

УДК 536.24.015.23

Н. И. Сидняев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ОТЛИВКИ С ИСКЛЮЧЕНИЕМ ТРЕНИЯ*

Рассмотрен процесс формообразования отливки в кристаллизаторе с исключением трения. Предусмотрено принудительное оттеснение расплава от стенки вдуваемым газом в зоне формирования отливки. В области расплавленного металла формирующейся заготовки давление газа определено из условия равенства давлений в зазоре и граничащем с ним столбе жидкого металла. Для зоны кристаллизации отливки решена задача теплопроводности. На каждой итерации при решении уравнения методом конечных элементов по полученному распределению скоростей в зазоре находится распределение температуры в металле, положение поверхности фазового перехода, а также распределение температуры в зазоре и пористой стенке. Получены результаты, позволяющие обеспечить непрерывное литье на основе совместного учета факторов, определяющих формирование пристеночной газовой прослойки и теплопередачу.

Одним из перспективных новых направлений развития технологий непрерывного литья является формообразование отливки в кристаллизаторе с исключением трения. Значительный интерес представляет способ литья, предусматривающий принудительное оттеснение расплава от стенки вдуваемым газом в зоне формирования отливки (рис. 1). Сложность задачи требует ее поэтапного исследования. Цель настоящей работы — исследование условий, которые целесообразно обеспечить для непрерывного литья на основе совместного учета факторов, определяющих формирование пристеночной газовой прослойки и теплопередачу [1]. При этом исходим из того, что в общем случае при вдуве газа через пористую стенку формируются пристеночный газовый зазор у ее рабочей поверхности — между жидким расплавом и проникаемой стенкой [2–5].

Математическая модель затвердевания металла в жидкой фазе. Для построения математической модели исследуемого процесса введем цилиндрическую систему координат x, r, θ , ось x которой направ-

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00564).

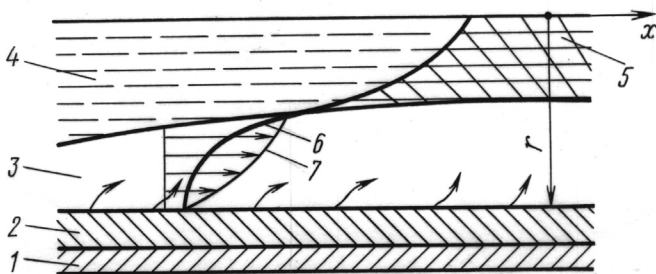


Рис. 1. Схема затвердевания слитка в кристаллизаторе при формировании отливки:

1 — силовая конструкция кристаллизатора; 2 — проницаемый элемент; 3 — газовый зазор; 4 — жидкий расплав; 5 — затвердевший слиток; 6 — профиль температуры с учетом ддува газа; 7 — профиль температуры без учета ддува газа

влена вверх вдоль оси симметрии слитка, а начало координат расположено в верхнем поперечном сечении пористого элемента [5–7]. С целью упрощения модели рассмотрим задачу в двумерной постановке относительно средних по углу θ значений искомых параметров. Заготовка предполагается круглая, диаметром 0,016 м, литье вертикальное. Предполагается также, что слиток в кристаллизаторе движется с постоянной скоростью u_m , а теплопередача в нем осуществляется только в радиальном направлении [8, 9].

Процесс затвердевания слитка описывается уравнением [5]

$$\rho_m u_m \frac{\partial I_m}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r}, \quad (1)$$

где

$$\rho_m = \rho_s = \rho_f, \quad I_m = (1 - \theta)I_s + \theta I_f, \quad \lambda_m = (1 - \theta)\lambda_s + \theta \lambda_f,$$

$$\theta(T) = \int_0^T \delta(\zeta - T_{\text{сол}}) d\zeta;$$

ρ — плотность металла; T — температура; $T_{\text{сол}} = 885^\circ\text{C}$ — температура солидуса; λ — коэффициент теплопроводности; I — удельная энтальпия; $\delta(\zeta)$ — дельта-функция; индексы f и s относятся к жидкой и твердой фазам соответственно.

Плотность металла в жидкой и твердой фазах будем считать постоянной. Полагаем, что на входе в зону охлаждения температура жидкого металла равна температуре литья [8, 10]. Для учета скрытой теплоты кристаллизации используем метод избыточных температур [1, 5, 7]. Параметры течения газа в щелевом зазоре определяются из решения

уравнений Навье–Стокса в приближении “узкого канала” [5, 6]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho ur) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho vr) = 0, \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{dp_g}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial r} = u \frac{dp_g}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}; \quad (4)$$

здесь c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; μ и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности газа; u и v — компоненты вектора скорости в продольном и радиальном направлениях; $p_g(x)$ — давление газа в зазоре.

