

В. С. З а р у б и н, Е. Е. К р а с н о в с к и й

## **ДВОЙСТВЕННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ\***

*Получена двойственная вариационная постановка задачи деформационной теории термопластичности анизотропного тела. Построены функционалы в перемещениях и напряжениях. Показано, что функционал в перемещениях достигает минимума на точном решении задачи, а функционал в напряжениях — максимуму.*

В настоящее время в промышленности все чаще применяются металлокомпозиты (МКМ), которые обладают такими преимуществами, как высокие значения удельных прочностных характеристик и модулей упругости, низкие коэффициенты теплового расширения, высокие вязкость разрушения и ударная вязкость; широкий диапазон рабочих температур. Их применяют в случаях, когда необходимо обеспечить работу техники при низких, высоких и сверхвысоких температурах, в агрессивных средах, при статических, циклических, ударных, вибрационных и других нагрузках.

Металлокомпозиты обладают способностью к пластическому деформированию, которое является анизотропным. Экспериментальные исследования неупругих свойств металлокомпозитов проведены, в частности, в работах [1–3].

Помимо композитов, анизотропные свойства при пластическом деформировании проявляют традиционные конструкционные материалы. Так, в работе [4] проведено экспериментальное исследование малых пластических деформаций анизотропных конструкционных материалов — алюминиевых сплавов Д16Т, АМг6 и АМцС — в условиях простого нагружения. Известна также анизотропия, появляющаяся в результате прокатки листа металла [5].

В настоящей работе рассматривается случай простого нагружения анизотропных сред. Поэтому для описания их пластического деформирования использована деформационная теория термопластичности,

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования России “Университеты России” (проект УР03.01.008).

определяющие соотношения которой приведены на основе положений работ [6–8]. Выделено напряженное состояние, соответствующее только объемной упругой деформации, и введены обобщенные девиаторы тензоров напряжений и деформации. Постулируется существование инвариантной к виду напряженного состояния зависимости между обобщенными интенсивностями напряжений и деформаций, и рассматривается функциональная связь квадратичных инвариантов обобщенных девиаторов тензоров напряжений и деформации.

Следующим этапом после создания математической модели, описывающей все характерные свойства некоторого материала, является развитие численных методов для решения практических задач по расчету конструкций, изготовленных из него. Действительно, “для механики недостаточно написать определяющие уравнения, нужно уметь решать их при данных граничных условиях и решать возможно точно” [9].

Однако при практическом использовании соотношений деформационной теории пластичности возникает необходимость решения нелинейных задач, точные аналитические решения которых получить, как правило, невозможно. Следовательно, необходимо не только создать методы их численного решения, но и оценить погрешность полученных приближенных результатов. Для этого используются вариационные методы, суть которых заключается в том, что вместо исходной краевой задачи решается задача о нахождении стационарной точки некоторого функционала, соответствующего математической формулировке некоторого вариационного принципа.

Преимуществом вариационного подхода является не только возможность эффективного поиска решения с помощью прямых методов (например, метода конечных элементов), но и возможность апостериорной оценки погрешности решения. Для получения такой оценки необходимо построить два функционала — прямой и встречный, достигающие на точном решении задачи альтернативных, но равных по значению экстремумов. В построении двух таких функционалов и заключается двойственная вариационная постановка задачи механики сплошной среды [10–12].

Для краевой задачи деформационной теории термопластичности изотропных тел в работе [11] получен прямой функционал в перемещениях, который достигает минимума на точном решении задачи. Значение такого функционала является качественной оценкой погрешности — из двух приближенных решений задачи следует отдать предпочтение тому из них, на котором значение функционала меньше. Построенный в напряжениях встречный функционал используется для

количественной оценки погрешности полученного с помощью прямого функционала приближенного решения задачи. Встречный функционал является двойственным к исходному прямому и достигает на точном решении задачи максимума. По разности значений прямого и встречного функционалов на приближенных решениях можно найти оценку погрешности приближенного решения в энергетической норме. Соответствующие функционалы для изотермического нагружения приведены, в частности, в работах [13, 14]. В то же время, функционалы для описания пластического деформирования анизотропных сред в известной авторам литературе рассмотрены не были. Поэтому целью настоящей работы является получение двойственной вариационной постановки задачи деформационной теории термопластичности анизотропных тел.

**Используемые определяющие соотношения.** Рассмотрим гипотезы деформационной теории термопластичности анизотропных тел, изложенные на основе работ [6–8].

