Андрей Михайлович Ланге родился в 1979 г., окончил в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области моделирования стохастических систем с взаимодействием.

A.M. Lange (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of simulation of stochastic systems with interaction.

УДК 519.2

И. В. П а в л о в

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ С НЕНАГРУЖЕННЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

Предложен новый метод вычисления нижней доверительной границы для показателя надежности — вероятности безотказной работы на заданном интервале времени для системы с ненагруженным резервированием внутри различных подсистем по результатам испытаний отдельных элементов системы. Приведен ряд численных примеров, проведено сравнение предлагаемого подхода с другими известными методами решения этой задачи.

Введение и постановка задачи. Пусть имеется система, включающая в себя m различных подсистем; каждая i-я подсистема состоит из одного основного и $n_i - 1$ резервных элементов, находящихся в режиме ненагруженного (“холодного”) резерва [1]. Каждый элемент i-го типа (i-й подсистемы) имеет экспоненциальное распределение времени безотказной работы с функцией надежности $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, где λ_i, $i = 1, \ldots, m$, — параметр. Каждая i-я подсистема отказывает в случае отказа всех n_i составляющих ее элементов. Система в целом отказывает в случае отказа любой из подсистем, т.е. структурная схема надежности системы представляет собой последовательное соединение m различных подсистем. Обозначим через $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ вектор параметров надежности элементов системы. В предположении, что отказы элементов в различных подсистемах происходят независимо друг от друга, вероятность безотказной работы (надежность) системы в течение времени t определяется известной формулой [1]

$$P(\vec{\lambda}) = \prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda_i), \qquad (1)$$

где

$$h_i(\lambda_i) = e^{-\lambda_i t} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{(\lambda_i t)^j}{j!}$$

— функция надежности для n_i-кратной свертки экспоненциального распределения с параметром λ_i или, другими словами, для гамма-распределения $\Gamma(\lambda_i, n_i)$ с параметрами λ_i, n_i [1, 2].

Надежность системы $P(\vec{\lambda})$, таким образом, определяется вектором параметров надежности элементов $\vec{\lambda}$, при этом точные значения параметров λ_i, $i = 1, \ldots, m$, чаще всего неизвестны, а известны лишь результаты испытаний различных подсистем. Далее предполагается, что испытания элементов i-го типа (i-й подсистемы) проводились в соответствии со стандартными планами испытаний на надежность вида $[N_i, U, r_i]$, т.е. испытывались N_i элементов i-го типа, испытания проводились без восстановления отказавших элементов до наблюдения r_i отказов, $i = 1, \ldots, m$, в результате чего было зафиксировано значение S_i суммарной наработки (суммарного времени испытаний) элементов i-го типа [1].

Требуется, исходя из вектора результатов испытаний $\vec{S} = (S_1, \ldots, S_m)$, $i = 1, \ldots, m$, различных подсистем, построить нижнюю доверительную границу с заданным коэффициентом доверия γ для показателя надежности (1) системы в целом. Заметим, что функция (1) после простых преобразований может быть представлена в виде

$$P(\vec{\lambda}) = \exp(-f(\vec{\lambda})),$$

где

$$f(\vec{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda_i), \qquad (2)$$

$$f_i(\lambda_i) = -\ln h_i(\lambda_i). \qquad (3)$$

Нетрудно далее показать непосредственным дифференцированием, что $f_i''(\lambda_i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Тем самым, функция $f(\vec{\lambda})$ выпукла вниз по $\vec{\lambda}$ как сумма выпуклых вниз функций.

Построение нижней γ-доверительной границы для надежности системы $P(\vec{\lambda})$ сводится к построению верхней γ-доверительной границы

$\bar{f}(\vec{S})$ для функции $f(\vec{\lambda})$. Заметим, что данная задача до настоящего времени решалась главным образом для так называемой "биномиальной" схемы испытаний и систем с нагруженным резервированием [1, 3, 4].

Приведем далее основные методы решения этой задачи для рассматриваемой здесь системы с ненагруженным резервированием.

