

В. В. Лапшин, С. П. Чашников

УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ПРЫГАЮЩЕГО АППАРАТА В БЕЗОПОРНОЙ ФАЗЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НУЛЕВОМ КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ

Исследовано плоское движение одноногого прыгающего аппарата с телескопической ногой. Построена математическая модель движения аппарата вокруг центра масс в фазе полета. Решена задача управления движением аппарата при нулевом кинетическом моменте. Приведены результаты математического моделирования.

E-mail: vladimir@lapshin.net; serg1820@gmail.com

Ключевые слова: прыгающий аппарат, фаза полета, управление движением.

При увеличении скорости движения машин, передвигающихся с помощью ног, энергетически выгодно переходить от статически устойчивых режимов ходьбы к динамическим, а затем к бегу и прыжкам аналогично тому, как это имеет место у животных [1]. Этим объясняется интерес к исследованию динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов, движение которых состоит в чередовании опорных и безопорных фаз движения [1–5].

В безопорной фазе движения центр масс аппарата перемещается по баллистической траектории и его движение не управляемо. Движением же аппарата вокруг центра масс можно управлять [1–5]. В фазе полета имеет место закон сохранения кинетического момента аппарата относительно центра масс. Следовательно, движение весомых ног в фазе полета оказывает влияние на движение корпуса аппарата вокруг центра масс. Например, вытягивая или поджимая ноги, можно изменять их моменты инерции, и, соответственно, изменять влияние, оказываемое движением ног на угловое движение корпуса. В данной работе рассмотрена задача построения программного движения аппарата относительно центра масс, обеспечивающего переход из произвольного начального состояния в требуемое конечное при нулевом кинетическом моменте аппарата. При ненулевом кинетическом моменте аппарата эта проблема рассмотрена в работах [1–5].

Постановка задачи. Конструктивная схема аппарата приведена на рис. 1. Он состоит из корпуса и телескопической ноги, присоединенной к корпусу. Точка подвеса ноги совпадает с центром масс корпуса. Нога состоит из цилиндра, который вращается относительно точки подвеса ноги к корпусу, и штока, который перемещается вдоль телескопического звена ноги. Обозначим через m_1 , m_2 , m_3 , J_1 , J_2 , J_3

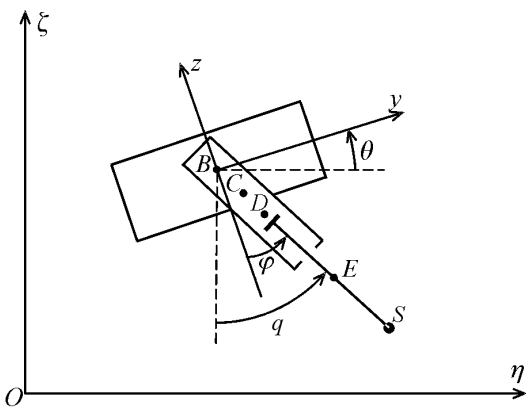


Рис. 1. Конструктивная схема аппарата

а ось $B\eta$ – продольной осью аппарата. Положение ноги относительно корпуса определяется углом φ между продолжением оси Bz и телескопическим звеном ноги и длиной ноги $l = BS$. Угол q определяет ориентацию телескопического звена ноги в абсолютном пространстве

$$q = \theta + \varphi. \quad (1)$$

Центр масс цилиндра D лежит на оси телескопического звена ноги на расстоянии $r_2 = BD$ от точки подвеса ноги к корпусу. Центр масс штока E лежит на оси телескопического звена ноги на расстоянии $r_3 = SE$ от стопы S . Центр масс аппарата C лежит на оси телескопического звена ноги на расстоянии $R = BC$ от точки подвеса ноги к корпусу:

$$R = \frac{m_2 r_2 + m_3 (l - r_3)}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (2)$$