Аналог объемной деформации  $\bar{\varepsilon}$  и аналог объемного напряжения  $\bar{\sigma}$  связаны соотношением

$$\bar{\sigma} = 3K^*(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T), \quad (1)$$

где  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\beta_{ij}$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma_{ij}\alpha_{ij}$ ;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформации;  $\beta_{ij} = C_{ijk}\alpha_{kl}/(3K^*)$  — компоненты тензора второго ранга;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $K^* = C_{ijkl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}/3$  — аналог модуля всестороннего сжатия;  $\alpha_{ij}$  — компоненты симметричного тензора, удовлетворяющие условию  $\alpha_{ij}\alpha_{ji} = 1$ ;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\bar{\varepsilon}^T = \varepsilon_{ij}^T\beta_{ij}$ ;  $\varepsilon_{ij}^T = \Delta T h_{ij}$  — компоненты тензора температурной деформации;  $h_{ij}$  — компоненты тензора коэффициентов линейного расширения материала;  $\Delta T$  — заданное изменение температуры по сравнению с первоначальной.

Введем аналоги девиаторов и шаровых тензоров напряжений и деформации  $s_{ij}^*$ ,  $\sigma_{ij}^*$ ,  $e_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$  с помощью равенств

$$s_{ij}^* = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*, \quad \sigma_{ij}^* = \bar{\sigma}\beta_{ij}, \quad e_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij}^* = \bar{\varepsilon}\alpha_{ij}. \quad (2)$$

Обобщенные интенсивности напряжений

$$\bar{\sigma}_n = \sqrt{3K^* B_{ijkl} s_{ij}^* s_{kl}^*} = \sqrt{(3K^* B_{ijkl} - \alpha_{ij}\alpha_{kl}) \sigma_{ij} \sigma_{kl}},$$

где  $B_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ , и деформаций  $\bar{\varepsilon}_n = \sqrt{C_{ijkl} e_{ij}^* e_{kl}^* / (3K^*)}$  в течение всего процесса деформирования связаны между собой зависимостью

$$s_{ij}^* = \frac{\bar{\sigma}_n}{3K^* \bar{\varepsilon}_n} C_{ijkl} e_{kl}^*. \quad (3)$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, постулируется существование инвариантной к виду напряженного состояния зависимости между обобщенными интенсивностями напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_и = \bar{\sigma}_и(\bar{\varepsilon}_и, T), \quad (4)$$

которая определяется экспериментально. При заданной температуре переход материала из упругого состояния в пластическое происходит при одном и том же значении  $\bar{\sigma}_и = \bar{\sigma}_{и0}$ .

Для упругой изотропной среды тензор  $\alpha$  имеет только диагональные компоненты  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1/\sqrt{3}$ . Отличные от нуля компоненты тензора  $C$  упругих постоянных имеют вид

$$C_{1122} = C_{2211} = C_{1133} = C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} = K - 2G/3,$$

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = K + 4G/3,$$

где  $K$  и  $G$  — модули всестороннего сжатия и сдвига материала. При этом  $K^* = K$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma_{kk}/\sqrt{3}$ , тензор  $\beta$  имеет только диагональные компоненты  $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 1/\sqrt{3}$ . Соответственно, выражение (1) приобретает вид

$$\sqrt{3} \left( \frac{\sigma_{kk}}{3} \right) = 3\sqrt{3} \left( \frac{\varepsilon_{kk}}{3} - \frac{\varepsilon_{kk}^T}{3} \right) = 3\sqrt{3}K \left( \frac{\varepsilon_{kk}}{3} - d\Delta T \right),$$

соответствующий приведенному в работе [11] линейному выражению для связи между средним нормальным напряжением и относительным изменением объема:

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = 3K \left( \frac{\varepsilon_{kk}}{3} - d\Delta T \right),$$

обе части которого умножены на  $\sqrt{3}$ ;  $d$  — коэффициент линейного расширения материала.

