УДК 519.21

А. М. Ланге

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ОТКРЫТОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ

Рассмотрена дискретная марковская модель системы с внешним источником и парным взаимодействием частиц. Найдены явные решения стационарного второго уравнения Колмогорова с использованием специальных функций. Получены асимптотики математического ожидания и дисперсии стационарного распределения, а также показана его асимптотическая нормальность при большой интенсивности поступления новых частиц.

Во многих задачах современного естествознания при исследовании систем частиц используются модели, основанные на математическом аппарате теории вероятностей и теории случайных процессов. С помощью таких моделей исследуются флуктуации числа электронов или фотонов в ливне космических лучей; в физической и химической кинетике исследуются процессы превращения и взаимодействия молекул; в биологии и медицине изучаются процессы развития популяций и распространения эпидемий; в теории массового обслуживания рассматриваются потоки поступления и обслуживания заявок.

Первоначально такие системы исследовались в рамках детерминистского подхода, когда физический процесс рассматривается как изменение во времени макроскопических характеристик системы (концентраций, объемов и т.д.) [1]. При этом считается, что, располагая необходимыми начальными данными, можно с определенностью предсказывать поведение процесса в будущем. Однако детерминированные модели имеют ограниченное применение. В ряде случаев невозможно предсказать поведение процесса по начальным данным, что связано с наличием в системе невоспроизводимых флуктуаций. Детерминированная модель в этих случаях оказывается недостаточно адекватной, так как не учитывает случайного характера наблюдаемых физических явлений.

Вероятностные модели развивались при микроскопическом подходе к физическим процессам. Основная задача статистического метода изучения свойств физико-химических процессов формулируется следующим образом: зная законы взаимодействия частиц (молекул, атомов и т.п.), составляющих систему, необходимо установить при предельном переходе к большому числу частиц законы поведения макроскопического количества вещества (в первую очередь, феноменологические законы, устанавливающие связь между наблюдаемыми из опыта макроскопическими величинами [2, 3]).

Часто в основе вероятностных моделей лежит предположение о том, что для каждого момента времени поведение системы не зависит от ее предыстории и зависит только от ее текущего состояния. Это приводит к использованию марковских случайных процессов. В работе [2] введена дискретная модель физико-химической системы с попарно сталкивающимися частицами в виде однородного во времени марковского процесса на множестве N^n всех n-мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами; отмечается связь с детерминированным законом кинетики химических реакций — законом действующих масс. В работе [4] исследован марковский процесс в системе без взаимодействия с постоянным притоком частиц извне (открытая стохастическая система), не зависящим от числа имеющихся частиц. Подобные марковские процессы рождения и гибели на N^n исследовались во многих работах, посвященных различным задачам физической и химической кинетики [5], развитию популяций в экологических системах, теории массового обслуживания [6] и другим приложениям.

Пример: детерминированная и стохастическая модели. Рассмотрим детерминированную модель открытой физической системы с достаточно большим числом частиц x типа T, которое допустимо считать непрерывной функцией времени $x(t)$. Поскольку система открыта, в ней возможно появление новых частиц $(0 \to T)$, представляющее собой иммиграцию частиц извне или образование частиц в результате иных физических процессов. Кроме того, частицы могут участвовать в парном взаимодействии, приводящем к гибели одной из частиц: $2T \to T$. Гибель можно интерпретировать как участие в образовании частиц других типов, выход за пределы системы и т.п.

Предположим, что появление частиц происходит с определенной скоростью λ, которая постоянна и не зависит от x, а взаимодействие частиц выступает в качестве замедляющего фактора, который увеличивается с возрастанием x, и скорость замедления для одной частицы равна μx, где μ — коэффициент пропорциональности. Наряду с описанием химических реакций, такая модель может использоваться для описания экосистемы с ограниченными ресурсами, в которой гибель особей $2T \to T$ обусловлена внутривидовой конкуренцией [7]. Результирующая скорость роста популяции, таким образом, равна $\lambda - \mu x^2$, что соответствует дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - \mu x^2 \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

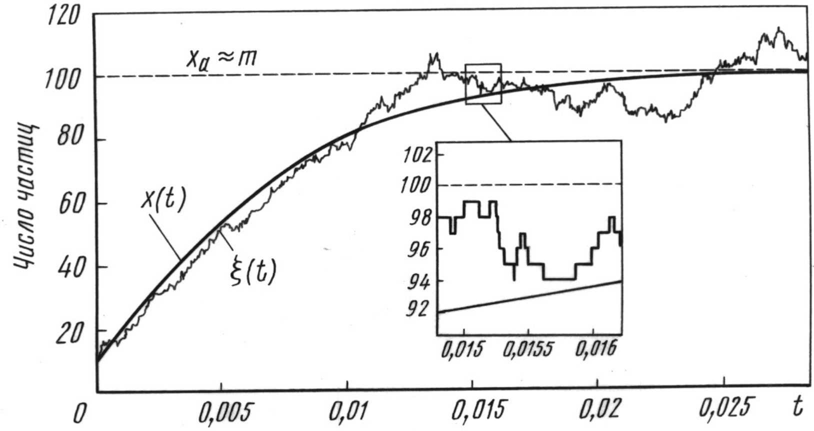

Рис. 1. Стохастическая реализация марковского процесса $\xi(t)$ и его детерминированное приближение $x(t)$ при начальных условиях $\xi(0) = 10$, $x_0 = 10$ и значениях параметров $\lambda = 10^4$, $\mu = 1$

Решение уравнения (1) имеет вид логистической кривой с горизонтальной асимптотой $x_a = \sqrt{\lambda/\mu}$ (рис. 1). Это означает, что при $t \to \infty$ система приходит в состояние равновесия, которое наступает при числе частиц, близком к x_a.

