УДК 517.938

А. Н. Канатников

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрен функциональный метод локализации инвариантных компактных множеств для дискретных динамических систем, с помощью которого исследованы одномерная логистическая система и двумерная система Катала. Построена компактная локализация положительно инвариантных компактных множеств этих систем. Для обеих систем показано, что объединение отрицательно инвариантных компактных множеств совпадает с фазовым пространством системы.

E-mail: Skipper@bmstu.ru

Ключевые слова: динамическая дискретная система, инвариантное множество, локализация инвариантных множеств.

Введение. В качественной теории динамических систем ряд публикаций посвящен задачам локализации инвариантных компактов динамических систем, под которой понимается построение множества в фазовом пространстве динамической системы, содержащего все инвариантные компактные множества этой системы.

До недавнего времени эти исследования были направлены на непрерывные динамические системы, описываемые системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Весьма эффективным в таких исследованиях оказался метод А.П. Крищенко [1], который уместно называть функциональным. Локализирующее множество строится с помощью некоторой функции, называемой локализирующей. Эффективность метода усиливается возможностью использовать семейства локализирующих функций с последующим определением пересечения построенного семейства локализирующих множеств.

Функциональный метод с успехом был применен для исследования целого ряда непрерывных динамических систем с хаотическим поведением, включая общеизвестную систему Лоренца [2–4], ее обобщения [5], ПРТ-систему [6], систему Ланфорда [7].

В работе [8] функциональный метод был распространен и на дискретные динамические системы, в применении к которым функциональный метод во многом сохраняет свои черты. Однако имеются и некоторые особенности. Во-первых, в дискретных системах эффективен сдвиг локализирующих множеств вдоль орбит системы, который не нашел своего применения в непрерывных системах. Во-вторых, непрерывные системы, описываемые нормальными системами дифференциальных уравнений, являются обратимыми, в то время как ряд дискретных систем, описываемых рекуррентным сотношением $x_{n+1} = F(x_n)$, обратимыми не являются. Динамика необратимой системы при возрастании времени заметно отличается от ее динамики при убывании времени.

В настоящей работе рассмотрены основные факты применения функционального метода к дискретным системам, а также проведено исследование двух необратимых дискретных систем. Первая — одномерная логистическая система, хорошо известная и детально исследованная. Ее анализ функциональным методом — это, с одной стороны, альтернативный способ доказательства уже известных фактов, а с другой — хороший тест для проверки работоспособности функционального метода. Вторая — двумерная система Катала [10], которая исследована недостаточно подробно, но известно, что при некоторых значениях параметров система Катала имеет хаотическое поведение.

Функциональный метод локализации. Следуя [8], изложим основные положения функционального метода локализации применительно к дискретным динамическим системам.

Под дискретной системой будем понимать рекуррентное соотношение $x_{n+1} = F(x_n)$, определяемое некоторым непрерывным отображением $F\colon M \to M$ множества $M \subset \mathbb{R}^n$ в себя.

Скажем, что подмножество $K \subset M$:

— положительно инвариантно, если $F(K) \subset K$;

— отрицательно инвариантно, если $F^{-1}(K) \subset K$;

— инвариантно, если оно положительно и отрицательно инвариантно.

Для произвольной непрерывной функции φ, определенной на M, рассмотрим множества

$$\Sigma_\varphi^+ = \{x \in M\colon \varphi(F(x)) - \varphi(x) \geq 0\},$$
$$\Sigma_\varphi^- = \{x \in M\colon \varphi(F(x)) - \varphi(x) \leq 0\}.$$

Положим

$$\varphi_{\inf}^r = \inf_{x \in \Sigma_\varphi^+} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^r = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^-} \varphi(x);$$
$$\varphi_{\inf}^l = \inf_{x \in \hat{F}(\Sigma_\varphi^-)} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^l = \sup_{x \in \hat{F}(\Sigma_\varphi^+)} \varphi(x);$$
$$\varphi_{\inf} = \inf_{x \in \Sigma_\varphi^+ \cap \hat{F}(\Sigma_\varphi^-)} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup} = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap \hat{F}(\Sigma_\varphi^+)} \varphi(x),$$

где $\hat{F}(A) = M \setminus F(M \setminus A)$.

Теорема 1. *Для системы $x_{n+1} = F(x_n)$, заданной на множестве M, и любого компактного множества $K \subset M$:*

— если K положительно инвариантно, то оно содержится в множестве

$$\Omega^r_\varphi = \{x \in M : \varphi^r_{\inf} \le \varphi(x) \le \varphi^r_{\sup}\};$$

— если K отрицательно инвариантно, то оно содержится в множестве

$$\Omega^l_\varphi = \{x \in M\colon \varphi^l_{\inf} \le \varphi(x) \le \varphi^l_{\sup}\};$$

— если K инвариантно, то оно содержится в множестве

$$\Omega_\varphi = \{x \in M\colon \varphi_{\inf} \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}\}.$$

Укажем некоторые свойства локализирующих множеств.