Константы  $\alpha_{ij}$  определяются из трех экспериментов на одноосное напряженное состояние и трех на простой сдвиг. Пусть при заданной температуре известны три значения  $\sigma_{iiY}$  предела текучести при растяжении вдоль каждой оси анизотропии и три значения  $\sigma_{iiS}$  предела текучести при сдвиге по площадкам, направление которого совпадает с направлениями анизотропии материала. Тогда константы  $\alpha_{ij}$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\bar{\sigma}_{и0} = \sqrt{(3K^* B_{1111} - \alpha_{11}\alpha_{11})\sigma_{11Y}\sigma_{11Y}},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{и0} &= \sqrt{(3K^* B_{2222} - \alpha_{22}\alpha_{22})\sigma_{22Y}\sigma_{22Y}}, \\
\bar{\sigma}_{и0} &= \sqrt{(3K^* B_{3333} - \alpha_{33}\alpha_{33})\sigma_{33Y}\sigma_{33Y}}, \\
\bar{\sigma}_{и0} &= 2\sqrt{(3K^* B_{1212} - \alpha_{12}\alpha_{12})\sigma_{12S}\sigma_{12S}}, \\
\bar{\sigma}_{и0} &= 2\sqrt{(3K^* B_{2323} - \alpha_{23}\alpha_{23})\sigma_{23S}\sigma_{23S}}, \\
\bar{\sigma}_{и0} &= 2\sqrt{(3K^* B_{1313} - \alpha_{13}\alpha_{13})\sigma_{13S}\sigma_{13S}}, \\
\alpha_{12} &= \alpha_{21}, \\
\alpha_{23} &= \alpha_{32}, \\
\alpha_{13} &= \alpha_{31}, \\
\alpha_{ij}\alpha_{ij} &= 1.
\end{aligned}$$

**Принцип минимума полной энергии.** Рассмотрим задачу механики деформируемого твердого тела в объеме  $\Omega$  с границей  $S = \partial\Omega$ . Нагружение принято квазистатическим, а деформации малыми. Предполагается, что трещинообразования или расслоения материала не происходит. Постановка задачи включает в себя соотношения (1)–(4), уравнения

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

и граничные условия

$$\sigma_{ij}n_j = w_i, \quad S_1 \subset S, \quad (7)$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad S_2 = S \setminus S_1, \quad (8)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $b_i$  — заданные компоненты объемной нагрузки;  $w_i$  — заданные компоненты поверхностной нагрузки;  $\bar{u}_i$  — заданные компоненты вектора перемещений;  $n_i$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела  $S = \partial\Omega$ .

Получим принцип минимума полной энергии для задачи (1)–(8).

Воспользуемся принципом виртуальной работы [11, 14]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int_{\Omega} b_i\delta u_i dV - \int_{S_1} w_i\delta u_i dS = 0, \quad (9)$$

где

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i} \right)$$

— вариации деформации;  $\delta u_i$  — вариации компонент вектора перемещений, которые не нарушают равенства (8).

Получим такую функцию  $\Pi$ , что

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV.$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = (s_{ij}^* + \bar{\sigma} \beta_{ij}) (\delta e_{ij}^* + \delta \bar{\varepsilon} \alpha_{ij}) = s_{ij}^* \delta e_{ij}^* + s_{ij}^* \delta \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} + \\ + \bar{\sigma} \beta_{ij} \delta e_{ij}^* + \bar{\sigma} \beta_{ij} \delta \bar{\varepsilon} \alpha_{ij}, \end{aligned} \quad (10)$$

рассматривая каждое из его слагаемых отдельно и используя соотношения (1)–(3). Произведение  $s_{ij}^* \delta e_{ij}^*$  принимает вид

$$s_{ij}^* \delta e_{ij}^* = \frac{\bar{\sigma}_n C_{ijkl} e_{kl}^*}{3K^* \bar{\varepsilon}_n} \delta e_{ij}^* = \frac{\bar{\sigma}_n C_{ijkl} e_{kl}^*}{\sqrt{3K^* C_{ijkl} e_{ij}^* e_{kl}^*}} \delta e_{ij}^*.$$

По определению величины  $\bar{\varepsilon}_n$  ее вариация имеет вид

$$\delta \bar{\varepsilon}_n = \frac{1}{\sqrt{3K^*}} \frac{C_{ijkl} e_{kl}^* \delta e_{ij}^*}{\sqrt{C_{ijkl} e_{ij}^* e_{kl}^*}}.$$

Следовательно,

$$s_{ij}^* \delta e_{ij}^* = \bar{\sigma}_n \delta \bar{\varepsilon}_n = \delta \left( \int_0^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau \right).$$