Метод прямоугольника. Пусть

$$\bar{\lambda}_i(\gamma) = \frac{\Gamma_\gamma(1, r_i)}{S_i} \tag{4}$$

— стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра λ_i элемента i-го типа, вычисленная по результату испытаний — суммарной наработке S_i; здесь $\Gamma_\gamma(1, r_i)$ — квантиль уровня γ для гамма-распределения с параметрами $1, r_i$. Для данного метода искомую верхнюю γ-доверительную границу функции $f(\vec{\lambda})$ находим по формуле

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{m} f_i(\bar{\lambda}_i(\gamma_э)), \tag{5}$$

где $\gamma_э = \sqrt[m]{\gamma}$, $i = 1, \ldots, m$, — коэффициент доверия для отдельных элементов. В силу указанной зависимости между величинами γ и $\gamma_э$ при возрастании размерности задачи m (числа различных типов элементов системы) происходит значительное снижение эффективности данного метода.

Метод плоскости. Данный метод основан на том, что статистика $T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_i$ имеет стандартное распределение $\Gamma\left(1, \sum_{i=1}^{m} r_i\right)$ [1, 2]. Отсюда следует, что верхняя γ-доверительная граница $\bar{f}$ для функции $f(\vec{\lambda})$ может быть найдена как $\bar{f} = \max f(\vec{\lambda})$, где максимум берется по области H, заданной ограничениями

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_i \leqslant \Gamma_\gamma\left(1, \sum_{i=1}^{m} r_i\right),$$
$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

В силу выпуклости функции $f(\vec{\lambda})$ указанный максимум достигается в одной из "крайних" точек области H вида $(0, \ldots, 0, \tilde{\lambda}_i, 0, \ldots, 0)$, где

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\Gamma_\gamma\left(1, \sum_{i=1}^{m} r_i\right)}{S_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, искомая доверительная граница для данного метода имеет вид

$$\bar{f} = \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\tilde{\lambda}_i).$$

Фидуциальный метод. Рассмотрим еще один метод доверительного оценивания надежности системы, связанный с применением известного фидуциального подхода Фишера [5, 6].

Заметим, что функция распределения статистики S_i, наблюдаемой в результате испытаний i-й подсистемы, имеет вид [1]

$$F_i(S_i, \lambda_i) = 1 - e^{-\lambda_i S_i} \sum_{n=0}^{r_i-1} \frac{(\lambda_i S_i)^n}{n!}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

При данном фиксированном значении статистики $S_i = S_i^*$, полученном в результате испытаний, функция (6) может рассматриваться как фидуциальная функция распределения параметра λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Величина $f(\vec{\lambda})$ при этом имеет соответствующее распределение, индуцированное функцией (6) распределения отдельных параметров λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Верхняя γ-фидуциальная граница $\bar{f}$ для функции $f(\vec{\lambda})$ определяется как квантиль уровня γ указанного распределения для f. Аналитическое вычисление величины $\bar{f}$ чаще всего является довольно затруднительным, тем не менее, она может быть достаточно просто определена численно на ЭВМ на основе стандартной процедуры метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). В одномерном случае (при $m = 1$) определяемая таким образом γ-фидуциальная граница для параметра λ_i совпадает с γ-доверительной границей (4). В многомерном случае при $m > 1$ фидуциальные и доверительные границы могут существенно различаться и, более того, при применении указанного фидуциального подхода могут быть получены некорректные результаты — точный коэффициент доверия для фидуциальной границы $\bar{f}$ в зависимости от вида оцениваемой функции $f(\vec{\lambda})$ может быть значительно меньше величины γ [4–7].

Покажем далее, что для функции вида (2), (3), соответствующей рассматриваемой здесь модели системы с ненагруженным резервированием, применение данного метода является корректным при оценке $f(\vec{\lambda})$ сверху или, другими словами, точный коэффициент доверия для верхней фидуциальной границы $\bar{f}$ не менее γ. Заметим, что верхняя γ-фидуциальная граница $\bar{f}$ одновременно является γ-доверительной в обычном смысле (т.е. $\mathrm{P}\big\{\bar{f} \geq f(\vec{\lambda})\big\} = \gamma$ при всех $\vec{\lambda}$) для любой функции вида

$$f(\vec{\lambda}) = c_0 \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{a_i}, \tag{7}$$

где c_0, $a_1, \ldots, a_m$ — любые положительные коэффициенты. Другими словами, фидуциальный подход является корректным при доверительном оценивании любой функции вида (7), и, более того, при применении данного подхода получаем доверительную границу с постоянным при всех $\vec{\lambda}$ коэффициентом доверия. Введем вспомогательные переменные $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_m)$, где $z_i = \ln \lambda_i, i = 1, \ldots, m$. Как видно из формулы (7), в новых переменных $\vec{z}$ фидуциальный подход является корректным в указанном смысле для любой линейной функции вида

$$g(\vec{z}, \vec{a}) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i z_i, \tag{8}$$

где $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ — вектор коэффициентов, $a_0 = \ln c_0$. Набор всех функций вида (8) далее будем называть базовым набором.