Предполагается, что в пористой стенке газ движется в радиальном направлении со среднемассовой скоростью, определяемой законом Дарси [8, 10]

$$v = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial p_w}{\partial r},$$

где γ — проницаемость среды, $p_w(x, r)$ — давление газа в пористой среде. Для описания процесса переноса теплоты в пористой стенке используется одномерная модель в предположении, что температуры газа и пористого каркаса равны между собой [2, 3, 8]:

$$\rho v c_p \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda_w \frac{\partial T}{\partial r}; \quad (5)$$

здесь λ_w — коэффициент теплопроводности пористого каркаса.

Для замыкания задачи используется условие прилипания на границах щелевого зазора ($u = 0$), а также условия непрерывности температуры, давления, потоков массы и теплоты. В балансе тепловых потоков на границе зазора, наряду с теплопроводностью и конвекцией, учитывается перенос теплоты излучением. Тепловой поток q на границе металл–газ определяется по закону Ньютона:

$$q = \alpha(T_f - T_w),$$

где α — коэффициент теплоотдачи; T_f , T_w — температуры соответственно жидкой фазы и проницаемой стенки.

В области расплавленного металла формирующейся заготовки давление газа определяется из условия равенства давлений в зазоре и граничащем с ним столбе жидкого металла [3–5]. После образования корки давление в зазоре возрастает в направлении к низу кристаллизатора до некоторого максимального значения p_g^* , а затем быстро уменьшается

до атмосферного давления на выходе из зазора. Величина p_g^* зависит в основном от давления в жидком металле на границе твердой и жидкой фаз [2].

Численное интегрирование уравнений (1)–(5) проводится методом конечных элементов [11]. Для зоны отливки решается нестационарная задача теплопроводности. На каждой итерации по полученному распределению скоростей в зазоре находится распределение температуры в металле, положение поверхности фазового перехода, а также распределение температуры в зазоре и пористой стенке [8, 10].

Метод конечных элементов (КЭ) основан на аппроксимации непрерывной функции (в данном случае — температуры и компонент скорости газа) дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, называемых элементами. В качестве функции элемента чаще всего применяют полином. Порядок полинома зависит от используемых в каждом узле элемента данных о непрерывной функции.

Предположим, что сетка КЭ состоит из E лагранжевых конечных элементов, каждый из которых имеет N_e узлов и занимает область $V_e \subset V$, $e = \overline{1, E}$. Необходимо установить взаимно однозначное соответствие между номерами $N = \overline{1, N_\Sigma}$ узлов сетки и номерами $n = \overline{1, N_e}$ узлов каждого отдельного конечного элемента, имеющего номер $e = \overline{1, E}$. Итогом установления указанного соответствия между глобальной нумерацией узлов сетки и локальной нумерацией узлов конечного элемента является построение для каждого элемента с номером e матрицы Ω^e размера $N_e \times N_\Sigma$, элементы которой имеют вид $\Omega_{nN}^e = 1$, если узел N сетки совпадает с узлом n конечного элемента, и $\Omega_{nN}^e = 0$ — в противном случае.

Теперь рассмотрим задачу о затвердевании слитка

$$\rho_m u_m c_p \frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \quad (6)$$

с граничными условиями III рода, задающими интенсивность теплоотдачи на поверхности слитка в соответствии с законом Ньютона:

$$\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial n} \Big|_{\Pi} + \alpha (T_m \Big|_{\Pi} - T_r) = 0, \quad (7)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности Π слитка, T_r — температура газа.

В случае осесимметричного температурного поля в краевые условия входит условие симметрии, означающее равенство нулю градиен-

тов температуры на оси слитка:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (8)$$

здесь x — координатная ось, являющаяся осью геометрической симметрии слитка и совпадающая с осью вытягивания. Начальным условием является условие $T_m(0, r) = T_n$, где T_n — температура литья при входе в кристаллизатор.

Для интегральной формулировки этой задачи используем следующие условия:

$$\int_V \left(c_p \rho u_m \frac{\partial T_m}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \right) v_L d\xi + \\ + \int_{S_1} \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial n} + \alpha (T_m \Big|_{\Pi} - T_r) \right) v_L ds + \int_{S_2} \frac{\partial T_m}{\partial r} v_L ds = 0 \quad (9)$$

— условия ортогональности проекции невязки, возникающей при подстановке в уравнение (1) искомого приближенного решения, на элементы v_L , $L = \overline{1, N_\Sigma}$, базиса N_Σ -мерного подпространства \mathbf{H}_{N_Σ} гильбертова пространства \mathbf{H} непрерывных в \bar{V} функций, имеющих в V кусочно непрерывные производные [11]. Здесь S_1 и S_2 — проекции области интегрирования V на соответствующую координатную плоскость.

