляет собой дуальную [4] по отношению к ней электрическую цепь. Пронормированные одинаковым образом безразмерные уравнения движения, описывающие дуальные схемы, идентичны [5]. Топологический аналог отличается от схемы Чуа только локализацией нелинейности; роль нелинейного элемента в нем играет резистор с положительным сопротивлением, а резистор с отрицательным сопротивлением является линейным.

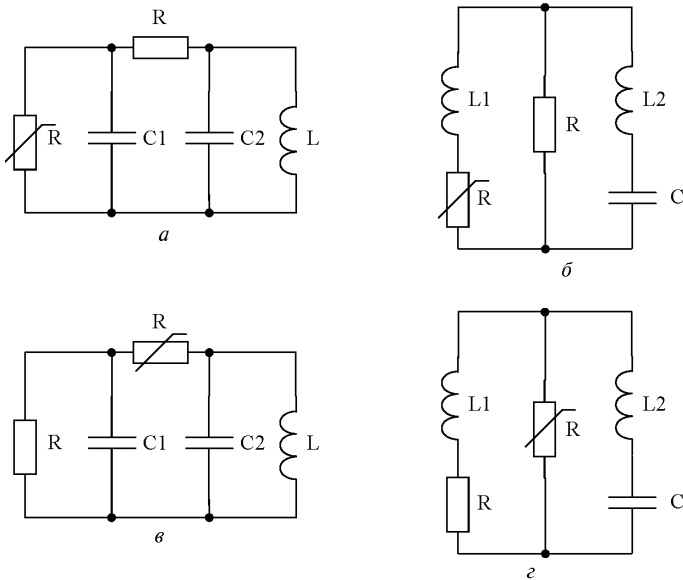


Рис. 1. Семейство схем Чуа

Рассматривая эти аналоги схемы Чуа, нетрудно прийти к заключению о том, что должна существовать еще одна схемная конфигурация автостохастического генератора, представляющая собой одновременно топологический аналог динамического аналога схемы Чуа и динамический аналог ее топологического аналога.

Электрическая схема этого генератора, представляющего собой, по существу, третий аналог схемы Чуа, приведена на рис. 1, з. Как видно из рисунка, она топологически идентична схеме на рис. 1, б и дуальна по отношению к схеме на рис. 1, в.

Уравнения движения третьего аналога схемы Чуа. Форма записи уравнений движения может быть различной в зависимости от выбора положительных направлений токов, протекающих через энергозапасующие элементы, порядка нумерации переменных состояния и способа нормировки, например, такой, как в работах [3, 6].

Однако в данном случае более удобно представить переменные состояния таким же образом, как они представлены в общепринятой форме уравнений, описывающих схему Чуа и ее динамический аналог [1, 2].

Для этого обозначим действующие в генераторе на рис. 1, з токи и напряжения так, как показано на рис. 2, и выпишем соотношения между ними:

$$\begin{aligned}
 u_{L1} &= Ri_{L1}u_{H3}(i); & u_{L2} &= u_C + u_{H3}(i); & i &= i_{L1}i_{L2}; \\
 u_{L1} &= L1\frac{di_{L1}}{dt}; & u_{L2} &= L2\frac{di_{L2}}{dt}; & i_{L2} &= C\frac{du_C}{dt},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

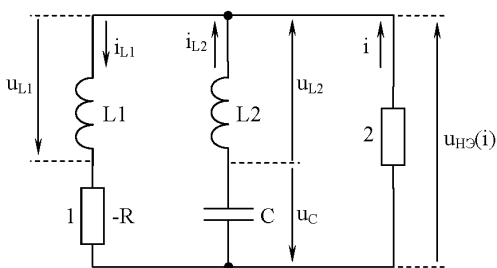


Рис. 2. Распределение токов и напряжений в схеме третьего аналога схемы Чуа при его работе

переменное напряжение на конденсаторе; $u_{HЭ}(i)$ — динамическая вольтамперная характеристика нелинейного элемента резистора 2.

