

## ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

*Получены новые соотношения для коэффициентов отражения электромагнитной волны на границе раздела двух сред с положительным и отрицательным показателями преломления, применимые в определенном диапазоне частот для расчета амплитуды и интенсивности отраженного и преломленного электромагнитного излучения, если одна из сред обычный изотропный диэлектрик, а другая — фотонный кристалл. Предсказано аномальное возрастание пропускания фотонного кристалла при некоторых значениях частот электромагнитного излучения. Предложен новый тип селективных фильтров на основе фотонных кристаллов с отрицательным показателем преломления.*

**E-mail:** gorelik@sci.lebedev.ru; vova\_mipt@mail.ru

**Ключевые слова:** электромагнитные волны, отражение, преломление, показатель преломления, фотонный кристалл.

**Введение.** Формулы Френеля были впервые получены в 1821 г. Они определяют амплитуды и интенсивности преломленной и отраженной электромагнитных волн при прохождении через плоскую границу раздела двух сред и позволяют описать процессы отражения и прохождения электромагнитных волн на границе раздела двух (“правых”) сред, для которых показатели преломления положительны [1]. В настоящее время изучается новый тип оптических сред, называемых “левыми” средами. Для таких сред в определенном диапазоне частот показатель преломления становится отрицательным [2]. Примером “левых” сред могут служить метаматериалы [3], а также фотонные кристаллы [4]. Цель настоящей работы — получить формулы для расчета амплитуды и интенсивности волны, отраженной от поверхности фотонного кристалла, в том случае, когда одна среда является “правой”, т.е. характеризуется положительным показателем преломления, а другая может быть как “правой”, так и “левой”.

**Вывод обобщенных формул Френеля для коэффициентов отражения.** Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны из “правой” среды в “левую” (рис. 1). Запишем закон преломления Снеллиуса–Декарта

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае  $n_1 > 0$ ,  $n_2 < 0$ . Поскольку  $n_2 < 0$ , то в соответствии с (1) угол преломления  $\psi < 0$ . Для дальнейших вычислений удобно ввести положительный угол  $\alpha = -\psi$ . Тогда уравнение (1)

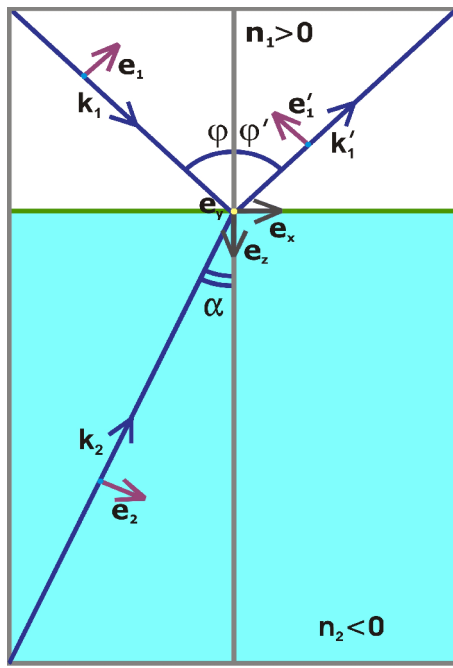


Рис. 1. Отражение и преломление волны на границе раздела сред с положительным и отрицательным показателями преломления

примет вид

$$n_1 \sin \varphi = |n_2| \sin \alpha. \quad (2)$$

Запишем уравнения Максвелла в виде

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3)$$

На границе раздела выполняются граничные условия

$$E_t^I = E_t^{II}, \quad H_t^I = H_t^{II}. \quad (4)$$

Напряженности электрического поля для падающей, отраженной и прошедшей волн определяются соотношениями

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{P} e^{i(kr - \omega t)}; \quad \vec{E}^{(r)} = \vec{N} e^{i(kr - \omega t)}; \quad \vec{E}^{(t)} = \vec{L} e^{i(kr - \omega t)}. \quad (5)$$

Соответственно для  $x$ - и  $y$ -компонент электрического поля имеют место соотношения