Для системы частиц со схемой взаимодействий $0 \to T$, $2T \to T$ рассмотрим стохастическую модель в виде однородного во времени марковского процесса $\xi(t)$ со счетным множеством состояний $N{=}\{0, 1, \ldots\}$ и непрерывным временем $t \in [0, \infty)$ [8]. Событие $\{\xi(t) = i\}$ означает наличие в системе i частиц типа T в момент времени t. Время нахождения процесса в состоянии i случайно и длится либо до момента появления новой частицы, либо до момента взаимодействия пары частиц. Обозначим $P_{ij}(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = j \,|\, \xi(0) = i\}$, $i, j \in N$, вероятности перехода процесса за время t из состояния i в состояние j. Будем считать, что вероятность $P_{i,i+1}(\Delta t)$ образования одной частицы за достаточно малое время Δt равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность $P_{i,i-1}(\Delta t)$ взаимодействия пары частиц пропорциональна числу C_i^2 сочетаний двух частиц из имеющихся i частиц и равна $\mu i(i-1)\Delta t + o(\Delta t)$, где λ и μ — заданные коэффициенты пропорциональности. Вероятность рождения или гибели более одной частицы за время Δt равна $o(\Delta t)$. Тогда полная вероятность [9] перехода из состояния i в состояние j за время $t + \Delta t$ с точностью до $o(\Delta t)$ определяется равенствами

$$\begin{gathered}
P_{00}(t + \Delta t) = P_{00}(t)(1 - \lambda\Delta t), \qquad P_{i0}(t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \\
P_{ij}(t + \Delta t) = P_{i,j-1}(t)\lambda\Delta t + P_{ij}(t)(1 - (\lambda + \mu j(j-1))\Delta t) + \\
+ P_{i,j+1}(t)\mu j(j+1)\Delta t, \qquad i = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{2}$$

основанными на следующих рассуждениях. Если в момент $t+\Delta t$ число частиц равно j, то в момент t либо было $j-1$ частиц и за время Δt появилась одна новая частица, либо было $j+1$ частиц и одна частица погибла, либо было j частиц и за время Δt это число не изменилось. При этом состояние процесса $\xi(t)$ в момент $t+\Delta t$ зависит только от состояния в момент t и не зависит от состояний, предшествующих моменту t. Путем перестановки членов в равенствах (2) и деления на Δt получаем при заданном i и $\Delta t \to 0$ вторую (прямую) систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей [10]:

$$\begin{gathered}\frac{dP_{00}(t)}{dt} = -P_{00}(t)\lambda,\\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = P_{i,j-1}(t)\lambda - P_{ij}(t)(\lambda+\mu j(j-1)) + P_{i,j+1}(t)\mu j(j+1),\\ i=0,1,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,\end{gathered} \tag{3}$$

с начальными условиями $P_{ii}(0)=1$, $P_{ij}(0)=0$ при $i\neq j$.

Введем производящую функцию переходных вероятностей $F_i(t;s)=\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)s^j$, $i\in\mathbf{N}$, $|s|\le 1$. Тогда умножением j-го уравнения на s^j и суммированием по j получим из системы (3) равносильное уравнение в частных производных второго порядка [11]:

$$\frac{\partial F_i(t;s)}{\partial t} = \mu(s-s^2)\frac{\partial^2 F_i(t;s)}{\partial s^2} + \lambda(s-1)F_i(t;s),\quad F_i(0;s)=s^i. \tag{4}$$

Поведение марковского процесса $\xi(t)$ при $t\to\infty$ характеризуется стационарными вероятностями $q_j=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)$, которые не зависят от начального состояния i. Из уравнения (4) следует стационарное уравнение для производящей функции $f(s)=\sum_{j=0}^{\infty}q_j s^j$:

$$\mu s\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda f(s) = 0. \tag{5}$$

Для функций $F_i(t;s)$ и $f(s)$ выполнены условия нормировки $F_i(t;1)\equiv 1$, $f(1)=1$. Математическое ожидание m и дисперсия σ^2 стационарного распределения $\{q_j,\ j=0,1,\ldots\}$ вычисляются по формулам [4]

$$m=\frac{df(1)}{ds},\qquad \sigma^2=\frac{d^2f(1)}{ds^2}+\frac{df(1)}{ds}-\left(\frac{df(1)}{ds}\right)^2. \tag{6}$$

В работе [8] получено решение уравнения (5)

$$f(s)=\sqrt{s}\,\frac{I_1\left(2\sqrt{\dfrac{\lambda s}{\mu}}\right)}{I_1\left(2\sqrt{\dfrac{\lambda}{\mu}}\right)}, \tag{7}$$

где $I_1(s)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка. На основе выражения (7) при $\lambda/\mu \to \infty$ найдены асимптотики стационарных математического ожидания $m = \sqrt{\lambda/\mu}$ и дисперсии $\sigma^2 = \sqrt{\lambda/(4\mu)}$.

Таким образом, когда при больших t в стохастической системе устанавливается динамическое равновесие, число частиц $\xi(t)$ колеблется около значения $\sqrt{\lambda/\mu}$, если это число достаточно велико (см. рис. 1). Следовательно, в состоянии равновесия при большом числе частиц детерминированная и вероятностная модели дают близкие результаты. Однако в вероятностной модели заметные отклонения от математического ожидания при большом числе частиц учитываются ростом дисперсии, что делает эту модель более адекватной по сравнению с детерминированной.

Рассмотренный марковский процесс $\xi(t)$ относится к процессам рождения и гибели [10], для которых непосредственный переход из состояния i происходит только в состояние $i-1$ или $i+1$. Для процессов рождения и гибели выражения для стационарных вероятностей известны [6, гл. 1, § 5, формулы (21), (22)], но малопригодны при асимптотическом исследовании. Выражение (7) для производящей функции $f(s)$ определяет возможности изучения предельных свойств стационарного распределения и приближенного вычисления вероятностей. В работе [8] установлено, что распределение $\{q_j\}$ асимптотически нормально при $\lambda/\mu \to \infty$, т.е. вероятность нахождения случайного процесса в пределах от j_1 до j_2 при больших t приближенно вычисляется следующим образом:

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} q_j \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{j_1}^{j_2} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

В настоящей работе свойство асимптотической нормальности установлено для более общей марковской модели, не являющейся процессом рождения и гибели. При исследовании предельных свойств стационарного распределения используются асимптотические разложения для модифицированных функций Бесселя и вырожденных гипергеометрических функций, получаемые с помощью известных интегральных представлений [12]. Асимптотики вырожденных гипергеометрических функций получены с помощью метода перевала [13, 14], в том числе, когда критическая точка зависит от растущего параметра.