Преобразовывая последнее равенство при помощи первой формулы Грина, получаем

$$\int_V \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \frac{\partial v_L}{\partial r} + c_p \rho u_m \frac{\partial T_m}{\partial x} v_L \right) d\xi + \\ + \int_{S_1} \alpha \left(T_m \Big|_{\Pi} - T_r \right) v_L ds = 0, \quad L = \overline{1, N_\Sigma}. \quad (10)$$

Приближенное решение рассматриваемой задачи найдем в виде

$$\tilde{T}_{N_\Sigma}(x, r) = \sum_{N=1}^{N_\Sigma} T_N(x) \varphi_N(r) = \varphi(r) \{T(x)\}, \quad (11)$$

где $T_N(x)$ — значения температуры в узлах сетки КЭ. В качестве базиса подпространства \mathbf{H}_{N_Σ} примем систему $\{\varphi_N(r)\}_{N_\Sigma}$, т.е. базисные и проекционные функции возьмем одинаковые, что характерно для процедуры метода Бубнова–Галеркина [11]. Подставляя выражение (11) в равенство (10) вместо T_m , приходим к системе уравнений

$$\sum_{N=1}^{N_{\Sigma}} \frac{dT_N}{dx} \rho_m u_m \int_V c_p \varphi_L \varphi_N d\xi + \sum_{N=1}^{N_{\Sigma}} T_N \left(\int_V \lambda_m \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_{S_1} \alpha \varphi_L \varphi_N ds \right) = \int_{S_1} \alpha T_r \varphi_L ds, \quad L = \overline{1, N_{\Sigma}}, \quad (12)$$

либо, в матричном виде,

$$C \frac{d\{T\}}{dx} + K\{T\} = \{F\}. \quad (13)$$

Элементами матрицы C являются

$$c_{LN} = \rho_m u_m \int_V c_p \varphi_L \varphi_N d\xi, \quad L, N = \overline{1, N_{\Sigma}},$$

элементами матрицы K —

$$k_{LN} = \int_V \lambda_m \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_{S_1} \alpha \varphi_L \varphi_N ds, \quad L, N = \overline{1, N_{\Sigma}}, \quad (14)$$

элементами вектора $\{F\}$ —

$$f_L = \int_{S_1} \alpha T_r \varphi_L ds, \quad L = \overline{1, N_{\Sigma}}.$$

Эти матрицы формируем из отдельных КЭ:

$$C = \sum_{e=1}^E \Omega^{e^x} [c^e] \Omega^e, \quad K = \sum_{e=1}^E \Omega^{e^x} [k^e] \Omega^e, \quad \{F\} = \sum_{e=1}^E \Omega^{e^x} \{f^e\}. \quad (15)$$

В пределах каждого КЭ искомое распределение температуры аппроксимируем выражением вида

$$T^e(x) = \sum_{n=1}^{N_e} \varphi_n T_n, \quad e = \overline{1, E}, \quad (16)$$

где $\varphi_n, n = \overline{1, N_e}$, — функции формы КЭ, а T_n — узловые значения температуры элемента. Вектор $\{T\}$ узловых значений температуры сетки и вектор $\{T^e\}$ узловых значений температуры элемента связаны друг с другом следующим образом: $\{T^e\} = \Omega^e \{T\}$.

Пусть B^e — матрица-строка размера $1 \times N_e$ с элементами $\partial N_{ei}/\partial r$, $i = \overline{1, N_e}$. Для отдельного КЭ получим

$$\rho_m u_m \int_{V_e} c_p N^{e^T} N^e d\xi \frac{d\{T^e\}}{dx} + \int_{V_e} \lambda_m B^{e^T} B^e d\xi \{T^e\} + \int_{S_{1e}} \alpha N^{e^T} N^e ds \{T^e\} = \int_{S_{1e}} \alpha T_r N^{e^T} ds. \quad (17)$$

Следует отметить, что слагаемые, содержащие поверхностные интегралы, будут иметь ненулевые значения только для тех элементов, стороны которых будут принадлежать соответствующей поверхности.

В матричной форме получим

$$[c^e] \frac{d\{T\}}{dx} + [k^e] \{T\} = \{f^e\}, \quad (18)$$

где

$$c_{ln}^e = c_p \rho u_m \int_{V_e} \varphi_l \varphi_n d\xi, \\ k_{ln}^e = \lambda_m \int_{V_e} \frac{d\varphi_l}{dr} \frac{d\varphi_n}{dr} d\xi + \alpha \int_{S_{1e}} \varphi_l \varphi_n ds, \quad f_l^e = \alpha T_r \int_{S_{1e}} \varphi_l ds.$$

Поскольку рассматриваемая задача решается в цилиндрической системе координат, при интегрировании необходимо использовать якобиан преобразования координат, в данном случае равный r . Эту функцию также можно аппроксимировать в пределах КЭ выражением вида

$$r \approx \sum_{m=1}^{N_e} r_m^e \varphi_m^e. \quad (19)$$

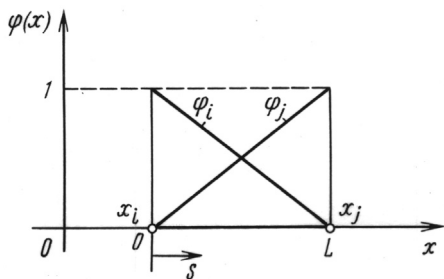


Рис. 2. Одномерный симплексный конечный элемент

В качестве элемента разбиения подбирается одномерный симплексный КЭ (рис. 2).