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} &= \vec{P} \cdot \vec{e}_x = P_{\parallel} \cos \varphi; & E_y^{(i)} &= \vec{P} \cdot \vec{e}_y = P_{\perp}; \\ E_x^{(r)} &= \vec{N} \cdot \vec{e}_x = -N_{\parallel} \cos \varphi; & E_y^{(r)} &= \vec{N} \cdot \vec{e}_y = N_{\perp}; \\ E_x^{(t)} &= \vec{L} \cdot \vec{e}_x = L_{\parallel} \cos \alpha; & E_y^{(t)} &= \vec{L} \cdot \vec{e}_y = L_{\perp}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения для проекций напряженностей (6) в граничные

условия (4), получаем уравнения

$$\begin{aligned} P_{\parallel} \cos \varphi - N_{\parallel} \cos \varphi &= L_{\parallel} \cos \alpha; \\ P_{\perp} + N_{\perp} &= L_{\perp}. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем единичные векторы, лежащие в плоскости падения и перпендикулярные соответственно падающему, отраженному и преломленному лучам (см. рис. 1):

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{e}_y, \vec{k}_1]}{k_1}, \quad \vec{e}'_1 = \frac{[\vec{e}_y, \vec{k}'_1]}{k'_1}, \quad \vec{e}_2 = -\frac{[\vec{e}_y, \vec{k}_2]}{k_2}. \quad (8)$$

Волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн выражаются через показатели преломления:

$$k_1 = k'_1 = \frac{\omega}{c_0} n_1, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_0} |n_2|, \quad (9)$$

где  $c_0$  – скорость света в вакууме.

Для напряженности магнитного поля из уравнения Максвелла в случае плоских волн получаем выражение

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}], \quad (10)$$

где  $\mu_0, \mu$  – соответствующие магнитные постоянные для падающей волны.  $x$ -компонента вектора  $\vec{H}$  рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} \vec{H}_x^{(i)} &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}_1, \vec{E}^{(i)}] \vec{e}_x = \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{e}_x, \vec{k}_1] \vec{E}^{(i)} = \\ &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \frac{\omega}{c_0} n_1 \sin(90^\circ - \varphi) (-P_{\perp}) = -\frac{n_1 \cos \varphi}{\mu_0 c_0} P_{\perp} \end{aligned} \quad (11)$$

(для немагнитной среды  $\mu = 1$ ).

Проводя аналогичные выкладки, находим остальные компоненты для напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{H}_x^{(r)} &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}'_1, \vec{E}^{(r)}] \vec{e}_x = \frac{n_1 \cos \varphi}{\mu_0 c_0} N_{\perp}; \\ \vec{H}_x^{(t)} &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}_2, \vec{E}^{(t)}] \vec{e}_x = \frac{n_2 \cos \alpha}{\mu_0 c_0} L_{\perp}; \\ \vec{H}_y^{(i)} &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}_1, \vec{E}^{(i)}] \vec{e}_y = \frac{n_1}{\mu_0 c_0} P_{\parallel}; \\ \vec{H}_y^{(r)} &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}'_1, \vec{E}^{(r)}] \vec{e}_y = \frac{n_1}{\mu_0 c_0} N_{\parallel}; \\ \vec{H}_y^{(t)} &= \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [\vec{k}_2, \vec{E}^{(t)}] \vec{e}_y = -\frac{n_2}{\mu_0 c_0} L_{\parallel}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь учтено, что при  $n_2 < 0$   $|n_2| = -n_2$  и  $\mu = -1$ . Подставляя выражения для проекций напряженностей магнитного поля из (11) и (12) в граничные условия (4), получаем

$$\begin{aligned} n_1(P_{\parallel} + N_{\parallel}) &= -n_2L_{\parallel}; \\ n_1 \cos \varphi(N_{\perp} - P_{\perp}) &= n_2 \cos \alpha L_{\perp}. \end{aligned} \quad (13)$$