Второе слагаемое в правой части выражения (10) принимает вид

$$\begin{aligned} s_{ij}^* \delta \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} = (\sigma_{ij} - \bar{\sigma} \beta_{ij}) \delta \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} = \\ = \delta \bar{\varepsilon} (\sigma_{ij} \alpha_{ij} - \bar{\sigma} \beta_{ij} \alpha_{ij}) = \delta \bar{\varepsilon} \left( \bar{\sigma} - \bar{\sigma} \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Третье слагаемое в правой части выражения (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} \beta_{ij} \delta e_{ij}^* = \bar{\sigma} \beta_{ij} \delta (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon} \alpha_{ij}) = \\ = \bar{\sigma} \left( \beta_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \delta \bar{\varepsilon} \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} \right) = \bar{\sigma} (\delta \bar{\varepsilon} - \delta \bar{\varepsilon}) = 0. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в выражении (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} \delta \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} &= 3K^* (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T) \delta \bar{\varepsilon} \beta_{ij} \alpha_{ij} = \\ &= 3K^* (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T) \delta (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T) \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} = \frac{3}{2} K^* \delta \left( (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)^2 \right). \end{aligned}$$

В результате, функция  $\Pi$  принимает следующий вид:

$$\Pi = \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) \beta_{ij} \right)^2 + \int_0^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau \Big) dV.$$

Построим такую величину  $E$ , что

$$\delta E = \delta \Pi - \delta \left( \int_{\Omega} b_i u_i dV + \int_{S_1} w_i u_i dS \right) = 0.$$

Она имеет вид

$$\begin{aligned} E(u_i) &= \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)^2 + \int_0^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau \right) dV - \\ &\quad - \int_{\Omega} b_i u_i dV - \int_{S_1} w_i u_i dS. \quad (11) \end{aligned}$$

Первый член в подынтегральном выражении объемного интеграла в формуле (11) соответствует работе деформации при изменении объема элементарного прямоугольного параллелепипеда, а второй — изменению его формы. По своему виду функционал (11) совпадает с соответствующим функционалом для краевой задачи деформационной теории термопластичности изотропных тел, полученным в работе [11].

Функционал (11) может рассматриваться только на непрерывных полях перемещений, удовлетворяющих граничным условиям, налагаемым на перемещения на участках  $S_2$ .

Легко доказать, что если поле напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям, налагаемым на напряжения, то равенство (9) справедливо. Верно и обратное: из равенства (9) следуют уравнения равновесия (5) и граничные условия (7). Следовательно, в стационарной точке функционала (11) выполняются уравнения равновесия и граничные условия, налагаемые на напряжения.

Выясним характер стационарной точки функционала (11). Для этого найдем разность его значений, соответствующих допустимым

$u_i(M) = u_i^r(M) + \delta u_i(M)$  и действительным  $u_i^r(M)$  перемещениям. С учетом равенства (9) получим

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(u_i) - E(u_i^r) = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* \left( (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)^2 - (\bar{\varepsilon}^r - \bar{\varepsilon}^T)^2 \right) + \int_{\bar{\varepsilon}_n^r}^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau \right) dV - \int_{\Omega} b_i \delta u_i dV - \\ &- \int_{S_1} w_i \delta u_i dS = \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* ((\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^r) \delta \bar{\varepsilon} - 2 \bar{\varepsilon}^T \delta \bar{\varepsilon}) + \int_{\bar{\varepsilon}_n^r}^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau - \sigma_{ij}^r \delta \varepsilon_{ij} \right) dV. \end{aligned}$$

При малом отличии  $\bar{\varepsilon}_n$  от  $\bar{\varepsilon}_n^r$  приближенно имеем

$$\bar{\sigma}_n(\bar{\varepsilon}_n) = \bar{\sigma}_n^r + \frac{\partial \bar{\sigma}_n^r}{\partial \bar{\varepsilon}_n^r} \delta \bar{\varepsilon}_n.$$

Поскольку согласно соотношениям (1)–(3) компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{ij}^r = 3K^* (\bar{\varepsilon}^r - \bar{\varepsilon}^T) \beta_{ij} + \frac{\bar{\sigma}_n^r}{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r} C_{ijkl} e_{kl}^{*r},$$

то получим

$$\sigma_{ij}^r \delta \varepsilon_{ij} = 3K^* (\bar{\varepsilon}^r - \bar{\varepsilon}^T) \delta \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\sigma}_n^r}{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r} C_{ijkl} e_{kl}^{*r} \delta e_{ij}^*.$$