Описание общей стохастической модели. Второе уравнение Колмогорова. Рассматриваемая система частиц описывается кинетической схемой $0 \to k_0 T$, $2T \to k_2 T$, в которой коэффициентам k_0 и k_2 соответствуют распределения вероятностей $\{p_l^k \ge 0,\ \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k = 1,\ p_k^k = 0\}$, $k = 0, 2$ [11]. Если в системе имеется i частиц типа T, то вероятности каждого из переходов за время $\Delta t \to 0$ соответственно равны $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ и $\mu i(i-1)\Delta t + o(\Delta t)$. Число k_0 частиц, образующихся в результате перехода $0 \to k_0 T$, определяется распределением вероятностей $\{p^0_{k_0}\}$, а переход $2T \to k_2 T$ с распределением вероятностей $\{p^2_{k_2}\}$ приводит к замене пары частиц k_2 новыми частицами. Вычисляя полную вероятность перехода из состояния i в состояние j за время $\Delta t \to 0$, представим переходные вероятности $P_{ij}(\Delta t)$, $i, j \in \mathbf{N}$, в виде

$$P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} (\lambda p^0_{j-i} + \mu i(i-1)p^2_{j-i+2})\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } j > i, \\ 1 - (\lambda + \mu i(i-1))\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } j = i, \\ \mu i(i-1)p^2_{j-i+2}\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } i-2 \le j < i, \\ o(\Delta t) & \text{при } j < i-2. \end{cases}$$

Таким образом, марковский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, \dots\}$ задан плотностями распределения вероятностей переходов.

В состоянии i процесс $\xi(t)$ находится случайное время, до тех пор, пока не произойдет один из указанных переходов. Переход $0 \to k_0 T$ может произойти спустя случайное время τ_i^0, имеющее распределение вероятностей $\mathrm{P}\{\tau_i^0 < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ [6, гл. 1, § 2], а переход $2T \to k_2 T$ — спустя время τ_i^2, имеющее распределение вероятностей $\mathrm{P}\{\tau_i^2 < t\} = 1 - e^{-\mu i(i-1)t}$. Поскольку величины τ_i^0 и τ_i^2 независимы, то время $\tau_i = \min(\tau_i^0, \tau_i^2)$ нахождения системы в состоянии i распределено по экспоненциальному закону, $\mathrm{P}\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-(\lambda + \mu i(i-1))t}$, а условные вероятности каждого из переходов (при условии, что какой-либо переход произошел) соответственно равны $\lambda/(\lambda + \mu i(i-1))$ и $\mu i(i-1))/(\lambda + \mu i(i-1))$.

При помощи производящих функций

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j, \qquad h_k(s) = \sum_{l=0}^{\infty} p^k_l s^l, \quad k = 0, 2, \quad |s| \le 1,$$

вторая система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса $\xi(t)$ записывается в виде уравнения в частных производных [11, теорема 1.3]

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \mu(h_2(s) - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda(h_0(s) - 1)F_i(t; s), \quad F_i(0; s) = s^i.$$

Соответствующее уравнение для производящей функции $f(s) = \lim_{t\to\infty} F_i(t; s)$ стационарных вероятностей принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [11, теорема 3.2]

$$\mu(h_2(s) - s^2)\frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \lambda(h_0(s) - 1)f(s) = 0. \tag{8}$$

В настоящей работе поведение процесса $\xi(t)$ при $t \to \infty$ исследуется в случае $h_0(s) = p_1^0 s + p_2^0 s^2$, $h_2(s) = p_0^2 + p_1^2 s$. Из условий $p_1^0 + p_2^0 = 1$, $p_0^2 + p_1^2 = 1$ имеем разложения на множители $h_0(s) - 1 = (s-1)(p_2^0 s + 1)$, $h_2(s) - s^2 = (1 - s)(s + p_0^2)$, и стационарное уравнение (8) сводится к уравнению, коэффициенты которого являются линейными функциями независимой переменной (см. уравнение Лапласа в работах [15, ч. 3, уравнение 2.145], [12, гл. 6, § 2]:

$$\mu(s + p_0^2)\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda(p_2^0 s + 1) f(s) = 0. \tag{9}$$

Существование стационарного распределения следует из наличия нетривиального абсолютно суммируемого решения стационарной системы уравнений Колмогорова [10, гл. 3, § 6], [6, гл. 1, § 5, теорема 4], которое получаем как решение уравнения (9). При этом коэффициенты q_j разложения производящей функции в степенной ряд

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$$

составляют предельное стационарное распределение.

Уравнение (9) решено в явном виде при всех значениях параметров p_2^0 и p_0^2. Предельные теоремы, приводимые далее, устанавливают асимптотическую нормальность найденного стационарного распределения при $\lambda/\mu \to \infty$.

Решение стационарного уравнения в случае $p_2^0 = 1, p_0^2 = 1$. Для рассматриваемого марковского процесса со схемой взаимодействий $0 \to 2T$, $2T \to 0$ класс сообщающихся состояний [10] зависит от начального состояния. Если начальное состояние четное, то имеем класс $K^0 = \{0, 2, 4, \ldots\}$; если нечетное, то имеем класс $K^1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Интенсивности вероятностей переходов указаны на рис. 2.

Уравнение (9) принимает вид уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\mu\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda f(s) = 0.$$

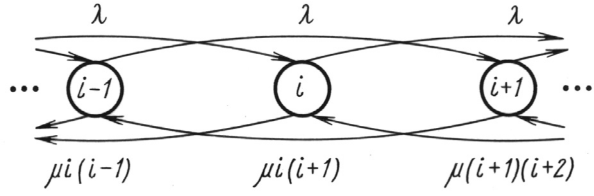

Рис. 2. Диаграмма переходов в случае $p_2^0 = 1, p_0^2 = 1$

Общее решение $f(s) = C_1 e^{-\nu s} + C_2 e^{\nu s}$, $\nu = \sqrt{\lambda/\mu}$, представим в виде степенного ряда

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((-1)^j C_1 + C_2)\nu^j s^j}{j!}, \tag{10}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. Поскольку переход из состояния i в состояние $i+1$ невозможен, то $P_{i,i+1}(t) \equiv 0$. Если процесс $\xi(t)$ находится в классе состояний K^0, то ряд (10) содержит только четные степени s, и тогда $C_1 = C_2$; если в классе состояний K^1 — ряд (10) содержит только нечетные степени s, и тогда $C_1 = -C_2$. Определяя константы C_1 и C_2 из условия нормировки $f(1) = 1$, получаем для производящих функций выражения

$$f_0(s) = \frac{\mathrm{ch}(\nu s)}{\mathrm{ch}(\nu)}, \qquad f_1(s) = \frac{\mathrm{sh}(\nu s)}{\mathrm{sh}(\nu)}. \tag{11}$$

Таким образом, распределения вероятностей [16]

$$\begin{aligned} q_{j,0} &= \frac{\nu^j}{j!\,\mathrm{ch}(\nu)}, \quad j \in K^0, \\ q_{j,1} &= \frac{\nu^j}{j!\,\mathrm{sh}(\nu)}, \quad j \in K^1, \end{aligned} \tag{12}$$

являются предельными стационарными распределениями в классах сообщающихся состояний K^0 и K^1 соответственно.