Функции формы для КЭ имеют вид

$$N_1^e = 1 - \frac{s_e}{L_e}, \quad N_2^e = \frac{s_e}{L_e}, \quad (20)$$

где L_e — длина КЭ; s_e — локальная координата, $0 \leq s_e \leq 1$ в пределах КЭ.

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений представим в матричном виде:

$$C \frac{d\{T\}}{dx} + K\{T\} = \{F\}. \quad (21)$$

Используем конечно-разностную аппроксимацию производной в системе (21) в пределах интервала $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, приняв

$$\frac{d\{T\}}{dx} \approx \frac{\{T\}_k - \{T\}_{k-1}}{\Delta x_k},$$

где индексы $k-1$ и k , $k \in \mathbf{N}$, соответствуют начальной и конечной точкам k -го интервала. Применим двухслойную разностную схему “с весами” и из системы (21) получим

$$\begin{aligned} & ((1 - \eta)C_{k-1} + \eta C_k) \frac{\{T\}_k - \{T\}_{k-1}}{\Delta x_k} = \\ & = (1 - \eta) (\{F\}_{k-1} - K_{k-1}\{T\}_{k-1}) + \eta (\{F\}_k - K_k\{T\}_k), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\eta \in [0, 1]$, $k \in \mathbf{N}$. В предельных случаях $\eta = 0$ и $\eta = 1$ система (22) соответствует схемам аппроксимации в явной и неявной формах. Чтобы избежать наложения ограничений на выбор Δx_k , из условия устойчивости схемы в явной форме выбирается разностная схема в неявной форме [11]:

$$\{T\}_k = \left(\frac{C_k}{\Delta x_k} + K_k \right)^{-1} \left(C_{k-1} \frac{\{T\}_{k-1}}{\Delta x_k} + \{F\}_k \right). \quad (23)$$

Выбирая интервал Δx_k , можно руководствоваться лишь соображениями точности расчета, поскольку неявная схема устойчива при любых значениях Δx_k . В случае существенной зависимости коэффициентов от температуры вычисления по формуле (23) на каждом шаге по x необходимо проводить несколько раз, последовательно уточняя значения элементов матриц. При слабой зависимости этих элементов от температуры обычно достаточно ограничиться лишь первым приближением [11], приняв

$$\{T\}_k = \left(\frac{C_{k-1}}{\Delta x_k} + K_{k-1} \right)^{-1} \left(C_{k-1} \frac{\{T\}_{k-1}}{\Delta x_k} + \{F\}_{k-1} \right). \quad (24)$$

Отметим, что с использованием предложенного метода решения задачи о затвердевании слитка возможен учет теплоты кристаллизации методом избыточных температур.

Решение задачи теплопроводности для пористой стенки. Процесс переноса теплоты в пористой стенке описывается одномерной моделью в предположении, что температуры газа и пористого каркаса равны между собой [3, 6, 8]:

$$\rho v c_p \frac{\partial T_m}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda_w \frac{\partial T_m}{\partial r}; \quad (25)$$

здесь λ_w — коэффициент теплопроводности пористого каркаса. На внешней поверхности пористой стенки температуру полагаем равной температуре вдуваемого газа, а на внутренней поверхности — температуре газа в зазоре. Для интегральной формулировки этой задачи также используем условия ортогональности проекции невязки [11]:

$$\int_V \left(c_p \rho v \frac{\partial T_m}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda_w \frac{\partial T_m}{\partial r} \right) v_L d\xi = 0, \quad L = \overline{1, N_\Sigma}. \quad (26)$$

Преобразовывая последнее равенство в соответствии с первой формулой Грина и учитывая, что на внешней и внутренней поверхностях пористой стенки имеем $v_L = 0$, получаем

$$\int_V \left(\lambda_w \frac{\partial T_m}{\partial r} \frac{\partial v_L}{\partial r} + c_p \rho v \frac{\partial T_m}{\partial r} v_L \right) d\xi = 0, \quad L = \overline{1, N_\Sigma}. \quad (27)$$