Свойство 1. *Если Ω_α, $\alpha \in I$, — некоторое семейство множеств, каждое из которых содержит все компактные положительно инвариантные (отрицательно инвариантные, инвариантные) множества динамической системы $x_{n+1} = F(x_n)$, то все компактные положительно инвариантные (отрицательно инвариантные, инвариантные) множества динамической системы содержатся в множестве $\bigcap\limits_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$.*

Свойство 2. *Если функция φ непрерывна на множестве M и $\psi(x) = h(\varphi(x))$, где $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго многотонная функция, то $\Omega^r_\psi = \Omega^r_\varphi$, $\Omega^l_\psi = \Omega^l_\varphi$, $\Omega_\psi = \Omega_\varphi$. В частности, эти равенства выполняются, если $h(t) = at + b$, $a \ne 0$.*

Свойство 3. Если функция $\varphi \in C(M)$ на множестве M достигает точной верхней грани $\overline{\varphi}$ в некоторой точке $x^* \in M$, то $\varphi^r_{\sup} = \varphi^l_{\sup} = \varphi_{\sup} = \overline{\varphi}$. Если функция φ достигает на M точной нижней грани $\underline{\varphi}$ в точке $x_* \in M$, то $\varphi^r_{\inf} = \varphi^l_{\inf} = \varphi_{\inf} = \underline{\varphi}$.

Учет дополнительной информации. Для любого множества $Q \subset M$ положим

$$\varphi^r_{\inf}(Q) = \inf_{\Sigma^+_\varphi \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi^r_{\sup}(Q) = \sup_{\Sigma^-_\varphi \cap Q} \varphi(x);$$

$$\varphi^l_{\inf}(Q) = \inf_{\hat{F}(\Sigma^-_\varphi) \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi^l_{\sup}(Q) = \sup_{\hat{F}(\Sigma^+_\varphi) \cap Q} \varphi(x);$$

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{\Sigma^+_\varphi \cap \hat{F}(\Sigma^-_\varphi) \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi^l_{\sup}(Q) = \sup_{\Sigma^-_\varphi \cap \hat{F}(\Sigma^+_\varphi) \cap Q} \varphi(x).$$

Теорема 2. *Пусть заданы система $x_{n+1} = F(x_n)$ на множестве M и множество $Q \subset M$. Тогда для любого компактного множества $K \subset Q$:*

— если K положительно инвариантно, то оно содержится в множестве

$$\Omega^r_\varphi(Q) = \{x \in Q\colon \varphi^r_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi^r_{\sup}(Q)\};$$

— если K отрицательно инвариантно, то оно содержится в множестве

$$\Omega^l_\varphi(Q) = \{x \in Q\colon \varphi^l_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi^l_{\sup}(Q)\};$$

— если K инвариантно, то оно содержится в множестве

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Эта теорема позволяет в целях локализации использовать следующую итерационную процедуру уточнения положения инвариантных компактов динамической системы. Пусть задана последовательность $\varphi_i \in C(M)$ непрерывных на M функций. Для произвольного множества $Q \subset M$ положим $\Omega^r_0 = Q$, $\Omega^r_i = \Omega_{\varphi_i}(\Omega_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\Omega^r_0 \supset \Omega^r_1 \supset \Omega^r_2 \supset \ldots \supset \Omega^r_i \supset \ldots$$

и каждое множество Ω^r_i содержит все положительно инвариантные компакты дискретной системы, включенные в Q. Аналогичная процедура имеет место в случае отрицательно инвариантных и инвариантных компактов.

Свойство 4. *Пусть $Q \subset M$ и функция φ непрерывна на M. Если $\psi(x) = h(\varphi(x))$, где $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго многотонная функция, то $\Omega^r_\psi(Q) = \Omega^r_\varphi(Q)$, $\Omega^l_\psi(Q) = \Omega^l_\varphi(Q)$, $\Omega_\psi(Q) = \Omega_\varphi(Q)$. В частности, эти равенства выполняются, если $h(t) = at + b$, $a \ne 0$.*

Свойство 5. *Если функция $\varphi \in C(M)$ на множестве M достигает точной верхней грани $\overline{\varphi}$ в некоторой точке $x^* \in Q$, то $\varphi^r_{\sup}(Q) = \varphi^l_{\sup}(Q) = \varphi_{\sup}(Q) = \overline{\varphi}$. Если функция φ достигает на M точной нижней грани $\underline{\varphi}$ в точке $x_* \in Q$, то $\varphi^r_{\inf}(Q) = \varphi^l_{\inf}(Q) = \varphi_{\inf}(Q) = \underline{\varphi}(Q)$.*

Доказательства этих свойств получаются незначительной модификацией доказательств свойств 2 и 3.