Рассмотрим случайные величины $\eta_{\nu,0}$ и $\eta_{\nu,1}$ с распределениями вероятностей (12). Из формул (6) получаем для математических ожиданий $m_{\nu,0} = \mathrm{M}\eta_{\nu,0}$, $m_{\nu,1} = \mathrm{M}\eta_{\nu,1}$ и дисперсий $\sigma^2_{\nu,0} = \mathrm{D}\eta_{\nu,0}$, $\sigma^2_{\nu,1} = \mathrm{D}\eta_{\nu,1}$ следующие выражения:

$$m_{\nu,0} = \nu\,\mathrm{th}(\nu), \qquad \sigma^2_{\nu,0} = \nu^2(1 - \mathrm{th}^2(\nu)) + \nu\,\mathrm{th}(\nu), \tag{13}$$

$$m_{\nu,1} = \nu\,\mathrm{cth}(\nu), \qquad \sigma^2_{\nu,1} = \nu^2(1 - \mathrm{cth}^2(\nu)) + \nu\,\mathrm{cth}(\nu). \tag{14}$$

Утверждение 1. *При $n = 0, 1$ и $\nu \to \infty$ справедливы асимптотики*

$$m_{\nu,n} \sim \nu, \qquad \sigma^2_{\nu,n} \sim \nu.$$

Доказательство. Из определения функций $\mathrm{th}(z)$ и $\mathrm{cth}(z)$ следуют асимптотические формулы при $z \to +\infty$: $\mathrm{th}(z) \sim 1$, $\mathrm{cth}(z) \sim 1$, $1 - \mathrm{th}^2(z) \sim 4e^{-2z}$, $1 - \mathrm{cth}^2(z) \sim -4e^{-2z}$. Применение указанных формул к выражениям (13) и (14) завершает доказательство утверждения.

Теорема 1. *При* $n = 0, 1$, $\nu \to \infty$ *и фиксированном* $x \in (-\infty, +\infty)$ *имеем*

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\eta_{\nu,n} - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

Доказательство. Для доказательства предельной теоремы используем стандартный метод характеристических функций [9, гл. 9]. Введем характеристическую функцию (здесь и далее мнимую единицу обозначим ω, $\omega^2 = -1$)

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) = \mathrm{M} \exp\left(\omega\tau \frac{\eta_{\nu,n} - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}}\right)$$

нормированной случайной величины $(\eta_{\nu,n} - m_{\nu,n})/\sigma_{\nu,n}$. По определению математического ожидания имеем

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\eta_{\nu,n} = 2k + n\right\} \exp\left(\omega\tau \, \frac{2k + n - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}}\right) =$$
$$= \exp\left(-\omega\tau \, \frac{m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}}\right) f_n\left(\exp\left(\frac{\omega\tau}{\sigma_{\nu,n}}\right)\right).$$

В соответствии с формулами (11) получаем

$$\varphi_{\nu,0}(\tau) = \exp\left(-\omega\tau \, \frac{m_{\nu,0}}{\sigma_{\nu,0}}\right) \frac{\mathrm{ch}\left(\nu \exp\left(\dfrac{\omega\tau}{\sigma_{\nu,0}}\right)\right)}{\mathrm{ch}(\nu)}, \tag{15}$$

$$\varphi_{\nu,1}(\tau) = \exp\left(-\omega\tau \, \frac{m_{\nu,1}}{\sigma_{\nu,1}}\right) \frac{\mathrm{sh}\left(\nu \exp\left(\dfrac{\omega\tau}{\sigma_{\nu,1}}\right)\right)}{\mathrm{sh}(\nu)}. \tag{16}$$

Покажем, что при $\nu \to \infty$ характеристическая функция $\varphi_{\nu,n}(\tau)$ стремится к характеристической функции $e^{-\tau^2/2}$ случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону. Из определения функций $\mathrm{sh}(z)$ и $\mathrm{ch}(z)$ следуют асимптотические формулы $\mathrm{sh}(z) \sim e^z/2$, $\mathrm{ch}(z) \sim e^z/2$ при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \le \pi/2 - \delta < \pi/2$ (здесь и далее $\delta > 0$ сколь угодно мало и не зависит от z), с помощью которых из выражений (15) и (16) получаем при $\nu \to \infty$

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) \sim \exp\left(\nu\left(\exp\left(\frac{\omega\tau}{\sigma_{\nu,n}}\right) - 1\right) - \omega\tau \, \frac{m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}}\right).$$

Используя разложение по формуле Тейлора

$$\exp\left(\frac{\omega\tau}{\sigma_{\nu,n}}\right) = 1 + \frac{\omega\tau}{\sigma_{\nu,n}} - \frac{\tau^2}{2\sigma_{\nu,n}^2} + o\left(\sigma_{\nu,n}^{-2}\right),$$

приходим к асимптотике

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) \sim \exp\left(\omega\tau\frac{\nu - m_{\nu,n}}{\sigma_{\nu,n}} - \frac{\nu\tau^2}{2\sigma^2_{\nu,n}}\right). \qquad (17)$$

Согласно формулам $1 - \mathrm{th}(z) \sim 2e^{-2z}$, $1 - \mathrm{cth}(z) \sim -2e^{-2z}$ при $z \to +\infty$ из выражений (13) и (14) имеем $\nu - m_{\nu,n} = o(1)$, $\nu \to \infty$. Таким образом, первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (17) стремится к нулю. Отсюда, учитывая асимптотику для $\sigma^2_{\nu,n}$ из утверждения 1, получаем окончательно

$$\varphi_{\nu,n}(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\nu\tau^2}{2\sigma^2_{\nu,n}}\right) \sim e^{-\tau^2/2}.$$

Теорема доказана.