В фазе полета имеет место закон сохранения кинетического момента относительно центра масс аппарата. Кинетический момент аппарата складывается из кинетического момента корпуса, цилиндра и штока:

$$\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3.$$

Кинетический момент корпуса относительно центра масс аппарата C равен

$$\bar{K}_1 = m_1 \bar{R} \times \bar{V}_B + J_1 \dot{\bar{i}},$$

где \bar{V}_B – скорость центра масс корпуса относительно осей Кенига [7], $\bar{R} = \overline{BC}$, \bar{i} – орт оси $O\xi$, которая перпендикулярна плоскости $O\eta\zeta$ на рис. 1. Скорость \bar{V}_B складывается из двух компонент: радиальной, направленной вдоль телескопического звена ноги и равной \dot{R} , и тангенциальной, направленной перпендикулярно к телескопическому звену ноги и равной $R\dot{q}$. Тогда

$$|\bar{R} \times \bar{V}_B| = R^2 \dot{q}, \quad K_1 = m_1 R^2 \dot{q} + J_1 \dot{\theta}.$$

соответственно массу корпуса, цилиндра и штока ноги и их моменты инерции относительно их центров масс. Положение корпуса в абсолютной системе координат $O\eta\zeta$ определяется координатами центра масс корпуса и углом наклона корпуса к горизонту θ . Система координат $B\eta\zeta$ связана с корпусом аппарата, ось Bz является конструктивной вертикалью,

Аналогично вычисляются кинетические моменты цилиндра и штока:

$$K_2 = m_2(r_2 - R)^2\dot{q} + J_2\dot{q}, \quad K_3 = m_3(l - r_3 - R)^2\dot{q} + J_3\dot{q}.$$

Подставляя значение R из (2), получаем

$$K = k(l)\dot{q} + J_1\dot{\theta}, \quad (3)$$

где

$$k(l) = \mu_1(l - \lambda)^2 + \mu_2, \\ \mu_1 = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \lambda = \frac{m_2r_2}{m_1 + m_2}, \quad (4) \\ \mu_2 = J_2 + J_3 + \frac{m_3^2r_3^2}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_1m_2r_2^2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения кинетического момента относительно центра масс имеет вид $k(l)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + J_1\dot{\theta} = K = K^0 = \text{const}$. В настоящей работе рассмотрен случай, когда кинетический момент относительно центра масс аппарата равен нулю, т.е.

$$k(l)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + J_1\dot{\theta} = 0. \quad (5)$$

Положим, что имеются ограничения на пределы изменения угла поворота ноги относительно корпуса φ и длины ноги l

$$l \in [l_{\min}, l_{\max}], \quad \varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]. \quad (6)$$

Отметим, что $k(l)$ — положительная монотонно возрастающая функция в области (6), так как $l_{\min} > r_2 > \lambda$ в силу соотношений (4).

Построение программного движения. Движение аппарата будем осуществлять таким образом, чтобы оно разбивалось на отрезки времени (этапы), в течение каждого из которых работает только один привод ноги. Либо изменяется длина ноги при фиксированном φ , тогда угол θ остается постоянным в силу (5). Либо изменяется угол поворота ноги относительно корпуса при фиксированной длине ноги, тогда с учетом соотношения (5)

$$\dot{\theta} = -\frac{k(l)\dot{\varphi}}{k(l) + J_1}. \quad (7)$$

Интегрируя полученное выражение при $l = \text{const}$ из положения $\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}$, получаем

$$\theta - \tilde{\theta} = -\frac{k(l)(\varphi - \tilde{\varphi})}{k(l) + J_1}. \quad (8)$$

Выражение (8) отражает закон сохранения кинетического момента относительно центра масс аппарата в фазе полета: поворот ноги

вокруг корпуса на угол $\Delta\varphi = \varphi - \tilde{\varphi}$ приводит к повороту корпуса в пространстве на угол $\Delta\theta = \theta - \tilde{\theta}$. На плоскости переменных φ и θ эта зависимость $\theta(\varphi)$ имеет вид семейства прямых, наклон которых зависит от l (рис. 2). При максимально вытянутой ноге $l = l_{\max}$ перенос ноги оказывает максимальное влияние на движение корпуса, поэтому прямая (8) в этом случае имеет наибольший наклон. При максимально поджатой ноге $l = l_{\min}$ перенос ноги оказывает минимальное влияние на движение корпуса, прямая (8) имеет наименьший наклон. Остальные прямые, проходящие через точку $(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})$, реализуются при промежуточных значениях $l \in (l_{\min}, l_{\max})$.

Назовем затемненную область и ее границы (см. рис. 2) *областью достижимости* из положения $(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})$ при фиксированном $l \in [l_{\min}, l_{\max}]$. В каждый момент движения аппарата изображающей точке (φ, θ) соответствует определенная область достижимости.