Следовательно, величина  $\Delta E$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^r) \delta \bar{\varepsilon} - 3K^* \bar{\varepsilon}^T \delta \bar{\varepsilon} + \int_{\bar{\varepsilon}_n^r}^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau \right) dV - \\ &- \int_{\Omega} \left( 3K^* \bar{\varepsilon}^r \delta \bar{\varepsilon} - 3K^* \bar{\varepsilon}^T \delta \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\sigma}_n^r}{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r} C_{ijkl} e_{kl}^* \delta e_{ij}^* \right) dV = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\delta \bar{\varepsilon})^2 + \frac{\partial \bar{\sigma}_n^r}{\partial \bar{\varepsilon}_n^r} (\delta \bar{\varepsilon}_n)^2 + \bar{\sigma}_n^r \left( \delta \bar{\varepsilon}_n - \frac{C_{ijkl} e_{kl}^{*r} \delta e_{ij}^*}{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r} \right) \right) dV. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\delta \bar{\varepsilon}_n = \delta \bar{\varepsilon}_n \frac{\bar{\varepsilon}_n^r}{\bar{\varepsilon}_n^r} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_n^r \sqrt{3K^*}} \frac{C_{ijkl} e_{kl}^{*r} \delta e_{ij}^*}{\sqrt{C_{ijkl} e_{ij}^{*r} e_{kl}^{*r}}} \frac{\sqrt{C_{ijkl} e_{ij}^{*r} e_{kl}^{*r}}}{\sqrt{3K^*}} = \frac{C_{ijkl} e_{kl}^{*r} \delta e_{ij}^*}{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r},$$



то окончательно имеем

$$\Delta E = \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\delta \bar{\varepsilon}_n)^2 + \frac{\partial \bar{\sigma}_n^r}{\partial \bar{\varepsilon}_n^r} (\delta \bar{\varepsilon}_n)^2 \right) dV. \quad (12)$$

Для устойчиво деформируемых материалов при монотонной зависимости  $\bar{\sigma}_n$  от  $\bar{\varepsilon}_n$  справедливо неравенство  $\partial \bar{\sigma}_n^r / \partial \bar{\varepsilon}_n^r > 0$ , поэтому согласно равенству (12) имеем  $\Delta E \geq 0$ . Следовательно, функционал (11) на действительном распределении перемещений достигает минимума.

**Принцип минимума дополнительной работы.** Получим принцип минимума дополнительной работы для задачи (1)–(8). Рассмотрим статически возможные изменения  $\delta \sigma_{ij}$  компонент тензора напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия  $\partial \delta \sigma_{ij} / \partial x_j = 0$  и граничным условиям  $\delta \sigma_{ij} n_j = 0$ , налагаемым на напряжения на участке  $S_1 \subset S$ . Тогда  $\delta w_i|_{S_1} = \delta b_i \equiv 0$ , и принцип дополнительной виртуальной работы имеет вид [14]

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{S_2} \delta \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS. \quad (13)$$

Найдем такую функцию  $R$ , что

$$\delta R = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV.$$

Для этого преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} &= (\delta s_{ij}^* + \delta \bar{\sigma} \beta_{ij}) (e_{ij}^* + \bar{\varepsilon} \alpha_{ij}) = \\ &= \delta s_{ij}^* e_{ij}^* + \delta s_{ij}^* \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} + \delta \bar{\sigma} \beta_{ij} e_{ij}^* + \delta \bar{\sigma} \beta_{ij} \bar{\varepsilon} \alpha_{ij}, \end{aligned} \quad (14)$$

рассматривая каждое из его слагаемых отдельно и учитывая соотношения (1)–(3). По определению величины  $\bar{\sigma}_n$  ее вариация имеет вид

$$\delta \bar{\sigma}_n = \sqrt{3K^*} \frac{B_{ijkl} s_{kl}^* \delta s_{ij}^*}{\sqrt{B_{ijkl} s_{ij}^* s_{kl}^*}}.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \delta s_{ij}^* e_{ij}^* &= \delta s_{ij}^* s_{kl}^* \frac{3K^* \bar{\varepsilon}_n}{\bar{\sigma}_n} B_{ijkl} = \\ &= \sqrt{3K^*} B_{ijkl} s_{kl}^* \delta s_{ij}^* \frac{\bar{\varepsilon}_n}{\sqrt{B_{ijkl} s_{ij}^* s_{kl}^*}} = \bar{\varepsilon}_n \delta \bar{\sigma}_n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta s_{ij}^* e_{ij}^* = \bar{\varepsilon}_n \delta \bar{\sigma}_n = \delta \left( \int_0^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right).$$