Приближенное решение рассматриваемой задачи найдем в виде (11). В узлах сетки, принадлежащих поверхности стенки, можно положить $T_N = T_{II}$. Это позволяет из числа базисных функций исключить те функции φ_N , которые соответствуют указанным узлам, но сохранить их в представлении (11) приближенного решения. Номера N оставшихся базисных функций φ_N упорядочим так, что $N = \overline{1, N^*}$, где $N^* = N_\Sigma - N_1$ (N_1 — число узлов, принадлежащих поверхности стенки). Подставляя решение (11) в равенство (27) вместо T_m , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{N^*} T_N \left(\int_V \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \lambda_w \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi \right) = \\ = - \sum_{N=N^*+1}^{N_\Sigma} T_N \Big|_{II} \left(\int_V \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \lambda_w \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi \right), \quad (28) \\ L = \overline{1, N^*}. \end{aligned}$$

Представим систему (28) в матричном виде:

$$K\{T\} = \{F\}; \quad (29)$$

здесь элементами матрицы K являются

$$k_{LN} = \int_V \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \lambda_w \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi, \quad L, N = \overline{1, N^*}, \quad (30)$$

элементами вектора $\{F\}$ —

$$f_L = - \sum_{N=N^*+1}^{N_\Sigma} T_N \Big|_{\Pi} \left(\int_V \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \lambda_w \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi \right), \quad (31)$$

$$L = \overline{1, N^*}.$$

Эти матрицы формируем из отдельных КЭ. Значения c_p , λ_w , ρ зависят от температуры. Полагая, что значения этих параметров в узлах сетки определяются узловыми значениями температуры, в пределах КЭ функции c_p , λ_w , ρ можно аппроксимировать следующими соотношениями:

$$c_p \approx \sum_{m=1}^{N_e} c_m^e \varphi_m^e, \quad \lambda_w \approx \sum_{m=1}^{N_e} \lambda_m^e \varphi_m^e, \quad \rho \approx \sum_{m=1}^{N_e} \rho_m^e \varphi_m^e. \quad (32)$$

Решение задачи теплопроводности для газового зазора. Для нахождения распределения температуры в газовом зазоре рассмотрим задачу (4) с граничными условиями

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi_m} + \alpha \left(T \Big|_{\Pi_m} - T_m \Big|_{\Pi_m} \right) = 0, \quad (33)$$

$$T \Big|_{\Pi_w} = T_w \Big|_{\Pi_w}, \quad (34)$$

где Π_m — поверхность контакта металла и газового зазора, Π_w — поверхность контакта пористой стенки и газового зазора. Аппроксимируем температуру зависимостью $\tilde{T}(M) \approx T_l \varphi_l(M) + T_m \varphi_m(M) + T_n \varphi_n(M)$. При вычислении интегралов от произведения натуральных степеней q, r, s функций формы используем формулы [11]

$$\int_F \varphi_l^q(M) \varphi_m^r(M) \varphi_n^s(M) df(M) = \frac{q!r!s!}{(q+r+s+2)!} 2F, \quad (35)$$

$$\int_{L_{ij}} \varphi_l^q(P) \varphi_m^r(P) \varphi_n^s(P) dl_{ij}(P) = \frac{q!r!s!}{(q+r+s+1)!} L_{ij}; \quad (36)$$

здесь F — площадь КЭ; L_{ij} — длина стороны КЭ между узлами i и j ; P — точка, принадлежащая границе КЭ. Как и в случае задачи теплопроводности в пористой стенке, применяем метод Бубнова–Галеркина и после всех преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{N^*} T_N \left(\int_F \rho c_p u \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} + \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df + \right. \\ \left. + \int_F \lambda \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df + \int_L \alpha \varphi_L \varphi_N dl \right) = - \int_F \frac{dp_g}{dx} \varphi_L df + \\ + \sum_{N=N^*+1}^{N_\Sigma} T_m \Big|_{\Pi} \int_L \alpha \varphi_L \varphi_N dl - \sum_{N=N^*+1}^{N_\Sigma} T_N \Big|_{\Pi_w} \left(\int_F \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df + \right. \\ \left. + \int_F \lambda \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df \right), \quad L = \overline{1, N^*}. \quad (37) \end{aligned}$$

Полученную систему уравнений представим в матричном виде: $K\{T\} = \{F\}$; здесь элементами матрицы K являются

$$\begin{aligned} k_{LN} = \int_F \rho c_p u \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} + \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df + \\ + \int_F \lambda \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df + \int_L \alpha \varphi_L \varphi_N dl, \quad L, N = \overline{1, N^*}, \quad (38) \end{aligned}$$

элементами вектора $\{F\}$ —

$$\begin{aligned} f_L = - \int_F \frac{dp_g}{dx} \varphi_L df + \sum_{N=N^*+1}^{N_\Sigma} T_m \Big|_{\Pi} \int_L \alpha \varphi_L \varphi_N dl - \\ - \sum_{N=N^*+1}^{N_\Sigma} T_N \Big|_{\Pi_w} \left(\int_F \rho c_p v \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df + \int_F \lambda \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} df \right), \quad L = \overline{1, N^*}. \quad (39) \end{aligned}$$

Задачу теплопроводности в зазоре решаем совместно с задачей теплопроводности в пористой стенке. При этом учитываются различия свойств среды в щелевом зазоре и в стенке [1, 5, 10].