Согласно свойству 5, если φ достигает на M точной верхней грани в некоторой точке множества $Q \subset M$, то в определении множеств $\Omega^r_\varphi(Q)$, $\Omega^l_\varphi(Q)$, $\Omega_\varphi(Q)$ можно опустить верхнюю границу. Аналогично, если φ достигает на M точной нижней грани в некоторой точке множества $Q \subset M$, то в определении этих множеств можно опустить нижнюю границу.

Сдвиги локализирующих множеств. В работе [8] установлено следующее важное свойство.

Свойство 6. *Пусть множество G содержит все положительно инвариантные компакты дискретной системы $x_{n+1} = F(x_n)$. Тогда и множество $F^{-1}(G)$ содержит все положительно инвариантные компакты указанной системы.*

Это свойство в случае дискретных систем открывает новые возможности локализации, не нашедшие своего применения в случае непрерывных динамических систем. Эти возможности связаны со сдвигом найденных локализирующих множеств вдоль траекторий динамической системы.

Свойство 6 позволяет построить итерационную процедуру, полагая

$$\Omega_0 = G, \quad \Omega_i = \Omega_{i-1} \cap F^{-1}(\Omega_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В результате получим последовательность вложенных множеств $G = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \ldots \supset \Omega_i \supset \ldots$ Их пересечение дает множество Ω_∞, состоящее из тех точек $x \in G$, для которых $F^k(x) \in G$ при всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. точек, для которых орбита не выходит за пределы начального локализирующего множества G. И в самом деле, если $x \in G$, но $F^k(x) \notin G$, то по определению локализирующего множества точка x не принадлежит ни одному положительно инвариантному компакту и ее можно удалить из локализирующего множества.

Теорема 3. *Если множество G является компактным, то множество Ω_∞ есть максимальный положительно инвариантный компакт системы.*

Доказательство. Множество Ω_∞ замкнуто как пересечение замкнутых множеств, а значит, компактно, так как это замкнутое подмножество компакта. Покажем, что множество Ω_∞ инвариантно. Пусть $x \in \Omega_\infty$. Тогда $x \in \Omega_k$, $k \in \mathbb{N}$, а следовательно, $x \in F^{-1}(\Omega_{k-1})$. Последнее включение означает, что $F(x) \in \Omega_{k-1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т.е. $F(x) \in \Omega_\infty$.

Доказанная теорема показывает, что описанная итерационная процедура уточнения локализирующего множества с помощью сдвигов во многих случаях позволяет получить сколь угодно точную оценку положения положительно инвариантных компактов дискретной системы.

Установим другие свойства сдвигов локализирующих множеств вдоль траекторий динамической системы.

Свойство 7. *Если множество $G \subset M$ содержит все положительно инвариантные компакты дискретной системы, то и множество $\hat{F}(G)$ содержит все положительно инвариантные компакты. В частности, если F сюръективно, то образ любого локализирующего множества для положительно инвариантных компактов есть локализирующее множество.*

Доказательство. Пусть K — положительно инвариантный компакт. Тогда $F^{-1}(K) \subset G$. Действительно, пусть $x_0 \in F^{-1}(K)$. Тогда множество $\{x_0\} \cup K$ является положительно инвариантным компактом, поскольку $F(x_0) \in K$ и $F(x) \in K$ при $x \in K$. Следовательно,

$\{x_0\} \cup K \subset G$. Тем самым показано, что $x_0 \in G$ для любой точки $x_0 \in F^{-1}(K)$. Значит, $F^{-1}(K) \subset G$. Но тогда $K \subset \hat{F}(G)$. В частном случае, если F — сюръективное отображение, из условия $F^{-1}(K) \subset G$ вытекает, что $K \subset F(G)$, т.е. для сюръективного отображения локализирующим является множество $F(G)$.

Свойство 8. *Если множество G содержит все отрицательно инвариантные компакты системы $x_{n+1} = F(x_n)$, то и множество $\hat{F}(G)$ также содержит все отрицательно инвариантные компакты указанной системы. В частности, если F сюръективно и G — локализирующее множество для отрицательно инвариантных компактов рассматриваемой системы, то и $F(G)$ есть локализирующее множество.*

Доказательство. Пусть отрицательно инвариантное компактное множество K входит в G. Тогда множество $F^{-1}(K) \subset K$ также входит в G. Следовательно, $K \subset \hat{F}(G)$. В частном случае сюръективного отображения F имеем $\hat{F}(G) \subset F(G)$, так что в этом случае $F(G)$ является локализирующим множеством.

Свойство 9. *Пусть дискретная система $x_{n+1} = F(x_n)$ определяется инъективным отображением F. Тогда если множество G содержит все отрицательно инвариантные компакты рассматриваемой системы, то и множество $F^{-1}(G)$ содержит все отрицательно инвариантные компакты.*

Доказательство. Для инъективного непрерывного отображения F для любого отрицательного инвариантного компакта K множество $K \cup F(K)$ также является отрицательно инвариатным компактом. Действительно, во-первых, это множество компактно как объединение двух компактных множеств, а во-вторых, $F^{-1}(K \cup F(K)) = F^{-1}(K) \cup F^{-1}(F(K)) = F^{-1}(K) \cup K$, следовательно, $F^{-1}(K \cup F(K)) \subset K \subset K \cup F(K)$.