Разрешив уравнения (1) относительно $\frac{di_{L1}}{dt}$, $\frac{di_{L2}}{dt}$ и $\frac{du_C}{dt}$, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L1 \frac{di_{L1}}{dt} = Ri_{L1}u_{HЭ}(i); \\ L2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_C + u_{HЭ}(i); \\ C \frac{du_C}{dt} = i_{L2}. \end{cases} \quad (2)$$

Вводя безразмерные переменные $x = \frac{i_{L1}}{I_0}$, $y = \frac{i_{L2}}{I_0}$, $z = \frac{u_C}{RI_0}$ (I_0 — величина граничного тока между средним и боковыми участками вольтамперной характеристики нелинейного резистора) и безразмерное время $\tau = \frac{R}{L2}t$, приведем уравнения (2) к безразмерному виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = A[xf(xy)]; \\ \frac{dy}{d\tau} = z + f(xy); \\ \frac{dz}{d\tau} = By, \end{cases} \quad (3)$$

где $A = \frac{L2}{L1}$, $B = \frac{L2}{R^2C}$, $f(x-y) = \frac{u_{HЭ}(i)}{RI_0}$.

Условия возбуждения хаотических колебаний. Схема на рис. 1, 2 дуальна схеме на рис. 1, в, поэтому условия возбуждения хаотических колебаний в одной из них могут быть выведены из аналогичных условий в другой. Используя такой подход, в работе [6] было показано, что в случае кусочнолинейной вольтамперной характеристики нелинейно-

где R — модуль эквивалентного сопротивления резистора с отрицательным сопротивлением 1; C — емкость конденсатора; $L1$ и $L2$ — индуктивности первого и второго индуктивных элементов соответственно; i_{L1} , i_{L2} — переменные токи, протекающие соответственно в первом и втором индуктивных элементах; u_C —

го резистора вида (рис. 3)

$$u_{HЭ}(i) = r_2 i + \frac{r_1 r_2}{2} (|i + I_0| |i I_0|), \quad (4)$$

где r_1 и r_2 — дифференциальные сопротивления соответственно среднего и боковых участков вольтамперной характеристики, которая может быть записана в виде

$$f(xy) = b(xy) + \frac{ab}{2} (|xy + 1| |xy|), \quad (5)$$

где $a = \frac{r_1}{R}$, $b = \frac{r_2}{R}$, хаотические колебания в генераторе на рис. 1, 2 наблюдаются, в частности, при $a \ll 1$, $b \gg 1$, $R\sqrt{\frac{C}{L2}} \approx 0,35$, $\frac{R L2}{L1} \sqrt{\frac{C}{L2}} \approx 0,7$. При этом $A \approx 2$, $B \approx 8$ и старший характеристический показатель Ляпунова $\lambda_1 \approx 0,33$.

В общем случае соблюдение условия $a \ll 1$, $b \gg 1$ необязательно. Для существования хаотического аттрактора достаточно, чтобы параметры вольтамперной характеристики нелинейного резистора удовлетворяли неравенствам $a < 1$, $b > 1$, причем коэффициент a , а значит и наклон среднего участка вольтамперной характеристики могут быть как положительными, так и отрицательными. Например, нерегулярная динамика уравнений (3),(5) имеет место при $a = 1$, $b = 2$, $A = 5$, $B = 15$ ($\lambda_1 \approx 0,42$) и при $a = 0,7$, $b = 1,2$, $A = 7$, $B = 14$ ($\lambda_1 \approx 0,33$).

Пример практической реализации. Практическая реализация третьего аналога генератора Чуа может быть осуществлена с помощью электрической схемы, показанной на рис. 4 [6]. Если в этой схеме все транзисторы идентичны, а их базовые токи пренебрежимо малы по сравнению с коллекторными токами, то $R \approx R_1$; $r_1 \approx \frac{2R_2 R_3}{R_2 + R_3}$; $r_2 \approx 2R_3$; $I_0 \approx \frac{I_2}{2}$. При этом рабочие участки вольтамперных характеристик резистора с отрицательным сопротивлением и нелинейного резистора равны соответственно I_1 и $I_1 + I_0$. Поэтому ток I_1 должен удовлетворять условию $I_1 \gg I_0$.