Утверждение 1. Если изображающая точка B на плоскости переменных φ, θ находится в области достижимости точки A , то точка A лежит в области достижимости точки B .

Доказательство этого утверждения очевидно (рис. 3).

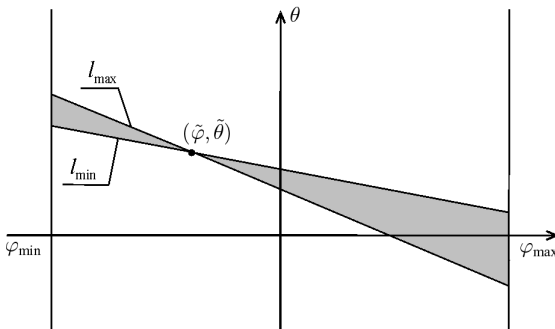


Рис. 2. Область достижимости из положения $(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})$

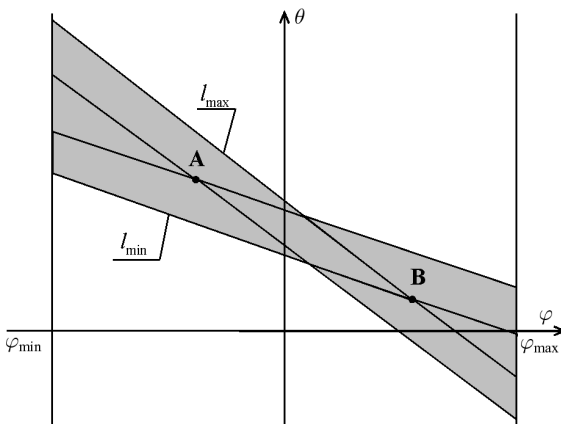


Рис. 3. К утверждению 1

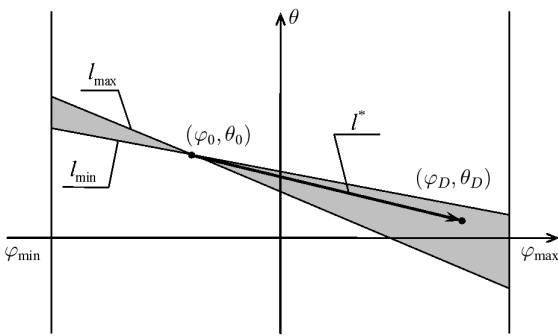


Рис. 4. Траектория движения изображающей точки в том случае, когда конечное положение (φ_D, θ_D) лежит в области достижимости из начального положения (φ_0, θ_0)

Пусть задано начальное положение аппарата относительно центра масс $(\varphi_0, \theta_0, l_0)$ и требуемое конечное $(\varphi_D, \theta_D, l_D)$. Если точка (φ_D, θ_D) лежит в области достижимости точки (φ_0, θ_0) (рис. 4), то в силу (8)

$$\theta_D - \theta_0 = -\frac{k(l^*)(\varphi_D - \varphi_0)}{k(l^*) + J_1}, \quad (9)$$

где $l^* \in [l_{\min}, l_{\max}]$. В этом случае алгоритм разворота реализуется так:

при $\varphi = \varphi_0$ длина ноги изменяется до значения l^* ;

при фиксированном $l = l^*$ нога аппарата поворачивается, угол φ изменяется до φ_D , угол поворота корпуса θ становится равным θ_D ;

при $\varphi = \varphi_D$ длина ноги изменяется до требуемого значения l_D .

В силу (4) и (9)

$$l^* = \lambda + \sqrt{-\frac{1}{\mu_1} \left(\mu_2 + \frac{J_1 \Delta \theta}{\Delta \theta + \Delta \varphi} \right)}, \quad (10)$$

где $\Delta \varphi = \varphi_D - \varphi_0$, $\Delta \theta = \theta_D - \theta_0$.

Аппарат можно перевести в точку (φ_2, θ_2) , заведомо не лежащую в области достижимости из начального положения (φ_0, θ_0) . Например, движение осуществляется следующим образом:

1) при $\varphi = \varphi_0$ длина ноги изменяется от l_0 до l_{\max} ;

2) нога аппарата поворачивается на угол $\Delta \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_0$ ($\varphi_1 \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$), угол поворота корпуса θ становится равным θ_1 ;

3) при $\varphi = \varphi_1$ длина ноги изменяется от l_{\max} до l_{\min} ;

4) нога аппарата поворачивается на угол $\Delta \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ ($\varphi_2 \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$, $\text{sign}(\Delta \varphi_2) = -\text{sign}(\Delta \varphi_1)$), угол поворота корпуса θ становится равным θ_2 ;

5) при $\varphi = \varphi_2$ длина ноги изменяется от l_{\min} до l_0 .