Итак, если F — инъективное непрерывное отображение и G содержит любой отрицательно инвариантный компакт K, то оно содержит и $K \cup F(K)$, поскольку это тоже инвариантный компакт. Значит, $F(K) \subset G$, а отсюда вытекает включение $K = F^{-1}(F(K)) \subset F^{-1}(G)$.

Свойство 10. *Если все инвариантные компакты дискретной системы $x_{n+1} = F(x_n)$ содержатся в множестве G, то они содержатся и в множествах $\hat{F}(G)$ и $F^{-1}(G)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств 6 и 7, поскольку любой инвариатный компакт является положительно инвариатным.

Логистическое отображение. Одномерная система $x_{n+1} = k(x_n - x_n^2)$ с отображением $F(x) = k(x - x^2)$, $k > 0$, в теории дискретных систем детально изучена [9]. Основной интерес к этой системе связан с появлением в ней хаотического поведения при возрастании параметра k.

Локализация положительно инвариантных компактов. Выясним, какие результаты дает функциональный метод для положительно инвариантных компактов логистической системы. В качестве локализирующей выберем простейшую функцию $\varphi(x) = x$. Тогда

$$\varphi(F(x)) - \varphi(x) = k(x - x^2) - x = (k-1)x - kx^2.$$

Множество Σ_φ^- описывается неравенством $(k-1)x - kx^2 \le 0$, а множество Σ_φ^+ — неравенством $(k-1)x - kx^2 \ge 0$. Возникают две оптимизационные задачи:

$$\begin{cases} x \to \sup; \\ (k-1)x - kx^2 \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \inf; \\ (k-1)x - kx^2 \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

Первая задача (2) дает тривиальное решение $\varphi_{\sup}^r = +\infty$, достигаемое при $x \to +\infty$. Вторая задача (2) дает конечное значение. При $k < 1$ имеем $\varphi_{\inf}^r = \dfrac{k-1}{k}$, а при $k \ge 1$ заключаем, что $\varphi_{\inf}^r = 0$. В результате получаем локализирующее множество Ω_φ^r, которое при $k < 1$ есть полуинтервал $\left[\dfrac{k-1}{k},\ +\infty\right)$, а при $k \ge 1$ — полуинтервал $[0,\ +\infty)$.

Видно, что линейная локализирующая функция дает левую границу положения положительно инвариантных компактных множеств, но не дает какой-либо правой границы.

Если рассмотреть локализирующую функцию $\psi(x) = x^2$, мы, рассуждая аналогично, получим локализирующее множество $|x| \le \dfrac{k+1}{k}$, которое, несомненно, лучше указывает границу для положительно инвариатных компактов, чем линейная функция.

Этот пример локализирующей функции можно развить и рассмотреть семейство квадратичных функций $\gamma(x) = (x+A)^2$. Однако отметим, что график логистической функции симметричен относительно прямой $x = 1/2$. Учитывая эту симметрию, выделим из семейства функцию $\gamma(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$, которая приводит к локализирующему множеству $\Omega_\gamma^r = \left[\dfrac{k-1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right]$ при $k < 1$ и множеству $\Omega_\gamma^r = [0,\ 1]$ при $k \ge 1$.

Нетрудно убедиться в том, что при $k \le 4$ локализация функцией γ дает точный результат, поскольку в этой случае отрезок Ω_γ^r переводится логистическим отображением в себя, т.е. является положительно инвариантным компактом. При $k > 4$ отрезок $\Omega_\gamma^r = [0,\ 1]$ уже не является положительно инвариантным. Однако, используя свойство 6 и соответствующую итерационную процедуру (1), можно показать, что в этом случае система имеет максимальный положительно инвариантный компакт, представляющий собой канторово множество, причем отрезок $[0,\,1]$ — это наименьший отрезок, содержащий этот компакт. В этом смысле и при $k > 4$ локализация функцией γ дает точный результат.

Локализация отрицательно инвариантных компактов. Попытка построить локализирующее множество для отрицательно инвариантных компактов с помощью линейной или квадратичной функции приводит к тривиальному результату — локализирующему множеству $\mathbb{R}$. Возникает вопрос, подобные результаты отражают действительные свойства системы или это результат неудачного выбора локализирующих функций?

Теорема 4. *Пусть $R > 1 + \dfrac{1}{k}$. Тогда отрезок $[-R,\,R]$ есть отрицательно инвариантное множество логистической системы.*

Доказательство. Пусть $A = [-R,\,R]$. Чтобы доказать, что $F^{-1}(A) \subset A$, достаточно показать, что $F(\mathbb{R} \setminus A) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Покажем, что если $|x| > R$, то $F(x) < -|x| < -R$. Отсюда следует включение $F(\mathbb{R} \setminus A) \subset (-\infty,\,-R) \subset \mathbb{R} \setminus A$.