Соответственно амплитудные коэффициенты принимают вид

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{N_{\perp}}{P_{\perp}} = \frac{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \alpha}{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \alpha}; & t_{\perp} &= \frac{L_{\perp}}{P_{\perp}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \alpha}; \\ r_{\parallel} &= \frac{N_{\parallel}}{P_{\parallel}} = \frac{-n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \alpha}{-n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \alpha}; & t_{\parallel} &= \frac{L_{\parallel}}{P_{\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для коэффициентов отражения имеем

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{N_{\perp}}{P_{\perp}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \alpha}{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \alpha} \right|^2; \\ R_{\parallel} &= \left| \frac{N_{\parallel}}{P_{\parallel}} \right|^2 = \left| \frac{-n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \alpha}{-n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \alpha} \right|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные формулы позволяют рассчитывать амплитудные коэффициенты отражения и прохождения и полные коэффициенты отражения при переходе электромагнитной волны из “правой” среды в “левую”.

В случае вещественных показателей преломления формулы (14), (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{N_{\perp}}{P_{\perp}} = \frac{n_1 \cos \varphi - |n_2| \cos \alpha}{n_1 \cos \varphi + |n_2| \cos \alpha}; \\ t_{\perp} &= \frac{L_{\perp}}{P_{\perp}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + |n_2| \cos \alpha}; \\ r_{\parallel} &= \frac{N_{\parallel}}{P_{\parallel}} = \frac{|n_2| \cos \varphi - n_1 \cos \alpha}{|n_2| \cos \varphi + n_1 \cos \alpha}; \\ t_{\parallel} &= \frac{L_{\parallel}}{P_{\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{|n_2| \cos \varphi + n_1 \cos \alpha}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{N_{\perp}}{P_{\perp}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \varphi - |n_2| \cos \alpha}{n_1 \cos \varphi + |n_2| \cos \alpha} \right|^2; \\ R_{\parallel} &= \left| \frac{N_{\parallel}}{P_{\parallel}} \right|^2 = \left| \frac{|n_2| \cos \varphi - n_1 \cos \alpha}{|n_2| \cos \varphi + n_1 \cos \alpha} \right|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы (16), (17) являются обобщением формул Френеля. Они могут применяться для расчета коэффициентов отражения как в случае падения электромагнитной волны на поверхность раздела двух “правых” сред, так и в случае сред с положительным и отрицательным показателями преломления.

**Случай нормального падения.** При нормальном падении электромагнитной волны на поверхность “левой” среды формулы (14), (15) приобретают вид

$$r = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}; \quad t = \frac{2n_1}{n_1 - n_2}; \quad R = \left| \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \right|^2. \quad (18)$$

Если  $n_2 = -n_1$ , то из (18) следует, что  $R = 0$ , т.е. волна проходит через границу раздела без отражения.

**Случай наклонного падения.** Из соотношений (15) следует, что при наклонном падении коэффициенты отражения  $R_{\perp}$  и  $R_{\parallel}$  обращаются в нуль при выполнении условий

$$\frac{-n_2}{n_1} = \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \quad (19)$$

для  $s$ -волны (волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения) и

$$\frac{-n_2}{n_1} = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \quad (20)$$

для  $p$ -волны (волны, поляризованной в плоскости падения).

Из закона Снеллиуса (2) получаем

$$\frac{-n_2}{n_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}. \quad (21)$$

Из соотношений (19), (20) и (21) для  $s$ - и  $p$ -волн соответственно получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \varphi, \\ \sin 2\alpha &= \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) следует, что коэффициенты отражения  $R_{\perp}$  и  $R_{\parallel}$  обращаются в нуль, если угол преломления равен углу падения:  $\alpha = \varphi$ . В соответствии с законом преломления (2) это условие выполняется при равенстве модулей показателей преломления граничащих сред  $|n_2| = n_1$ .

В частности, при падении электромагнитной волны из вакуума на поверхность “левой” среды коэффициент отражения как для  $s$ -волны, так и для  $p$ -волны оказывается равным нулю, если коэффициент преломления “левой” среды удовлетворяет соотношению  $n_2 = -1$ .