Значения резистивных элементов в схеме генератора на рис. 4

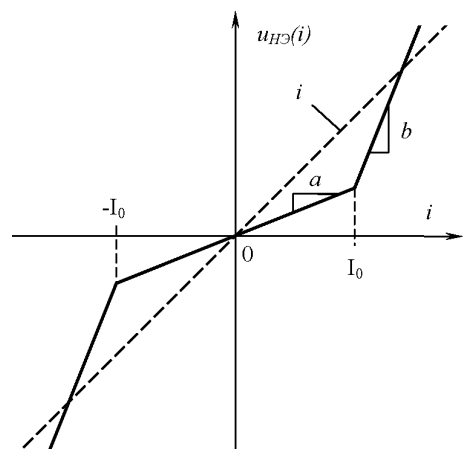


Рис. 3. Вольтамперная характеристика нелинейного резистора

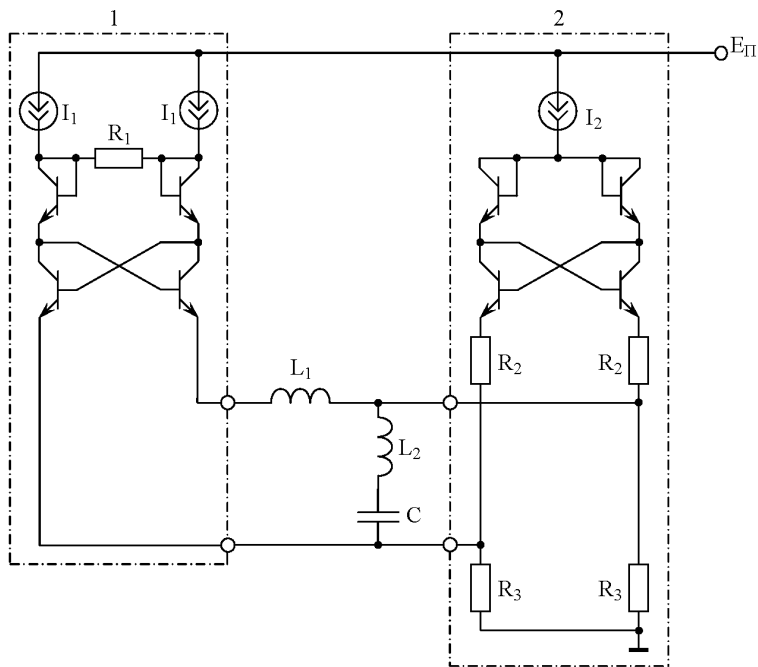


Рис. 4. Электрическая схема практической реализации генератора хаотических колебаний

выбираются исходя из следующих соотношений: $R_1 \approx R$, $R_2 \approx \frac{R}{2} \frac{a}{1 - a/b}$, $R_3 \approx \frac{R}{2} b$.

Например, если при $a = 0,7$, $b = 1,2$, $A = 7$, $B = 14$ принять $R = 500$ Ом; $C = 10$ нФ; $I_0 = 50$ мкА, то хаотические колебания в генераторе по схеме рис. 1, z можно наблюдать при $R_1 \approx 500$ Ом; $R_2 \approx 420$ Ом; $R_3 \approx 300$ Ом; $L_1 \approx 5$ мГн; $L_2 \approx 35$ мГн; $I_2 \approx 100$ мкА; $I_1 \approx 2$ мА.

Соответствующие этим значениям номиналов элементов схемы примеры проекции безразмерного странного аттрактора на плоскость (x, z) и временной зависимости переменной x приведены на рис. 5.

Особенностью схемотехнического построения генератора по схеме на рис. 4 является то, что при идентичности транзисторов и малости их базовых токов по сравнению с коллекторными, эмиттерные сопротивления первого и третьего, второго и четвертого, пятого и седьмого, шестого и восьмого транзисторов взаимно компенсируются. В результате эквивалентное сопротивление резистора с отрицательным сопротивлением и вольтамперная характеристика нелинейного резистора практически не зависят от параметров транзисторов, что обуславливает широкий интервал рабочих температур данного генератора.

Необходимо также отметить, что рассмотренный генератор хаотических колебаний подобно своему топологическому аналогу дает