Решение уравнений течения газа в зазоре. Эту задачу представим в виде

$$\frac{dp_g}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r) = 0, \quad (40)$$

где $u = u_m, v = 0$ на поверхности слитка; $u = 0, v = v_{вд}$ на поверхности проницаемой стенки ($v_{вд}$ — компонента скорости вдува по нормали к стенке).

Для интегральной формулировки этой задачи получим по методу Бубнова–Галеркина

$$\sum_{N=1}^{N^*} u_N \int_V \mu \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} d\xi = - \int_V \frac{dp_g}{dx} \varphi_L d\xi - \sum_{N=N^*+1}^{N^*+N_1} u_N \int_V \mu \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} d\xi, \quad L = \overline{1, N^*}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{N=1}^{N^*} u_N \left(\int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} d\xi + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi_L \varphi_N d\xi \right) + \\ & + \sum_{N=1}^{N^*} v_N \left(\int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \frac{\rho}{r} \varphi_L \varphi_N d\xi \right) = \\ & = - \sum_{N=N^*+1}^{N^*+N_1} u_m \left(\int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} d\xi + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi_L \varphi_N d\xi \right) - \\ & - \sum_{N=N^*+N_1+1}^{N^*+N_1+N_2} v_{вд} \left(\int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \frac{\rho}{r} \varphi_L \varphi_N d\xi \right), \quad L = \overline{1, N^*}. \quad (42) \end{aligned}$$

В матричном виде систему (42) можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} [K_{1u}] & [K_{1v}] \\ [K_{2u}] & [K_{2v}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}. \quad (43)$$

Элементами множеств матриц $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$ являются соответственно

$$f_{1L} = - \int_V \frac{dp_g}{dx} \varphi_L d\xi - \sum_{N=N^*+1}^{N^*+N_1} u_N \int_V \mu \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} d\xi, \quad L = \overline{1, N^*}, \quad (44)$$

$$f_{2L} = \sum_{N=N^*+1}^{N^*+N_1} u_m \left(\int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} d\xi + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi_L \varphi_N d\xi \right) -$$

$$- \sum_{N=N^*+N_1+1}^{N^*+N_1+N_2} v_{\text{вд}} \left(\int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \frac{\rho}{r} \varphi_L \varphi_N d\xi \right), \quad L = \overline{1, N^*}. \quad (45)$$

Элементами матриц $[K_{1u}]$, $[K_{1v}]$, $[K_{2u}]$ и $[K_{2v}]$ являются соответственно

$$k_{1u_{LN}} = \int_V \mu \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} \frac{\partial \varphi_L}{\partial r} d\xi, \quad L, N = \overline{1, N^*}, \quad (46)$$

$$k_{1v_{LN}} = 0, \quad L, N = \overline{1, N^*},$$

$$k_{2u_{LN}} = \int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} d\xi + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi_L \varphi_N d\xi, \quad L, N = \overline{1, N^*}, \quad (47)$$

$$k_{2v_{LN}} = \int_V \rho \varphi_L \frac{\partial \varphi_N}{\partial r} d\xi + \int_V \frac{\rho}{r} \varphi_L \varphi_N d\xi, \quad L, N = \overline{1, N^*}. \quad (48)$$

Расчеты газодинамических и тепловых процессов в кристаллизаторе выполнены при следующих значениях параметров: толщина пористой стенки — 0,005 м; материал слитка — латунь ЛС63-3; температура литья на входе в кристаллизатор — 1060 °С; высота столба жидкого металла в раздаточной емкости — 0,05...0,15 м; материал пористого элемента — спеченная пористая медь; скорость протягивания слитка — 0,005 м/с; проницаемость пористого элемента — $10^{-12} \dots 10^{-11} \text{ м}^2$; пористость проницаемой стенки — 0,5; рабочий газ — воздух; скорость газа на входе в канал — 0,15...60 м/с; давление газа на выходе из зазора — 10^5 Па ; температура внешней втулки — 27 °С; коэффициент теплоотдачи — $\alpha = 1,16 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

На первом этапе решения задаем ширину газового зазора и получаем оценку температуры на поверхности застывающего металла без учета движения газа в зазоре [2, 5, 10]. По полученным данным определяем, какое давление необходимо создать в зазоре для поддержания постоянной ширины зазора, а также находим плотность и вязкость газа. При этом полагаем, что вследствие малости толщины зазора температура, а следовательно, и физические характеристики газа по ширине зазора остаются постоянными [4]. Далее решаем задачу течения газа в зазоре и находим скорости течения газа в зазоре [3, 5, 9]. После этого рассчитываем температурное поле в металле, зазоре и пористой стенке. Результаты численных расчетов по распределению изотерм приведены на рис. 3. Показано распределение температурных полей по высоте (0,08 м) и по радиусу (0,008 м) кристаллизатора.