Оцениваемая функция $f(\vec{\lambda})$ в новых переменных имеет вид

$$\tilde{f}(\vec{z}) = f(e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_m}),$$

при этом в силу выпуклости вниз исходной функции $f(\vec{\lambda})$ функция $\tilde{f}(\vec{z})$ также выпукла вниз по вектору $\vec{z}$. Тем самым, эта функция может быть представлена через линейные функции базового набора (8) в следующем виде:

$$\tilde{f}(\vec{z}) = \max_{\vec{a} \in A} g(\vec{z}, \vec{a}), \tag{9}$$

где A — некоторое подмножество множества возможных значений коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Обозначим через $\vec{a}^* = \vec{a}^*(\vec{z}) = (a_0^*(\vec{z}), a_1^*(\vec{z}), \ldots, a_m^*(\vec{z}))$ вектор коэффициентов, при которых для данного $\vec{z}$ достигается максимум в выражении (9), т.е.

$$\max_{\vec{a} \in A} g(\vec{z}, \vec{a}) = g(\vec{z}, \vec{a}^*(\vec{z})). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$a_0^*(\vec{z}) = \tilde{f}(\vec{z}) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}(\vec{z})}{\partial z_i} z_i,$$

$$a_i^*(\vec{z}) = \frac{\partial \tilde{f}(\vec{z})}{\partial z_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

При данном фиксированном векторе коэффициентов $\vec{a}$ обозначим через $\bar{g}(\vec{S}, \vec{a})$ верхнюю γ-фидуциальную границу для функции $g(\vec{z}, \vec{a})$ из базового набора. Величина $\bar{g}(\vec{S}, \vec{a})$ одновременно является верхней γ-доверительной границей для $g(\vec{z}, \vec{a})$, т.е.

$$\mathrm{P}\big\{\bar{g}(\vec{S}, \vec{a}) \geq g(\vec{z}, \vec{a})\big\} = \gamma$$

при всех $\vec{z}$. Введем далее функцию

$$h(\vec{S}) = \max_{\vec{a} \in A} \bar{g}(\vec{S}, \vec{a}),$$

которую будем называть фидуциальной мажорантой для оцениваемой функции $\tilde{f}(\vec{z})$. Непосредственно из ее определения следует, что

$$h(\vec{S}) \geq \bar{g}\big(\vec{S}, \vec{a}^*(\vec{z})\big). \tag{11}$$

Отсюда с учетом выражений (9), (10) получаем, что при каждом фиксированном $\vec{z}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left\{h(\vec{S}) \geqslant \tilde{f}(\vec{z})\right\} \geqslant \mathrm{P}\left\{\bar{g}(\vec{S}, \vec{a}^*(\vec{z})) \geqslant \tilde{f}(\vec{z})\right\}, \\ &\mathrm{P}\left\{\bar{g}(\vec{S}, \vec{a}^*(\vec{z})) \geq \tilde{f}(\vec{z})\right\} = \mathrm{P}\left\{\bar{g}(\vec{S}, \vec{a}^*(\vec{z})) \geqslant g(\vec{z}, \vec{a}^*(\vec{z}))\right\} = \gamma, \end{aligned} \tag{12}$$

т.е. фидуциальная мажоранта $h(\vec{S})$ является верхней доверительной границей для $\tilde{f}(\vec{z})$ с коэффициентом доверия не менее γ. Далее из выражения (9) следует, что при любом $\vec{a} \in A$ справедливо неравенство

$$\tilde{f}(\vec{z}) \geq g(\vec{z}, \vec{a})$$

для любого вектора параметров $\vec{z}$, откуда получаем аналогичное неравенство для фидуциальных границ

$$\bar{f}(\vec{S}) \geq \bar{g}(\vec{S}, \vec{a}), \quad \vec{a} \in A,$$

для любого вектора результатов $\vec{S}$. Отсюда в соответствии с определением фидуциальной мажоранты $h(\vec{S})$ следует

$$\bar{f}(\vec{S}) \geq h(\vec{S})$$

при любом $\vec{S}$. Это означает, что верхняя γ-фидуциальная граница $\bar{f}(\vec{S})$ для $\tilde{f}(\vec{z})$ одновременно является верхней доверительной границей для $\tilde{f}(\vec{z})$ с коэффициентом доверия не менее γ.