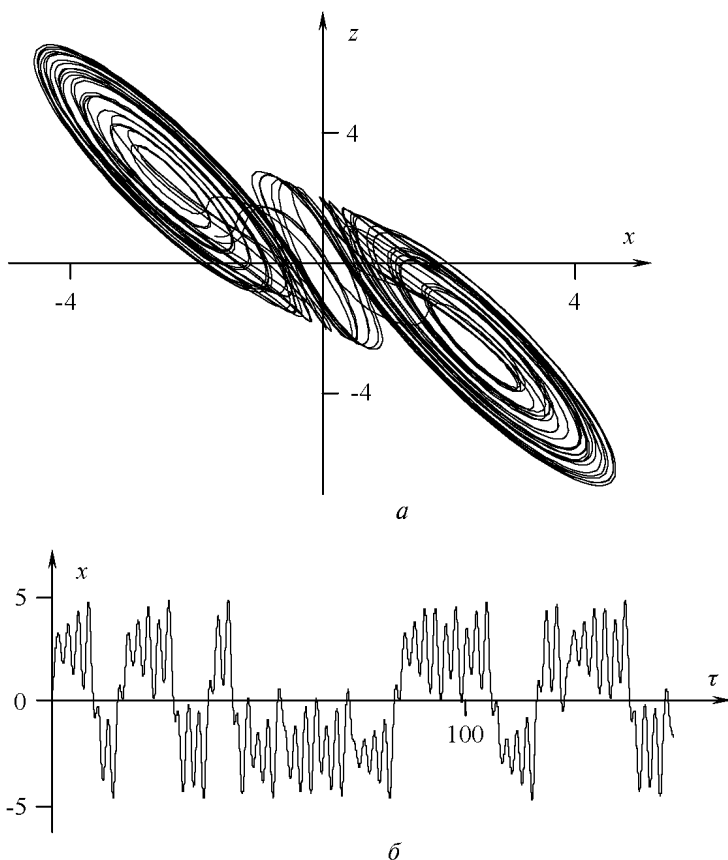


Рис. 5. Проекция безразмерного хаотического аттрактора на плоскость (x, z) (а) и временная реализация безразмерной переменной x (б)

возможность возбуждать хаотические колебания в последовательном колебательном контуре, соединенном с остальной частью схемы только одной парой внешних отводов.

Рассмотренная в статье схема генератора хаотических колебаний замыкает группу из четырех схем, которую можно было бы назвать исходными формами “большого семейства схем Чуа”, так как каждая из них порождает собственное семейство схем с хаотической динамикой. Каждая из исходных схем, подобно схеме Чуа, порождает неограниченное число схем различной топологии, но эквивалентных ей в том смысле, что все они имеют качественно идентичное поведение — фазовые портреты различных схем в пределах каждого из этих четырех семейств могут быть гладко преобразованы друг в друга. Все эти эквивалентные схемы описываются различными уравнениями в пространстве состояний, однако имеют три точки равновесия, симметрично расположенные относительно начала координат. Кроме того, матрицы Якоби, вычисленные для соответствующих точек равновесия

всех эквивалентных схем одного и того же семейства, имеют идентичные собственные значения.

Наличие рассмотренной взаимосвязи между ближайшими аналогами схемы Чуа указывает на то, что по одной известной схеме автостохастического генератора можно сразу найти еще одну, дуальную ей схему (если, конечно, ей соответствует планарный граф [5]) с динамикой, идентичной динамике известной схемы, а также указать, по крайней мере, еще две, имеющие одинаковую с ними топологию.

Вывод. Показано, что учет динамической и топологической симметрии может вчетверо повысить производительность поиска новых схем электронных генераторов хаоса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а ц у м о т о Т. Хаос в электронных схемах // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75. – № 8. – С. 67–68.
2. П р о к о п е н к о В. Г. Пополнение семейства схем Чуа // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45. – № 10. – С. 1241–1244; 2002. – Т. 47. – С. 1531.
3. I n a b a N., S a i t o T., a n d M o r i S. Chaotic Phenomena in a circuit with a negative resistance and ideal switch of diodes // The transactions of the IECSE. – Vol. E 70. – №. 8. – August, 1987. – P. 744–754.
4. П о п о в В. П. Основы теории цепей. – М.: Высш. школа, 1985. – 496 с.
5. Г а р я и н о в С. А., Т и х о д е е в Ю. С. Физические модели полупроводниковых приборов с отрицательным сопротивлением. – М.: Радио и связь, 1997. – 276 с.
6. П р о к о п е н к о В. Г. Генератор хаотических колебаний. – Пат. РФ № 2168846. – Оpubл. 10.06.2001. БИ № 16.

Статья поступила в редакцию 3.06.2005

Вадим Георгиевич Прокопенко — ведущий конструктор НКБ “Миус” Таганрогского государственного радиотехнического университета, канд. техн. наук. Автор более 90 научных работ в области радиотехники, микроэлектроники и нелинейной динамики.

V.G. Prokopenko — Ph. D. (Eng.), leading designer of the design bureau “Mius” of the Taganrog State Radio Engineering University. Author of more than 90 publications in the field of radio engineering, micro-electronics and non-linear dynamics.