Второе слагаемое в правой части выражения (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta s_{ij}^* \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} &= \delta(\sigma_{ij} - \bar{\sigma} \beta_{ij}) \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} = \\ &= \bar{\varepsilon} \delta(\sigma_{ij} \alpha_{ij} - \bar{\sigma} \beta_{ij} \alpha_{ij}) = \bar{\varepsilon} \delta \left( \bar{\sigma} - \bar{\sigma} \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Третье слагаемое в правой части выражения (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \bar{\sigma} \beta_{ij} e_{ij}^* &= \delta \bar{\sigma} \beta_{ij} (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon} \alpha_{ij}) = \\ &= \delta \bar{\sigma} \left( \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon} \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} \right) = \delta \bar{\sigma} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}) = 0. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части выражения (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \bar{\sigma} \beta_{ij} \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} &= \delta \bar{\sigma} \left( \frac{\bar{\sigma}}{3K^*} + \bar{\varepsilon}^T \right) \beta_{ij} \alpha_{ij} = \\ &= \left( \frac{\bar{\sigma} \delta \bar{\sigma}}{3K^*} + \bar{\varepsilon}^T \delta \bar{\sigma} \right) \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} = \delta \left( \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\delta R = \delta \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} + \int_0^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV.$$

Введем величину  $O$  такую, что

$$\delta O = \delta R - \delta \int_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS = 0.$$

Величина  $O$  имеет вид

$$O(\sigma_{ij}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} + \int_0^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV - \int_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS. \quad (15)$$

Функционал (15) может рассматриваться только на полях напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям, налагаемым на напряжения на участках  $S_1$ .

Легко доказать, что при указанных ограничениях для поля возможных изменений величины  $\delta\sigma_{ij}$  уравнение (13) заменяет соотношения Сен-Венана совместности деформаций (последние выполняются, если справедливы соотношения (6) для деформаций и перемещений) и граничные условия, налагаемые на перемещения на участках границы  $S_2$ , которые, тем самым, становятся естественными. Следовательно, в стационарной точке полученного функционала (15) также выполняются соотношения Сен-Венана совместности деформаций и граничные условия, налагаемые на перемещения.

Выясним характер стационарной точки функционала (15). Для этого найдем разность значений функционала (15), соответствующих статически возможным  $\sigma_{ij}(M) = \sigma_{ij}^r(M) + \delta\sigma_{ij}(M)$  и действительным  $\sigma_{ij}^r(M)$  напряжениям. С учетом уравнения (13) имеем

$$\begin{aligned} \Delta O &= O(\sigma_{ij}) - O(\sigma_{ij}^r) = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} - \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{6K^*} - \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma}^r + \int_{\bar{\sigma}_n^r}^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV - \int_{S_2} \delta\sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r)(\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^r)}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r) - \varepsilon_{ij}^r \delta\sigma_{ij} + \int_{\bar{\sigma}_n^r}^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV. \end{aligned}$$

При малом отличии  $\bar{\sigma}_n$  от  $\bar{\sigma}_n^r$  приближенно получим

$$\bar{\varepsilon}_n(\bar{\sigma}_n) = \bar{\varepsilon}_n^r + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_n^r}{\partial \bar{\sigma}_n^r} \delta \bar{\sigma}_n.$$

Кроме того, согласно соотношениям (1)–(3), компоненты тензора деформации имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^r = \bar{\varepsilon}^T \alpha_{ij} + e_{ij}^{*r} = \left( \frac{\bar{\sigma}^r}{3K^*} + \bar{\varepsilon}^T \right) \alpha_{ij} + s_{kl}^{*r} \frac{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r}{\bar{\sigma}_n^r} B_{ijkl}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^r \delta\sigma_{ij} &= \left( \frac{\bar{\sigma}^r}{3K^*} + \bar{\varepsilon}^T \right) \alpha_{ij} \delta\sigma_{ij} + s_{kl}^{*r} \frac{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r}{\bar{\sigma}_n^r} B_{ijkl} \delta\sigma_{ij} = \\ &= \left( \frac{\bar{\sigma}^r}{3K^*} + \bar{\varepsilon}^T \right) \delta\bar{\sigma} + s_{kl}^{*r} \frac{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r}{\bar{\sigma}_n^r} B_{ijkl} \delta s_{kl}^*. \end{aligned}$$