Решение стационарного уравнения в случае $p_2^0 = 0$. Предельная теорема. Имеем процесс со схемой взаимодействий $0 \to T$, $2T \to k_2T$, $k_2 = 0, 1$, т.е. поступление в систему частиц можно интерпретировать как пуассоновский поток с интенсивностью λ [6, гл. 2, § 1]. Возможные переходы марковского процесса из одного состояния в другое и их интенсивности показаны на рис. 3.

Уравнение (9) принимает вид

$$\mu(s + p_0^2)\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \lambda f(s) = 0. \qquad (18)$$

После замены переменных $z = 2\nu\sqrt{s + p_0^2}$ (здесь и далее под $\sqrt{z}$ подразумевается главная ветвь), $y(z) = z^{-1} f(s)$, где $\nu = \sqrt{\lambda/\mu}$, уравнение (18) сводится к модифицированному уравнению Бесселя $z^2y'' + zy' - (z^2 + 1)y = 0$ [17, гл. 7, § 2, уравнение (11)]. Следуя работе [17], имеем общее решение уравнения (18) в виде

$$f(s) = C_1\sqrt{s + p_0^2}\, I_1(2\nu\sqrt{s + p_0^2}) + C_2\sqrt{s + p_0^2}\, K_1(2\nu\sqrt{s + p_0^2}), \quad (19)$$

где $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода; C_1, C_2 — произвольные

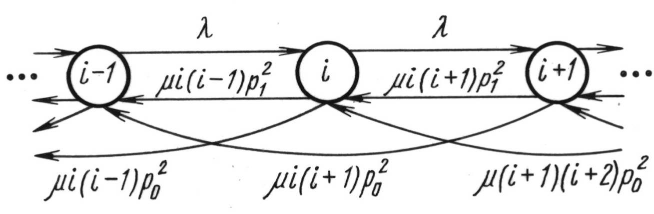

Рис. 3. Диаграмма переходов в случае $p_2^0 = 0$

константы. Из представлений $I_1(z)$ и $K_1(z)$ в форме рядов [17, гл. 7, § 2, формулы (2) и (37)] следует, что первое слагаемое в выражении (19) — функция, аналитическая на всей комплексной плоскости s, а второе слагаемое — функция неаналитическая в точке $s = -p_0^2$. Если $p_0^2 < 1$, то $C_2 = 0$, так как производящая функция $f(s)$ по определению является аналитической в круге $|s| < 1$. Если $p_0^2 = 1$, то $C_2 = 0$, так как в этом случае $f(s) = C_1\sqrt{s+p_0^2}\, I_1(2\nu\sqrt{s+p_0^2})$ представляет собой единственное (с точностью до множителя $C_1 > 0$) решение уравнения (18), все коэффициенты которого при разложении в ряд по степеням s неотрицательны. Определяя константу C_1 из условия $f(1) = 1$, приходим к выражению для производящей функции стационарного распределения

$$f(s) = \sqrt{\frac{s+p_0^2}{1+p_0^2}}\,\frac{I_1(2\nu\sqrt{s+p_0^2})}{I_1(2\nu\sqrt{1+p_0^2})}. \tag{20}$$

Случай $p_0^2 = 1$ соответствует химической реакции $A \to T$, $2T \to B$ [18, гл. 9, § 1], в которой концентрации веществ A и B поддерживаются постоянными. Выражения для стационарных вероятностей q_j [18, гл. 9, § 1, формула (15)] следуют из разложения функции (20) в ряд по степеням s.

Рассмотрим случайную величину η_ν на множестве $N = \{0, 1, \ldots\}$ с распределением, определяемым функцией (20). Дифференцируя выражение (20) с использованием соотношения для модифицированных функций Бесселя $zI_1'(z) = zI_0(z) - I_1(z)$ [17, гл. 7, § 2, формула (54)], получим

$$f'(1) = \frac{\nu}{a}\frac{I_0(2a\nu)}{I_1(2a\nu)},$$

где $a = \sqrt{1+p_0^2}$. Из уравнения (18) следует, что $f''(1) = \nu^2/a^2$. Подставляя значения производных в формулы (6), получаем выражения для математического ожидания $m_\nu = \mathrm{M}\eta_\nu$ и дисперсии $\sigma_\nu^2 = \mathrm{D}\eta_\nu$:

$$m_\nu = \frac{\nu}{a}\frac{I_0(2a\nu)}{I_1(2a\nu)}, \qquad \sigma_\nu^2 = \frac{\nu^2}{a^2}\left(1 - \frac{I_0^2(2a\nu)}{I_1^2(2a\nu)}\right) + \frac{\nu}{a}\frac{I_0(2a\nu)}{I_1(2a\nu)}. \tag{21}$$

Утверждение 2. *При $\nu \to \infty$ справедливы асимптотики*

$$m_\nu \sim \frac{\nu}{a}, \qquad \sigma_\nu^2 \sim \left(1 - \frac{1}{2a^2}\right)\frac{\nu}{a}.$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотиками для модифицированных функций Бесселя при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \le \pi/2 - \delta < \pi/2$ [17, гл. 7, § 13, формула (5)]:

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 + \frac{1}{8z} + O(z^{-2})\right), \tag{22}$$

$$I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 - \frac{3}{8z} + O(z^{-2})\right). \tag{23}$$

Суммируя и вычитая формулы (22) и (23), получим

$$I_0(z) + I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(2 + O(z^{-1})), \tag{24}$$

$$I_0(z) - I_1(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(\frac{1}{2z} + O(z^{-2})\right). \tag{25}$$

Из формул (22) и (23) следует также

$$\frac{I_0(z)}{I_1(z)} = 1 + o(1). \tag{26}$$

Перемножая формулы (24) и (25), получаем

$$1 - \frac{I_0^2(z)}{I_1^2(z)} = -\frac{1}{z} + o(z^{-1}). \tag{27}$$

Подстановка асимптотик (26) и (27) в формулы (21) завершает доказательство утверждения.