Пусть $x > R$. Неравенство $F(x) < -|x|$ в данном случае означает, что $k(x - x^2) < -x$, или $kx^2 - (k+1)x > 0$. Последнее неравенство выполняется при $x > \dfrac{k+1}{k} = 1 + \dfrac{1}{k}$.

Пусть $x < -R$. Неравенство $F(x) < -|x|$ с учетом знака x означает, что $k(x - x^2) < x$, или $kx^2 - (k-1)x > 0$. Последнее неравенство выполняется при $x < \min\left\{0;\,\dfrac{k-1}{k}\right\}$ и, в частности, при $x < -R \le -1 - \dfrac{1}{k}$.

Из доказанной теоремы вытекает, что объединение всех компактных отрицательно инвариантных множеств логистической системы совпадает с числовой осью. Действительно, объединение отрезков $[-R,\,R]$ по всем значениям $R > 1 + \dfrac{1}{k}$, для которых такой отрезок есть отрицательно инвариантный компакт, совпадает с числовой осью. Ясно, что объединение всех отрицательно инвариантных компактов, которое включает и указанные отрезки $[-R,\,R]$, также совпадает с числовой осью.

Локализация инвариантных компактов. Для оценки положения компактных инвариантных множеств достаточно взять пересечение локализирующих множеств для положительно инвариантных и отрицательно инвариантных компактов. Из изложенного выше вытекает, что все инвариантные компакты логистической системы содержатся на отрезке $\left[1-\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right]$, если $k<1$, и на отрезке $[0,\,1]$, если $k\geq 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при $k<1$ отрезок $\left[1-\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right]$, а при $k\geq 1$ отрезок $[0,\,1]$, есть отрицательно инвариантное множество. Таким образом, полученная локализация положительно инвариантных компактов оказывается точной локализацией и инвариантных компактов.

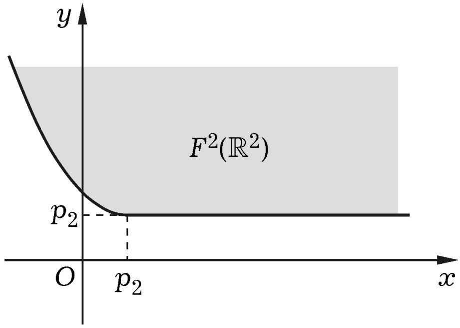

Рис. 1. Двукратный образ отображения Катала

Система Катала. Рассмотрим дискретную систему Мира–Гумовского–Катала [10]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p_1x_n + y_n, \\ y_{n+1} &= p_2 + x_n^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Этой системе соответствует отображение

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} p_1x+y \\ p_2+x^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Особенностью отображения (4) является его неоднозначность. Оно отображает плоскость $\mathbb{R}^2$ в полуплоскость $y\geq p_2$, причем каждая точка этой полуплоскости (за исключением границы) имеет два прообраза. При повторных отображениях область еще более сокращается. На рис. 1 показан образ двукратного отображения Катала.

Система Катала при некоторых комбинациях параметров имеет сложное поведение. При $p_1=1$, $p_2=-0{,}5952$ в системе Катала возникает хаотический аттрактор [10].

Система (3) при $\Delta=(p_1-1)^2-4p_2>0$ имеет две точки покоя с координатами

$$x_{1,2}=\frac{1-p_1\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad y_{1,2}=\frac{(1-p_1)^2\pm(1-p_1)\sqrt{\Delta}}{2}.$$

При $(p_1-1)^2-4p_2<0$ точек покоя нет. Оказывается (это следует из дальнейшего), что в этом случае система вообще не имеет положительно инвариантных компактов.

Локализация с помощью линейной функции. В качестве локализирующей рассмотрим линейную функцию $\varphi(x,y)=Ax+y$, $A>1$. Тогда

$$(\varphi\circ F-\varphi)(x,y)=x^2+A(p_1-1)x+(A-1)y+p_2.$$

В результате мы приходим к двум оптимизационным задачам:

$$\begin{cases} Ax + y \to \sup, \\ x^2 + A(p_1 - 1)x + (A-1)y + p_2 \le 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} Ax + y \to \inf, \\ x^2 + A(p_1 - 1)x + (A-1)y + p_2 \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

Оптимизационная задача (6) имеет тривиальное решение $-\infty$, которое достигается при $y = 0$ и $x \to -\infty$. Поэтому остановимся на задаче (5).

В задаче (5) точная верхняя грань достигается, когда ограничение выполняется в виде равенства. Это позволяет выразить y через x и свести оптимизационную задачу к одномерному случаю:

$$Ax - \frac{x^2 + A(p_1-1)x + p_2}{A-1} \to \sup, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Речь идет о точной верхней грани квадратного трехчлена с отрицательным коэффициентом при квадрате. Такой многочлен имеет точку максимума, значение в которой и дает ответ задачи (5). В результате находим $\varphi_{\sup} = \dfrac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)}$.