Рассмотрим падение волны на границу раздела под углом  $\varphi$ , удовлетворяющим соотношению  $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$ . По аналогии с известным

законом прохождения излучения через границу раздела двух “правых” сред в этом случае угол  $\varphi = \varphi_B$  естественно называть углом Брюстера. Тогда

$$\sin \alpha = \cos \varphi_B. \quad (23)$$

Используя соотношение (23), угол Брюстера можно вычислить по формуле (2)

$$\varphi_B = \arctg \frac{|n_2|}{n_1}. \quad (24)$$

Из формулы (15) и соотношения (23) получаем, что при этом коэффициент отражения обращается в нуль:

$$R_{\parallel} = \left| \frac{N_{\parallel}}{P_{\parallel}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \alpha}{-n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \alpha} \right|^2 = 0. \quad (25)$$

Таким образом, при падении излучения под углом Брюстера  $\varphi_B$  отражение  $p$ -волны от поверхности “левой” среды отсутствует. В случае  $s$ -волны, как следует из (15), коэффициент отражения отличен от нуля и обращается в нуль, если только  $|n_2| = n_1$ .

Рассмотрим в качестве примера “левой” среды глобулярный фотонный кристалл, обладающий дисперсионными свойствами. В работе [2] показано, что закон дисперсии глобулярного фотонного кристалла задается соотношением

$$\cos k_1 a_1 \cdot \cos k_2 a_2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}} \sin k_1 a_1 \cdot \sin k_2 a_2 = \cos ka. \quad (26)$$

Величины, входящие в (26), имеют следующий физический смысл:  $\varepsilon_1 = 2,16$  — диэлектрическая проницаемость кварца;  $\varepsilon_2 = 1$  — диэлектрическая проницаемость воздуха;  $\eta = 0,26$  — коэффициент эффективной пористости образца;  $D = 220$  нм — диаметр глобул кварца;  $a = D\sqrt{2/3}$  — период структуры образца опала,  $a_1 = (1-\eta)a$ ,  $a_2 = \eta a$ ;  $\omega_i$  — циклическая частота электромагнитной волны;  $k_i(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$  — волновой вектор в опале  $\text{SiO}_2$  ( $i = 1$ ) и воздухе ( $i = 2$ ).

На рис. 2 приведена расчетная дисперсионная зависимость фотонного кристалла в соответствии с соотношением (26) при нормальном падении излучения на поверхность (111) глобулярного фотонного кристалла. На этом рисунке приведена также прямая  $\omega = c_0 k$  и показана точка пересечения этой прямой с верхней дисперсионной ветвью фотонного кристалла, соответствующая частоте  $4,5 \cdot 10^{15}$  рад/с. В этой точке эффективный показатель преломления среды  $n_2 = -1$ . Согласно соотношению (18) в случае нормального падения из вакуума отражение электромагнитной волны отсутствует.

В дисперсионных средах показатель преломления  $n_2$  зависит от частоты монохроматической электромагнитной волны и угла падения:

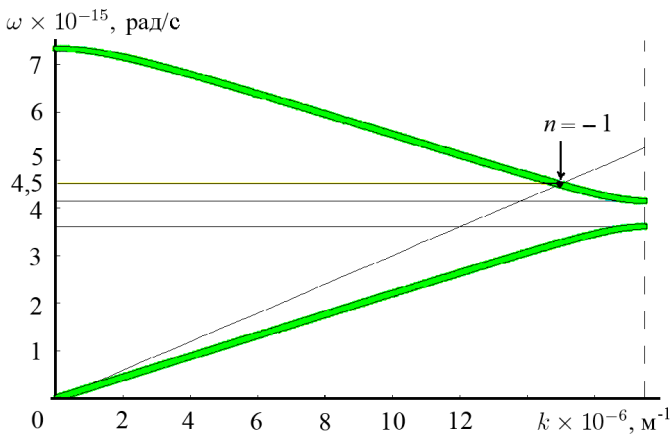


Рис. 2. Дисперсионные кривые фотонного кристалла

$n_2 = n_2(\omega, \varphi)$ . Соответственно, при заданном угле падения  $\varphi$  условие отсутствия отражения  $R = 0$  и равенство  $n_2(\omega, \varphi) = -n_1$  будут выполняться только для определенной частоты  $\omega$ . При изменении угла падения  $\varphi$  условие отсутствия отражения будет реализовано для другого значения частоты. Используя это свойство, можно создать селективный фильтр на основе фотонного кристалла. Поворачивая его на определенный угол к падающему лучу света, можно выделять из спектра волну определенной частоты, для которой излучение будет проходить через фильтр без потерь на отражение. На рис. 3 приведена схема использования такого рода фильтра в лазерном резонаторе для селекции различных линий генерации активной среды.

**Выводы.** Получены формулы для расчета коэффициентов отражения при падении волны на поверхность раздела “правой” и “левой” сред. Для случая вещественных показателей преломления приведены обобщенные формулы Френеля, применимые для расчета коэффициентов отражения на границе раздела как двух “правых”, так и “правой” и “левой” сред. Предсказанный эффект полной прозрачности среды,

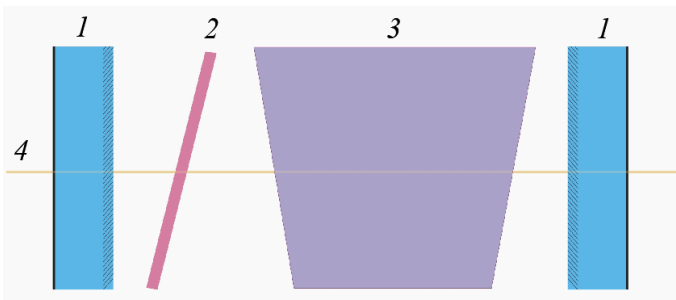


Рис. 3. Схема устройства лазера:

1 – оптический резонатор; 2 – селективный фильтр с отрицательным коэффициентом преломления; 3 – активная среда и система накачки; 4 – лазерный луч

в случае равенства модулей показателей преломления сред  $|n_2| = n_1$  можно использовать в различных оптических устройствах. Например, изготовив пластинку из “левой” среды и поместив ее в лазерный резонатор, можно выделять излучение определенной частоты, тем самым проводя спектральный отбор лазерного излучения.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-02-00293, 10-02-90042, 10-02-90404, 09-02-00582), а также Программы Президиума РАН № 21.*

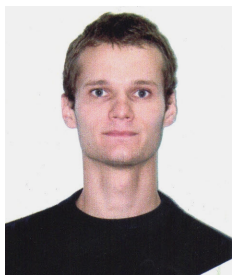
## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С и в у х и н Д. В. Оптика. – М.: Наука, 1980. – С. 406–412.
2. Г о р е л и к В. С. Оптика глобулярных фотонных кристаллов // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37 (5). – С. 409–432.
3. В е с е л а г о В. Г. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // УФН. – 2003. – Т. 173.
4. А г р а н о в и ч В. М., Г а р т ш т е й н Ю. Н. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. – 2006. – № 176. – С. 1051.

Статья поступила в редакцию 7.06.2010

Владимир Семенович Горелик окончил Московский физико-технический институт в 1965 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки Российской Федерации. Заведующий лабораторией “Комбинационное рассеяние” Физического института им. П.Н. Лебедева РАН.

V.S. Gorelik graduated from the Moscow Institute of Physics and Technology in 1965. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Honored Scientist of the Russian Federation. Head of “Combinational Scattering” laboratory of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences.



Владимир Викторович Щавлев родился в 1988 г. Студент Московского физико-технического института. Автор двух научных работ в области материалов с отрицательным показателем преломления и фотонных кристаллов.

V.V. Shchavlev (b. 1988) — student of the Moscow Institute of Physics and Technology (state university). Author of 2 publications in the field of materials with negative refraction factor and photon crystals.