Теорема 2. *При* $\nu \to \infty$ *и фиксированном* $x \in (-\infty, +\infty)$ *имеем*

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\eta_\nu - m_\nu}{\sigma_\nu} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy.$$

Доказательство. Обозначим $\varphi_\nu(\tau)$ характеристическую функцию нормированной случайной величины $(\eta_\nu - m_\nu)/\sigma_\nu$. Тогда получим

$$\varphi_\nu(\tau) = \mathrm{M}\exp\left(\omega\tau\frac{\eta_\nu - m_\nu}{\sigma_\nu}\right) = \exp\left(-\omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right) f\left(\exp\left(\frac{\omega\tau}{\sigma_\nu}\right)\right) =$$
$$= \sqrt{1 + \frac{\gamma_\nu(\tau)}{a^2}}\exp\left(-\omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right)\frac{I_1(2\nu\sqrt{\gamma_\nu(\tau) + a^2})}{I_1(2a\nu)},$$

где $\omega^2 = -1$; $\gamma_\nu(\tau) = \exp(\omega\tau/\sigma_\nu) - 1$. Согласно утверждению 2 имеем $\sigma_\nu \to \infty$ и, следовательно, $\gamma_\nu(\tau) \to 0$. Используя главный член асимптотики (23), получаем при $\nu \to \infty$

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(2a\nu\left(\sqrt{1 + \frac{\gamma_\nu(\tau)}{a^2}} - 1\right) - \omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right).$$

Используя разложение по формуле Тейлора

$$\sqrt{1+\frac{\gamma_\nu(\tau)}{a^2}} = 1+\frac{\omega\tau}{2a^2\sigma_\nu}+\frac{(1-2a^2)\tau^2}{8a^4\sigma_\nu^2}+o(\sigma_\nu^{-2}),$$

получим выражение

$$\varphi_\nu(\tau)\sim\exp\left(\omega\tau\frac{\nu/a-m_\nu}{\sigma_\nu}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2a^2}\right)\frac{\nu}{a}\frac{\tau^2}{\sigma_\nu^2}\right). \qquad (28)$$

Покажем, что первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (28) стремится к нулю. Действительно, из формул (23) и (25) следует

$$m_\nu-\frac{\nu}{a}=\frac{\nu}{a}\left(\frac{I_0(2a\nu)-I_1(2a\nu)}{I_1(2a\nu)}\right)\sim\frac{1}{4a^2},$$

откуда $m_\nu-\nu/a=o(\sigma_\nu)$. Учитывая асимптотику для σ_ν^2 в утверждении 2, получаем окончательно

$$\varphi_\nu(\tau)\sim\exp\left(-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2a^2}\right)\frac{\nu}{a}\frac{\tau^2}{\sigma_\nu^2}\right)\sim e^{-\tau^2/2}.$$

Теорема доказана.

Решение стационарного уравнения в случае $p_2^0>0$, $p_2^0p_0^2<1$. Предельная теорема. Схема взаимодействий в данном случае принимает вид $0\to k_0T, k_0=1,2; 2T\to k_2T, k_2=0,1$. Возможные переходы между состояниями марковского процесса $\xi(t)$ показаны на рис. 4.

Введем обозначения $\nu=\sqrt{\lambda p_2^0/\mu}$, $a=(1-p_2^0p_0^2)/2p_2^0$. С помощью замены переменных $z=2\nu(s+p_0^2)$, $y(z)=(s+p_0^2)^{-1}e^{\nu s}f(s)$ стационарное уравнение (9) сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению $zy''+(2-z)y'-(1+a\nu)y=0$ [12, гл. 6, § 1, уравнение (2)]. Аналитическое на всей комплексной плоскости решение этого уравнения имеет вид

$$y(z)=C\Phi(1+a\nu,2;z),$$

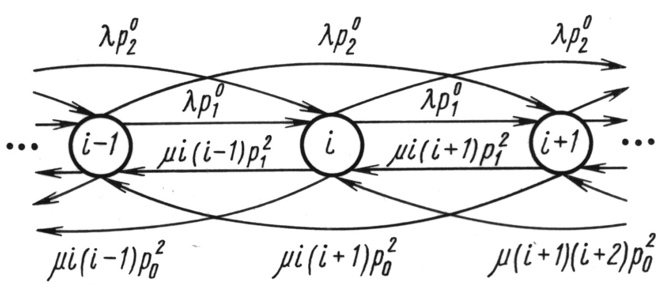

Рис. 4. Диаграмма переходов в случае $p_2^0>0, p_2^0p_0^2<1$

где $\Phi(\alpha,\beta;z)$ — функция Куммера с параметрами α, β [12]; C — произвольная константа. Соответственно, аналитическое в круге $|s|<1$ решение уравнения (9) имеет вид $f(s)=C(s+p_0^2)e^{-\nu s}\Phi(1+a\nu,2;2\nu(s+ + p_0^2))$. С помощью условия нормировки $f(1)=1$ приходим к выражению для производящей функции стационарного распределения:

$$f(s)=e^{\nu(1-s)}\left(\frac{s+p_0^2}{1+p_0^2}\right)\frac{\Phi(1+a\nu,2;2\nu(s+p_0^2))}{\Phi(1+a\nu,2;2\nu(1+p_0^2))}. \tag{29}$$

Обозначим η_ν случайную величину на $N=\{0,1,\dots\}$ с распределением, соответствующим производящей функции (29). Математическое ожидание и дисперсия примут вид

$$m_\nu=\nu\phi_\nu+\frac{1}{b}, \tag{30}$$

$$\sigma_\nu^2=\nu^2\left(1+\frac{2a}{b}-\phi_\nu^2\right)+\nu\phi_\nu\left(1-\frac{2}{b}\right)+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}, \tag{31}$$

где $b=1+p_0^2$,

$$\phi_\nu=\frac{2\Phi'(1+a\nu,2;2b\nu)}{\Phi(1+a\nu,2;2b\nu)}-1. \tag{32}$$

Утверждение 3. *При $\nu\to\infty$ справедливы асимптотики*

$$m_\nu\sim\nu\sqrt{1+\frac{2a}{b}},\qquad \sigma_\nu^2\sim\nu\left(1-\frac{a}{b(2a+b)}\right)\sqrt{1+\frac{2a}{b}}. \tag{33}$$

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением функции Куммера [12, гл. 6, § 11, формула (2)]:

$$\Phi(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{2\pi\omega}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{(1+)}e^{zu}u^{\alpha-1}(u-1)^{\beta-\alpha-1}\,du, \tag{34}$$