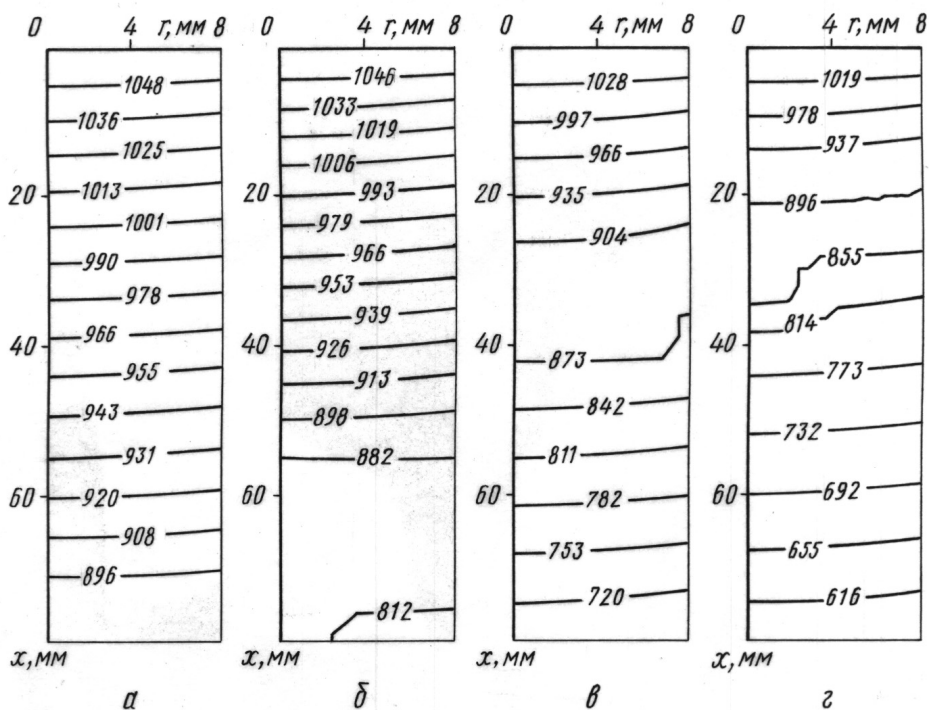


Рис. 3. Распределение температуры (в °С) по длине и радиусу слитка при различных расходах вдуваемого газа:

$\rho v = 3 \cdot 10^{-3}$ (а), $2,08 \cdot 10^{-3}$ (б), $1,06 \cdot 10^{-3}$ (в), $0,51 \cdot 10^{-3}$ (г) кг/с

Полученные численные результаты сопоставлялись частично с результатами работ [5, 10], где приведены экспериментальные данные, полученные автором. Удовлетворительное соответствие данных по совокупности параметров подтверждает допустимость сделанных в настоящей работе предположений и применимость разработанной численной модели.

Закключение. Проведены исследования формирующего воздействия газовых потоков на жидкую среду. Результаты этих исследований применимы при формировании и поддержании устойчивой формы расплава в процессе его течения с последующими фазовыми превращениями. Разработаны физическая и математическая модели течения расплава и предложен метод их анализа и численного расчета, в котором учтены физические свойства теплоносителя и газовой среды, изменение агрегатного состояния теплоносителя в процессе создания и поддержания устойчивой формы расплава.

Расходные характеристики газа улучшаются при уменьшении пористости пористого элемента и сравнительно слабо зависят от “зеркала” металла в раздаточной емкости. Отметим, что образование зазора

между отливкой и пористым элементом начинается при некоторой конечной критической величине расхода газа, определяемой конкретным набором значений параметров устройства. Величина расхода газа примерно пропорциональна проницаемости пористого элемента и сравнительно слабо зависит от “зеркала” жидкого металла в раздаточной емкости. С увеличением расхода газа ширина газового зазора растет по закону, близкому к линейному. При расходе газа менее допустимого в кристаллизаторе может реализоваться другая схема течения — металл соприкасается со стенкой кристаллизатора прежде, чем начинается его затвердевание. Образование газового зазора приводит к существенному уменьшению теплоотвода от отливки.