Таким образом, рассмотренный фидуциальный метод может применяться при доверительном оценивании сверху функции $f(\vec{\lambda})$ вида (2), (3), что соответствует оценке снизу надежности рассматриваемой здесь системы с ненагруженным резервированием. Далее приведем численные примеры расчета нижней доверительной границы надежности для различных случаев на основе приведенных выше методов. Как видно из приводимых далее результатов, применение фидуциального метода во многих случаях позволяет значительно улучшить результаты, полученные с использованием иных методов.

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из $m = 10$ подсистем. Количество n_i резервных элементов в i-й подсистеме, значения S_i суммарной наработки, зафиксированной в ходе испытаний элементов i-го типа, которые проводились до наблюдения r_i отказов, $i = 1, \ldots, m$, и результаты расчета нижней γ-доверительной границы надежности системы при $\gamma = 0{,}9$ на основе рассмотренных методов представлены в табл. 1; здесь $\underline{P}_{\text{МП}}$, $\underline{P}_{\text{МПЛ}}$, $\underline{P}_{\text{ФМ}}$ — оценки снизу надежности системы, полученные на основе соответственно метода прямоугольника, метода плоскости и фидуциального метода.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
r_i	3	2	4	3	3	2	3	3	2	2
S_i	101	92	131	117	127	79	99	98	69	74

$\underline{P}_{\text{МП}} = 0{,}968$ $\underline{P}_{\text{МПЛ}} = 0{,}887$ $\underline{P}_{\text{ФМ}} = 0{,}986$

Пример 2. Для системы, состоящей из $m = 8$ подсистем, результаты расчета нижней γ-доверительной границы надежности системы при $\gamma = 0{,}9$ представлены в табл. 2.

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	2	3	3	3	2	2	2	4
r_i	2	1	3	2	1	1	2	3
S_i	68	35	99	79	27	21	69	81

$\underline{P}_{\text{МП}} = 0{,}958$ $\underline{P}_{\text{МПЛ}} = 0{,}632$ $\underline{P}_{\text{ФМ}} = 0{,}988$

Пример 3. Для системы, состоящей из $m = 15$ подсистем, результаты расчета нижней γ-доверительной границы надежности системы при $\gamma = 0{,}9$ представлены в табл. 3.

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_i	2	3	3	3	2	2	2	4	4	4	4	3	3	3	2
r_i	3	2	3	3	2	2	2	3	2	3	3	2	2	2	1
S_i	91	79	97	93	59	58	63	98	101	89	96	75	71	72	41

$\underline{P}_{\text{МП}} = 0{,}967$ $\underline{P}_{\text{МПЛ}} = 0{,}580$ $\underline{P}_{\text{ФМ}} = 0{,}989$

Как видно из приведенных примеров, фидуциального метод позволяет получить существенный выигрыш при доверительном оценивании надежности системы снизу. В связи с этим в дальнейшем представляется целесообразным обобщение данного подхода для других случаев, в частности для систем со сложной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Горяинов В. Б., Павлов И. В., Цветкова Г. М., Тескин О. И. Математическая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 424 с.
3. Судаков Р. С. К вопросу об интервальном оценивании показателя надежности последовательной системы // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. – 1974. – № 3. – С. 114–122.
4. Gnedenko B. V., Pavlov I. V., Ushakov I. A. Statistical reliability engineering. – N.Y.: John Wiley, 1999. – 514 p.
5. Fisher R. A. The fiducial argument in statistical inference // Ann. of Eugenics. – 1935. – V. 5. – № 3. – P. 391–398.
6. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения / Пер. с англ. под ред. Ю.В. Линника. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
7. Фархадзаде Э. М. О расхождении граничных значений доверительных и фидуциальных интервалов параметров надежности систем // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. – 1979. – № 4. – С. 143–148.

Статья поступила в редакцию 23.09.2004

Игорь Валерианович Павлов родился в 1945 г., окончил в 1968 г. Московский физико-технический институт. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 70 научных работ в области теории вероятностей, математической статистики и теории надежности.

I.V. Pavlov (b. 1945) graduated from the Moscow Institute for Physics and Technology in 1968. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 70 publications in the field of theory of probabilities, mathematical statistics and theory of reliability.