$\operatorname{Re}\alpha>0$. Здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, а контуром интегрирования служит петля, которая начинается и заканчивается в точке $u=0$ и обходит точку $u=1$ в положительном направлении. Полученные далее асимптотики для выражений, содержащих функцию $\Phi(1+a\nu,2;2b\nu)$, основаны на вычислении асимптотики при $\nu\to\infty$ интеграла

$$\int\limits_0^{(1+)}e^{\nu S(u)}h(u)\,du,\qquad S(u)=2bu+a\ln\frac{u}{u-1} \tag{35}$$

(под значением логарифма подразумевается главная ветвь), где $h(u)$ — функция, аналитическая в области $\operatorname{Re}u>0$. Указанная асимптотика находится с помощью метода перевала [13, 14]. Функция $S(u)$ является однозначной аналитической функцией в области $\mathrm{Re}\,u > 0$ с разрезом по отрезку $[0, 1]$ и имеет простую точку перевала u_0, определяемую из условия $S'(u_0) = 0$. Дифференцируя функцию $S(u)$, находим

$$u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2a}{b}}, \qquad S''(u_0) = \frac{4b^2}{a}\sqrt{1 + \frac{2a}{b}},$$

$$S'''(u_0) = -\frac{8b^2}{a}\left(3 + \frac{2b}{a}\right), \qquad S^{(4)}(u_0) = \frac{96b^4}{a^3}\left(1 + \frac{a}{b}\right)\sqrt{1 + \frac{2a}{b}}.$$

Контур интегрирования может быть деформирован в петлю, проходящую через точку u_0 и лежащую при $u \neq u_0$ в области $\mathrm{Re}S(u) < \mathrm{Re}S(u_0)$ (рис. 5). В рассматриваемом случае выполнены условия теоремы 7.1 из работы [14, гл. 4]. Согласно этой теореме асимптотика интеграла (35) с точностью до второго члена определяется выражением

$$\int\limits_0^{(1+)} e^{\nu S(u)} h(u)\, du \sim \omega \sqrt{\frac{2\pi}{\nu S''(u_0)}}\, e^{\nu S(u_0)} \left(h(u_0) - \frac{1}{4\nu S''(u_0)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(2h''(u_0) - \frac{2S'''(u_0)h'(u_0)}{S''(u_0)} + \left(\frac{5(S'''(u_0))^2}{6(S''(u_0))^2} - \frac{S^{(4)}(u_0)}{2S''(u_0)} \right) h(u_0) \right) \right). \tag{36}$$

Введем обозначение

$$R_\nu = \frac{e^{\nu S(u_0)}}{a\nu\sqrt{2\pi\nu S''(u_0)}}.$$

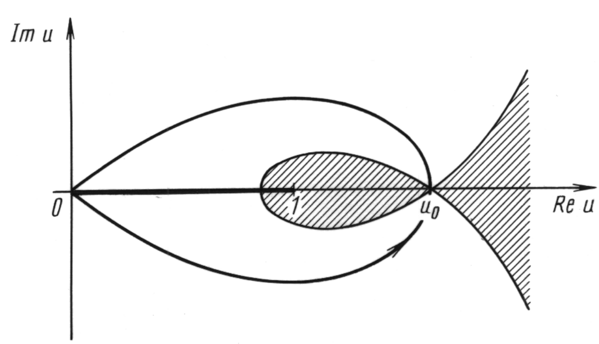

Рис. 5. Контур интегрирования в области $\mathrm{Re}\,S(u) < \mathrm{Re}\,S(u_0)$ **(область** $\mathrm{Re}\,S(u) > \mathrm{Re}\,S(u_0)$ **заштрихована)**

Учитывая равенства $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(1)=1$, получаем с помощью выражения (36) следующие асимптотические формулы:

$$\Phi(1+a\nu,2;2b\nu)=\frac{1}{2\pi\omega\, a\nu}\int\limits_0^{(1+)} e^{\nu S(u)}\,du\sim R_\nu, \tag{37}$$

$$2\Phi'(1+a\nu,2;2b\nu)-\Phi(1+a\nu,2;2b\nu)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\omega\, a\nu}\int\limits_0^{(1+)} e^{\nu S(u)}(2u-1)\,du\sim R_\nu\sqrt{1+\frac{2a}{b}}, \tag{38}$$

$$2\Phi'(1+a\nu,2;2b\nu)-\left(1+\sqrt{1+\frac{2a}{b}}\right)\Phi(1+a\nu,2;2b\nu)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\omega\, a\nu}\int\limits_0^{(1+)} e^{\nu S(u)}\left(2u-1-\sqrt{1+\frac{2a}{b}}\right)du\sim-\frac{3a+2b}{2b(2a+b)}\frac{R_\nu}{\nu}, \tag{39}$$

$$2\Phi'(1+a\nu,2;2b\nu)-\left(1-\sqrt{1+\frac{2a}{b}}\right)\Phi(1+a\nu,2;2b\nu)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\omega\, a\nu}\int\limits_0^{(1+)} e^{\nu S(u)}\left(2u-1+\sqrt{1+\frac{2a}{b}}\right)du\sim 2R_\nu\sqrt{1+\frac{2a}{b}}. \tag{40}$$

При выводе формул (37), (38) и (40) в асимптотической формуле (36) используется только главный член, а при выводе формулы (39) используется все выражение (36).

Из выражений (32), (37) и (38) получаем

$$\phi_\nu\sim\sqrt{1+\frac{2a}{b}}. \tag{41}$$

Из формул (39) и (40) следует, что

$$\begin{gathered}\sqrt{1+\frac{2a}{b}}-\phi_\nu\sim\frac{3a+2b}{2b(2a+b)\nu},\\ \sqrt{1+\frac{2a}{b}}+\phi_\nu\sim 2\sqrt{1+\frac{2a}{b}}.\end{gathered} \tag{42}$$

Перемножая последние формулы, получаем

$$1+\frac{2a}{b}-\phi_\nu^2 \sim \frac{3a+2b}{b(2a+b)\nu}\sqrt{1+\frac{2a}{b}}. \tag{43}$$

Применяя асимптотики (41) и (43) к выражениям для математического ожидания (30) и дисперсии (31), завершаем доказательство утверждения.