Следует отметить, что при малой величине газового зазора определяющим фактором в процессе охлаждения отливки является теплообмен между затвердевающим металлом и пористым элементом за счет теплопроводности газа в зазоре [2]. С возрастанием расхода газа начинает проявляться охлаждающее действие вдуваемого в зазор газа [8, 10]. При достаточно малой величине зазора в процессе теплоотвода преобладает перенос теплоты от металла к стенке кристаллизатора посредством теплопроводности газа [2, 5, 10]. При увеличении расхода газа режим теплопередачи с преобладающим влиянием конвекции устанавливается сначала вблизи входа и выхода из кристаллизатора, а затем во всем газовом зазоре.

Результаты расчетов должны послужить основой для разработки нового направления в области непрерывного литья слитков, предназначенных для производства круглого и плоского проката в цветной и черной металлургии, а также изделий машиностроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

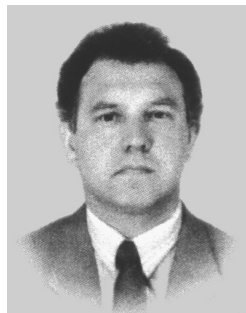
1. Кац А. М., Шадек Е. Г. Теплофизические основы непрерывного литья слитков металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1983. – 286 с.
2. Сидняев Н. И., Кац А. М. Бесконтактное формообразование отливки при непрерывном литье // Литейное производство. – 1998. – № 6. – С. 30–32.
3. Патент № 2048966, кл. В22 D11/04. Кристаллизатор для непрерывного литья металлов и сплавов / А.М. Кац, В.Ф. Захарченко, Н.И. Сидняев, Л.Н. Лысенко. – Заявл. 20.10.92, № 920011557/02. Оpubл. 27.11.95. Бюл. № 33.
4. Патент № 2080208, кл. В22 D11/04. Способ непрерывного литья заготовок в кристаллизаторе с пористым формообразующим элементом / А.М. Кац, В.Ф. Захарченко, Н.И. Сидняев, Л.Н. Лысенко. – Заявл. 17.09.93, № 93045041/02. Оpubл. 27.05.97. Бюл. № 15.
5. Chernyi G. G., Afonina N. E., Sidnyayev N. I., Gromov V. T., Kats A. M. et. al. Modelling the process of continuous casting in gas-dynamic solidification modul // J. of Advanced Materials. – 1995. – V. 2. – № 2. – P. 106–114.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. – М.: Мир, 1991. – 504 с.

7. Черный Г. Г., Левин В. А., Сидняев Н. И. и др. Гидрогазодинамика формообразования сплавов / Инженерно-физические проблемы новой техники: Тез. докл. Пятого Междунар. совещания-семинара. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – С. 324–325.
8. Сидняев Н. И. Исследование формообразования жидкометаллических сред в условиях поверхностного массообмена методами теории планирования эксперимента // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 2002. – № 5. – С. 11–20.
9. Черный Г. Г., Левин В. А., Сидняев Н. И. и др. Теплофизика процессов формообразования жидкометаллических сред / Теплофизические и теплотехнические проблемы перспективных технологий: Тез. докл. междунар. конф. “Передовые технологии XXI века” – М.: НИЦ “Инженер”, 1998. – С. 311–314.
10. Сидняев Н. И., Левин В. А., Афонина Н. Е., Кац А. М. Математическое моделирование интенсивности теплопередачи методами теории планирования эксперимента // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75. – № 2. – С. 132–138.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

Статья поступила в редакцию 12.04.2004

Николай Иванович Сидняев родился в 1955 г., окончил в 1981 г. МВТУ им. Н.Э.Баумана и в 1985 г. МГУ им. М.В.Ломоносова. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор около 100 научных работ в области прикладной математики и механики.

N.I. Sidnyaev (b. 1955) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1981 and Moscow State University n.a. M.V.Lomonosov in 1985. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 100 publications in the field of applied mathematics and mechanics.



**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
в 2004 г. вышла в свет книга**

Суржиков С.Т.

Тепловое излучение газов и плазмы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 544 с.: 120 ил. (Компьютерные модели физической механики).

Введены основные понятия теории переноса лучистой энергии в горячих газах и низкотемпературной плазме. Представлена формулировка феноменологических коэффициентов и функций теории переноса, а также их связь с квантовыми характеристиками. Приведены основные законы теории переноса теплового излучения. Сформулировано уравнение переноса и даны наиболее часто употребляемые его частные формы. Обсуждаются особенности применения моделей элементарных радиационных процессов к построению феноменологических моделей переноса излучения. Представлены методы интегрирования уравнения переноса излучения по частоте и по пространственным переменным.

Для научных сотрудников и инженеров в области теплообмена излучением, физической газовой динамики и физики низкотемпературной плазмы, а также для студентов и аспирантов физико-технических специальностей университетов.

По вопросам приобретения обращаться по тел. 433-82-98;
e-mail: surg@ipmnet.ru