Это дает локализирующее множество, которое описывается неравенством

$$y \le \frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - Ax. \tag{7}$$

Неравенство (7) задает семейство локализирующих множеств, каждое из этих множеств получается при конкретном значении параметра $A > 1$. Пересечение множеств этого семейства можно записать следующим образом:

$$y \le \inf_{A>1}\left(\frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - Ax\right). \tag{8}$$

В случае $(p_1-1)^2 - 4p_2 > 0$ выражение в правой части (7) стремится к $+\infty$ и при $A \to 1-0$, и при $A \to +\infty$. Поэтому в неравенстве (8) знак точной нижней грани можно заменить знаком минимума:

$$y \le \min_{A>1}\left(\frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - Ax\right). \tag{9}$$

В случае $(p_1-1)^2 - 4p_2 = 0$ точная нижняя грань в (8) конечна, хотя может и не достигаться при конкретном значении $A > 1$. В случае $(p_1-1)^2 - 4p_2 < 0$ выражение в правой части (7) стремится к $-\infty$ при $A \to 1-0$, т.е. точная нижняя грань в (8) имеет значение $-\infty$ при всех значениях x, а пересечение локализирующих множеств, определяемое неравенством (8), пусто. Следовательно, при $(p_1-1)^2-4p_2<0$ система Катала не имеет положительно инвариантных (а следовательно, и инвариантных) компактов.

Минимум в (9) определить аналитически не удается, но его можно получить численно. Для этого найдем такое значение A_*, что при $A>A_*$ функция

$$g(A)=\frac{A^2(A-p_1)^2-4p_2}{A-1}-4Ax=$$
$$=(A+1)(A-p_1)^2+A+1-2p_1-4Ax+\frac{\Delta}{A-1}$$

возрастает. Функция $g(A)$ — это учетверенное выражение, которое в (9) стоит под знаком минимума. Тогда $\min\limits_{A>1} g(A)$ достигается на полуинтервале $(1,\ A_*]$.

Дифференцируя функцию $g(A)$, находим

$$g'(A)=(A-p_1)(3A+2-p_1)+1-4x-\frac{\Delta}{(A-1)^2}.$$

При $A>|p_1|$ имеем $(A-p_1)(3A+2-p_1)>3(A-|p_1|)^2$. Для выполнения неравенства $g'(A)>0$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства $3(A-|p_1|)^2-4x\geq 0$, $1-\dfrac{\Delta}{(A-1)^2}\geq 0$, которые эквивалентны следующим:

$$A\geq|p_1|+\sqrt{\frac{4|x|}{3}},\quad A\geq 1+\sqrt{\Delta}.$$

Таким образом,

$$\min_{A>1}\left(\frac{A^2(A-p_1)^2-4p_2}{4(A-1)}-Ax\right)=\min_{A\in(1,A_*)}\left(\frac{A^2(A-p_1)^2-4p_2}{4(A-1)}-Ax\right),$$

где

$$A_*=\max\left\{|p_1|+\sqrt{\frac{4|x|}{3}},\ 1+\sqrt{(p_1-1)^2-4p_2}\right\}.$$

На рис. 2 изображены аттрактор системы Катала при $p_1=1$, $p_2=-0{,}5952$ и граница локализирующего множества (8).

Сдвиги локализирующих множеств. Согласно свойству 6 множество $F^{-1}(G)$ является локализирующим множеством для положительно инвариантных компактов, если G — локализирующее множество. Найденное семейство локализирующих множеств (9) позволяет с помощью сдвигов вдоль орбит системы найти новые локализирующие множества, уточняющие положение инвариантных компактов системы.

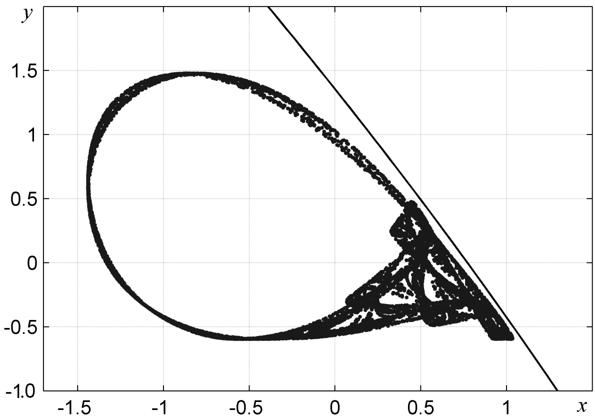

Рис. 2. Аттрактор системы Катала и граница локализирующего множества

Если множество G описывается системой неравенств $h_i(x) \leq 0$, $i = \overline{1, s}$, то множество $F^{-1}(G)$ описывается системой неравенств $h_i(F(x)) \leq 0$, $i = \overline{1, s}$. Действительно, условие $x \in F^{-1}(G)$ по определению означает, что $F(x) \in G$, а это условие эквивалентно системе неравенств $h_i(F(x)) \leq 0$, $i = \overline{1, s}$.