Теорема 3. *При $\nu\to\infty$ и фиксированном $x\in(-\infty,+\infty)$ имеем*

$$\lim_{\nu\to\infty}\mathrm{P}\left\{\frac{\eta_\nu-m_\nu}{\sigma_\nu}\le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy.$$

Доказательство. Характеристическая функция случайной величины $(\eta_\nu-m_\nu)/\sigma_\nu$ равна

$$\varphi_\nu(\tau)=\mathrm{M}\left(\omega\tau\frac{\eta_\nu-m_\nu}{\sigma_\nu}\right)=\exp\left(-\omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right)f\left(\exp\left(\frac{\omega\tau}{\sigma_\nu}\right)\right)=$$

$$=\left(1+\frac{\gamma_\nu(\tau)}{b}\right)\exp\left(-\nu\gamma_\nu(\tau)-\omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right)\frac{\Phi(1+a\nu,2,2\nu(\gamma_\nu(\tau)+b))}{\Phi(1+a\nu,2,2b\nu)},$$

где $\gamma_\nu(\tau)=\exp(\omega\tau/\sigma_\nu)-1$. Согласно формуле (34) имеем интегральное представление

$$\Phi(1+a\nu,2;2\nu(\gamma_\nu+b))=\frac{1}{2\pi\omega\, a\nu}\int\limits_0^{(1+)}e^{\nu S(u,\nu)}\,du,$$

где $S(u,\nu)=2(\gamma_\nu+b)u+a\ln(u/(u-1))$. Асимптотика интеграла при $\nu\to\infty$ находится с помощью метода перевала, причем определяемая из условия $S'_u(u,\nu)=0$ критическая точка $u_0(\nu)$ зависит от параметра ν [13, гл. 5, § 21]. Нетрудно получить соотношения

$$S(u_0,\nu)-S(u_0)=2u_0\gamma_\nu,\quad S'_u(u_0,\nu)=2\gamma_\nu,\quad S''_{uu}(u_0,\nu)=S''(u_0), \tag{44}$$

где $S(u)$ и u_0 определены при доказательстве утверждения 3. Поскольку $\gamma_\nu\to 0$, то $S(u,\nu)\to S(u)$ и $u_0(\nu)\to u_0$. При этом выполнены условия теоремы Фабера [13, теорема 21.3], согласно которой главный член асимптотики определяется выражением

$$\int\limits_0^{(1+)}e^{\nu S(u,\nu)}\,du\sim\omega\sqrt{\frac{2\pi}{\nu S''_{uu}(u_0,\nu)}}\exp\left(\nu S_u(u_0,\nu)-\frac{\nu(S'_u(u_0,\nu))^2}{2S''_{uu}(u_0,\nu)}\right), \tag{45}$$

в котором u_0 — приближенная точка перевала. Из выражения (45) с учетом формул (37) и (44) получаем асимптотику

$$\frac{\Phi(1+a\nu, 2; 2\nu(\gamma_\nu + b))}{\Phi(1+a\nu, 2; 2b\nu)} \sim \exp\left(2u_0\nu\gamma_\nu - \frac{2\nu\gamma_\nu^2}{S''(u_0)}\right).$$

Следовательно, для характеристической функции при $\nu \to \infty$ имеем

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left((2u_0 - 1)\nu\gamma_\nu(\tau) - \frac{2\nu\gamma_\nu^2(\tau)}{S''(u_0)} - \omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right) =$$

$$= \exp\left(\nu\gamma_\nu(\tau)\sqrt{1+\frac{2a}{b}} - \frac{a\nu\gamma_\nu^2(\tau)}{2b(2a+b)}\sqrt{1+\frac{2a}{b}} - \omega\tau\frac{m_\nu}{\sigma_\nu}\right).$$

Используя разложения по формуле Тейлора

$$\gamma_\nu(\tau) = \frac{\omega\tau}{\sigma_\nu} - \frac{\tau^2}{2\sigma_\nu^2} + o(\sigma_\nu^{-2}), \qquad \gamma_\nu^2(\tau) = -\frac{\tau^2}{\sigma_\nu^2} + o(\sigma_\nu^{-2}),$$

получим выражение

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(\omega\tau\frac{\nu\sqrt{1+2a/b} - m_\nu}{\sigma_\nu} - \left(1 - \frac{a}{b(2a+b)}\right)\sqrt{1+\frac{2a}{b}}\frac{\nu\tau^2}{2\sigma_\nu^2}\right). \tag{46}$$

Заметим (см. формулу (42)), что

$$m_\nu - \nu\sqrt{1+\frac{2a}{b}} = \frac{a}{2b(2a+b)} + o(1),$$

откуда следует, что первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (46) стремится к нулю. Далее, используя асимптотику для σ_ν^2 в утверждении 3, при $\nu \to \infty$ получаем окончательно

$$\varphi_\nu(\tau) \sim \exp\left(-\left(1 - \frac{a}{b(2a+b)}\right)\sqrt{1+\frac{2a}{b}}\frac{\nu\tau^2}{2\sigma_\nu^2}\right) \sim e^{-\tau^2/2}.$$

Теорема доказана.

Заключение. Применение аналитических методов позволило исследовать асимптотические свойства стационарного распределения для процессов со схемами вида $0 \to k_0T$, $2T \to k_2T$. Доказательства предельных теорем следуют из интегральных представлений решений уравнения Колмогорова. Предложенные в работе методы обобщаются для процессов со схемами вида $0 \to k_0T$, $T \to k_1T$, $2T \to k_2T$. Переход $T \to 2T$ характерен для автокаталитической химической реакции, а переход $2T \to 3T$ учитывает возможность размножения в популяции индивидуумов [18]. Факт асимптотической нормальности стационарного распределения является новым для рассматриваемого класса стохастических моделей систем с взаимодействием частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эмануэль Н. М., Кнорре Д. Г. Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа, 1974. – 400 с.
2. Леонтович М. А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1935. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 211–230.
3. Морозов А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
4. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
6. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
7. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
8. Ланге А. М. Об одном ветвящемся процессе с иммиграцией и взаимодействием частиц // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. “Вероятность и статистика”. – 2001. – Т. 8. – Вып. 2. – С. 783–784.
9. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
10. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
11. Калинкин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57. – Вып. 2. – С. 23–84.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
13. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 2. – Рига: Зинатне, 1977. – 464 с.
14. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 376 с.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
16. Калинкин А. В. Стационарное распределение системы взаимодействующих частиц с дискретными состояниями // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 268. – Вып. 6. – С. 1362–1364.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
18. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. – 376 с.

Статья поступила в редакцию 18.05.2004