Также учтем, что

$$\delta\bar{\sigma}_n = \delta\bar{\sigma}_n \frac{\bar{\sigma}_n^r}{\bar{\sigma}_n^r} = \sqrt{3K^*} \frac{B_{ijkl} s_{kl}^{*r} \delta s_{ij}^*}{\sqrt{B_{ijkl} s_{ij}^{*r} s_{kl}^{*r}}} \times \\ \times \frac{\sqrt{3K^* B_{ijkl} s_{ij}^{*r} s_{kl}^{*r}}}{\bar{\sigma}_n^r} = 3K^* \frac{B_{ijkl} s_{kl}^{*r} \delta s_{ij}^*}{\bar{\sigma}_n^r}.$$

Для величины  $\Delta O$  получим

$$\Delta O = \int_{\Omega} \left( \frac{(\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^r) \delta\bar{\sigma}}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \delta\bar{\sigma} - \left( \frac{\bar{\sigma}^r}{3K^*} + \bar{\varepsilon}^T \right) \delta\bar{\sigma} \right) dV + \\ + \int_{\Omega} \left( -s_{kl}^{*r} \frac{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r}{\bar{\sigma}_n^r} B_{ijkl} \delta s_{kl}^* + \int_{\bar{\sigma}_n^r}^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV = \\ = \int_{\Omega} \left( \frac{(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r) \delta\bar{\sigma}}{6K^*} - s_{kl}^{*r} \frac{3K^* \bar{\varepsilon}_n^r}{\bar{\sigma}_n^r} B_{ijkl} \delta s_{kl}^* + \int_{\bar{\sigma}_n^r}^{\bar{\sigma}_n} \left( \bar{\varepsilon}_n^r + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_n^r}{\partial \bar{\sigma}_n^r} \delta\bar{\sigma}_n \right) d\bar{\sigma} \right) dV = \\ = \int_{\Omega} \left( \frac{(\delta\bar{\sigma})^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}_n^r \left( \delta\bar{\sigma}_n - s_{kl}^{*r} \frac{3K^*}{\bar{\sigma}_n^r} B_{ijkl} \delta s_{kl}^* \right) + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_n^r}{\partial \bar{\sigma}_n^r} (\delta\bar{\sigma}_n)^2 \right) dV = \\ = \int_{\Omega} \left( \frac{(\delta\bar{\sigma})^2}{6K^*} + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_n^r}{\partial \bar{\sigma}_n^r} (\delta\bar{\sigma}_n)^2 \right) dV \geq 0.$$

Следовательно, функционал (15) на действительном распределении перемещений достигает минимума.

Поскольку функционал  $O(\sigma_{ij})$  на точном решении задачи достигает минимума, то функционал

$$Q(\sigma_{ij}) = -O(\sigma_{ij}) = \\ = - \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} + \int_0^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV + \int_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS \quad (16)$$

на том же решении достигает максимума.

По своему виду функционал (16) совпадает с полученным в работе [11] функционалом в напряжениях для краевой задачи деформационной теории термопластичности изотропных тел.

Покажем, что на точном решении задачи  $E = Q$ . Для доказательства воспользуемся равенством [11, 14]

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{\Omega} b_i u_i dV + \int_{S_1} w_i u_i dS + \int_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS,$$

которое получено в предположении, что перемещения удовлетворяют соотношению (8), а напряжения — соотношениям (5), (7).

Кроме того, воспользуемся равенством

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau + \int_0^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi = \bar{\sigma}_n \bar{\varepsilon}_n,$$

полученным на основании того, что определенный интеграл равен площади фигуры, находящейся под графиком функции. Из соотношений (1)–(3) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} &= \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} \alpha_{ij} \beta_{ij} + s_{ij}^* e_{ij}^* = \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} \frac{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}}{C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij}} + \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\varepsilon}_n} \frac{C_{ijkl} e_{kl}^* e_{ij}^*}{3K^*} = \\ &= \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\varepsilon}_n^2 = \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} + \bar{\sigma}_n \bar{\varepsilon}_n. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} E(u_i) + O(\sigma_{ij}) &= \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)^2 + \int_0^{\bar{\varepsilon}_n} \bar{\sigma}_n(\tau) d\tau + \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} + \int_0^{\bar{\sigma}_n} \bar{\varepsilon}_n(\xi) d\xi \right) dV - \\ &\quad - \left( \int_{\Omega} b_i u_i dV + \int_{S_1} w_i u_i dS + \int_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS \right) = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{3}{2} K^* (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)^2 + \frac{\bar{\sigma}^2}{6K^*} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} + \bar{\sigma}_n \bar{\varepsilon}_n - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{\sigma} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)}{2} + \frac{\bar{\sigma} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T)}{2} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} + \bar{\sigma}_n \bar{\varepsilon}_n - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV = \\ &= \int_{\Omega} (\bar{\varepsilon} \bar{\sigma} + \bar{\sigma}_n \bar{\varepsilon}_n - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV = 0. \end{aligned}$$