Рассмотрим локализирующее множество Ω_l, определяемое неравенством (9). Как вытекает из приведенных рассуждений, множество $F^{-1}(\Omega_l)$ описывается неравенством

$$p_2 + x^2 \leq \min_{A>1}\left(\frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - A(p_1x + y)\right).$$

Такое представление не очень удобно. Будем рассуждать несколько иначе. Множество Ω_{lA}, $A > 1$, описываемое неравенством

$$y \leq \frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - Ax,$$

является локализирующим для положительно инвариантных компактов (оно получено с помощью локализирующей функции $\varphi_A(x, y) = Ax + y$). Его прообраз $F^{-1}(G_{lA})$, также являющийся локализирующим, описывается неравенством

$$p_2 + x^2 \leq \frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - A(p_1x + y),$$

или

$$y \leq \frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4A(A-1)} - \frac{x^2 + p_1Ax + p_2}{A}.$$

Пересечение $\bigcap\limits_{A>1} F^{-1}(\Omega_{lA})$ найденных локализирующих множеств описывается неравенством

$$y \leq \min_{A>1}\left(\frac{A^2(A-p_1)^2 - 4p_2}{4A(A-1)} - \frac{x^2 + p_1Ax + p_2}{A}\right).$$

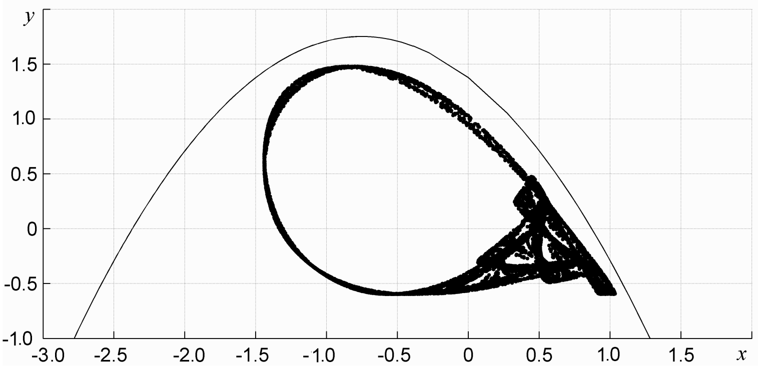

Рис. 3. Аттрактор системы Катала и граница локализирующего множества $\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{\Omega}_l)$

Граница этого локализирующего множества и аттрактор системы Катала при $p_1 = 1$, $p_2 = -0{,}5952$ изображены на рис. 3.

Множество $F^{-2}(G_{lA}) = F^{-1}(F^{-1}(G_{lA}))$ описывается квадратичным неравенством

$$p_2 + (p_1x + y)^2 \le \frac{A^2(A - p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} - Ap_1(p_1x + y) - A(p_2 + x^2),$$

или

$$(p_1x + y)^2 + Ax^2 + Ap_1(p_1x + y) + (1 + A)p_2 - \frac{A^2(A - p_1)^2 - 4p_2}{4(A-1)} \le 0.$$

Учитывая, что это множество не пусто, а квадратичная форма в левой части положительно определена, заключаем, что рассматриваемое множество представляет собой внутренность эллипса. На рис. 4 показаны аттрактор системы Катала при $p_1 = 1$, $p_2 = -0{,}5952$ и граница множества $F^{-2}(G_l) = \bigcap\limits_{A>1} F^{-2}(G_{lA})$.

Отрицательно инвариантные компакты. Для заданной локализирующей функции φ требуется решить две оптимизационные задачи:

$$\begin{cases} \varphi(x) \to \sup; \\ x \in \hat{F}(\Sigma_\varphi^+); \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x) \to \inf; \\ x \in \hat{F}(\Sigma_\varphi^-). \end{cases}$$

Однако отметим, что множества $\hat{F}(\Sigma_\varphi^+)$ и $\hat{F}(\Sigma_\varphi^-)$ содержат множество $M \backslash F(M)$, которое в данном случае представляет собой полуплоскость $y < p_2$. Поэтому для получения нетривиальных результатов локализирующая функция φ не должна достигать в указанной полуплоскости своих точных верхней и нижней граней.

В качестве локализирующей можно выбрать линейную функцию $\varphi(x, y) = Ax + By$ или параболическую функцию $\psi(x, y) = Ax^2 + By$. Для первой функции интерес представляет лишь случай $A = 0$, т.е. можно считать, что $\varphi(x, y) = y$. Анализ показывает, что в этом случае

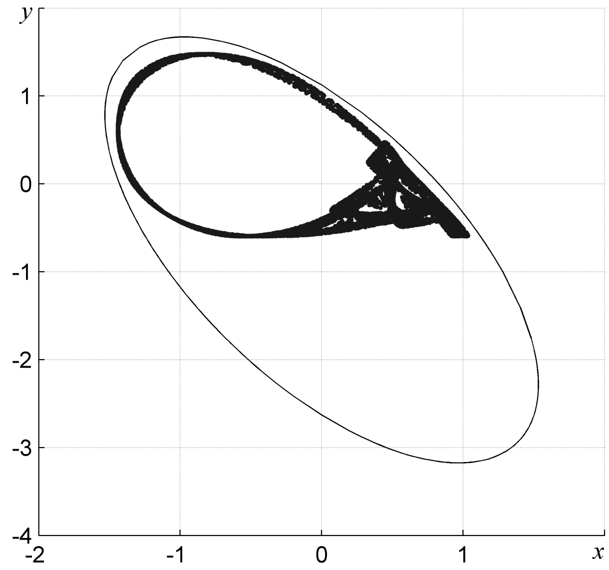

Рис. 4. Аттрактор системы Катала и граница локализирующего множества $\boldsymbol{F}^{-2}(\boldsymbol{\Omega}_l)$

локализирующее множество совпадает с плоскостью. Анализ параболической функции более сложен технически, но приводит к тому же результату: локализирующее множество совпадает с плоскостью.

Возможны две причины тривиального результата: неудачный выбор локализирующих функций и обширность объединения отрицательно инвариантных компактов, близкого ко всей плоскости. Оказывается, что для системы Катала имеет место как раз вторая причина: каждая точка плоскости принадлежит отрицательно инвариантному компакту.

Теорема 5. *Существует такое* $C_0 > 0$, *что для любого* $C \geq C_0$ *прямоугольник* $P_C = \{(x, y)\colon |x| \leq \sqrt{C},\ |y - p_2| \leq C\}$ *является отрицательно инвариантным множеством системы Катала* (3).

Доказательство. Для некоторой постоянной $C > 0$ рассмотрим прямоугольник P_C и точку $(x_0, y_0) \in P_C$. Тогда $|x_0| \leq \sqrt{C}$, $|y_0 - p_2| \leq C$. Точка (x_0, y_0) может иметь два прообраза, любой из которых обозначим (x_{-1}, y_{-1}). Из уравнений (3) находим

$$\begin{cases} x_{-1} = \pm\sqrt{y_0 - p_2}, \\ y_{-1} = x_0 \mp p_1\sqrt{y_0 - p_2}. \end{cases}$$

Если $y_0 < p_2$, то точка (x_0, y_0) не имеет прообразов. Рассмотрим случай $y \geq p_2$. Тогда

$$|x_{-1}| = \sqrt{y_0 - p_2} \leq \sqrt{C},$$

$$|y_{-1} - p_2| \leq |x_0| + p_1\sqrt{y_0 - p_2} + |p_2| \leq (1 + p_1)\sqrt{C} + |p_2|.$$

При достаточно большом C выполняется неравенство $(1+p_1)\sqrt{C} + |p_2| \le C$. Например, положив $C \ge \max\{4(1+p_1)^2; 2|p_2|\}$, получим

$$(1+p_1)\sqrt{C} + |p_2| \le \frac{1}{2}\sqrt{C}\,\sqrt{C} + \frac{C}{2} = C.$$

Из неравенства $(1+p_1)\sqrt{C} + |p_2| \le C$ вытекает, что $|x_{-1}| \le \sqrt{C}$, $|y_{-1} - p_2| \le C$, т.е. точка (x_{-1}, y_{-1}) при любом выборе знака попадает в прямоугольник P_C.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-07-00327) и гранта НШ-4144.2010.1 ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К р и щ е н к о А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 2005. – № 12. – С. 1597–1604.
2. Л е о н о в Г. А. Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65. – № 1. – С. 21–35.
3. K r i s h c h e n k o A. P., S t a r k o v K. E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system // Phys. Lett. A. 2006. V. 353. – P. 383–388.
4. S w i n n e r t o n - D y e r P. Bounds for trajectories of the Lorenz system: an illustration of how to choose Liapunov functions // Phys. Lett. A. 2001. V. 281. – P. 161–167.
5. L i D., L u J., W u X., C h e n G. Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic systems // Chaos, Solitons and Fractals. – 2005. V. 23, No. 2. – P. 529–534.
6. К а н а т н и к о в А. Н. Локализация инвариантных компактов ПРТ-системы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2007. – № 1. – С. 3–18.
7. K r i s h c h e n k o A. P., S t a r k o v K. E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 2006. No. 11. – P. 3249–3256.
8. К а н а т н и к о в А. Н., К о р о в и н С. К., К р и щ е н к о А. П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем // Докл. РАН. – 2010. – Т. 431, № 2. – С. 323–325.
9. Д и н а м и к а одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко. Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.
10. М о р о з о в А. Д., Д р а г у н о в Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 204 с.

Статья поступила в редакцию 27.09.2010

Анатолий Николаевич Канатников родился в 1954 г., окончил в 1976 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 55 научных работ по теории функций, дифференциальным уравнениям, информатике.

A.N. Kanatnikov (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 55 publications in the field of theory of functions, differential equations, informatics.