Поскольку доказано, что

$$E(u_i) \geq E(u_i^r) = Q(\sigma_{ij}^r) \geq Q(\sigma_{ij}),$$

то таким образом показано, что полученные функционалы (11) и (16) образуют двойственную вариационную постановку задачи (1)–(8) деформационной теории термопластичности анизотропного тела.

**Выводы.** В работе получена двойственная вариационная постановка задачи деформационной теории термопластичности анизотропного тела. Построены функционалы в перемещениях и напряжениях, обладающие экстремальными свойствами. Обобщена двойственная вариационная постановка задачи деформационной теории термопластичности для изотропных сред, полученная в работе [11].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dvorak G. J., Bahei-El-Din Y. A., Macheret Y., Liu C. H. An experimental study of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminum composite // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1988. – V. 36. – № 6. – P. 655–687.
2. Цветков С. В., Зиновьев П. А., Еремичев А. Н. и др. Деформирование и разрушение бороалюминия при сложном напряженном состоянии // *Проблемы прочности*. – 1991. – № 12. – С. 29–35.
3. Кондаков С. Ф., Милейко С. Т. Композит металл — металлическое волокно при сложном напряженном состоянии // *Машиноведение*. – 1974. – № 3. – С. 73–77.
4. Ковальчук Б. И., Косарчук В. В., Лебедев А. А. Исследование скалярных и векторных свойств анизотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния. Сообщение 2. Пластические деформации анизотропных материалов при простом нагружении // *Проблемы прочности*. – 1982. – № 8. – С. 114–121.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М: ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
6. Кувыркин Г. Н., Темис Ю. М. Прикладные задачи термопластичности и термоползучести // *Машиностроение: Энциклопедия*. Т. 1–3. Кн. 1 / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение, 1994. – С. 226–227.
7. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
8. Геогджаев В. О. К вопросу о теории упругопластической деформации анизотропных материалов // *Изв. вузов. Сер. Машиностроение*. – 1956. – № 3–4. – С. 9–13.
9. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
10. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
11. Зарубин В. С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
12. Зарубин В. С., Селиванов В. В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 360 с.
13. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1967. – 420 с.
14. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

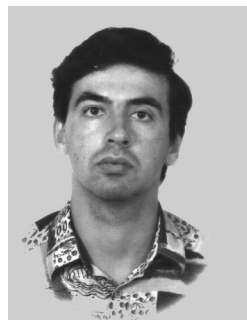
Статья поступила в редакцию 27.10.2004

Владимир Степанович Зарубин родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э.Баумана в 1957 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 130 научных работ в области термомеханики.



V.S. Zarubin (b. 1933) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. D. Sc (Eng) professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 130 publications in the field of thermal mechanics.

Евгений Ефимович Красновский родился в 1977 г., окончил в 2001 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных работ в области численных методов решения задач термомеханики.



Ye.Ye. Krasnovsky (b. 1977) graduated from the Bauman Moscow State Technical University. Post-graduate of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 10 publications in the field of numerical methods of thermal mechanics.

---

**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
в 2004 г. вышла в свет книга**

**Калугин В.Т.**

Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 648 с.: ил.

ISBN 5-7038-1968-7 (в пер.)

Изложены результаты исследований различных способов управления аэродинамическими характеристиками ракет, ракетных блоков и космических спускаемых аппаратов. Даны методы математического и физического моделирования процессов обтекания органов управления полетом. Систематизирован материал по аэродинамическим, струйным и газодинамическим органам управления, позволяющий создать расчетную базу для аэрогазодинамического проектирования управляющих и тормозных устройств летательных аппаратов.

Книга предназначена для студентов и аспирантов авиационных и ракетно-космических специальностей вузов и технических университетов. Может быть полезна инженерам и научным работникам, специализирующимся в области аэрогазодинамики и проектирования летательных аппаратов.

По вопросам приобретения обращаться по тел. 263-60-45;  
e-mail: [press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)