Траектория движения изображающей точки на плоскости переменных φ, θ показана на рис. 5 в случае $\varphi_1 < \varphi_0$ (а) и $\varphi_1 > \varphi_0$ (б).

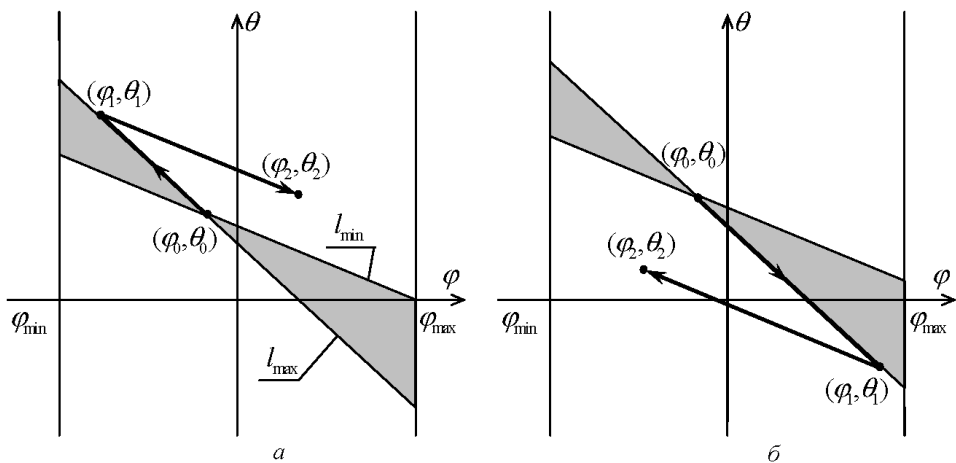


Рис. 5. Траектория движения изображающей точки при переходе в точку (φ_2, θ_2) , не лежащую в области достижимости из начального положения (φ_0, θ_0)

Вместо l_{\min} и l_{\max} могут использоваться другие значения $l \in [\underline{l}, \overline{l}]$. Поворот корпуса может быть осуществлен на любой угол $\Delta\theta$ при повторе описанных движений. Поэтому можно построить программное движение разворота аппарата во всех случаях, когда точка (φ_D, θ_D) лежит вне области достижимости из начального положения.

Когда (φ_D, θ_D) не лежит в области достижимости из начального положения, существует два способа построения программного движения. Если $\theta_D < \theta_0$, первому способу соответствует движение изображающей точки на плоскости φ, θ по траектории, показанной на рис. 6, а. Программное движение реализуется следующим образом:

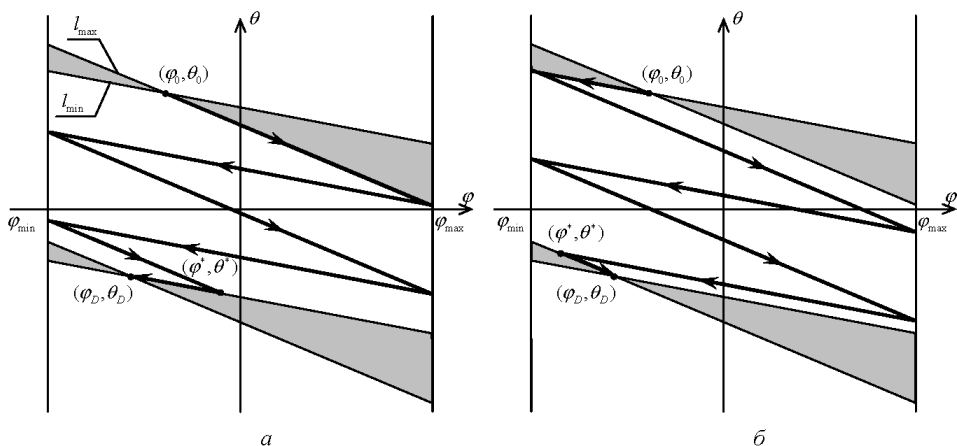


Рис. 6. Траектории движения изображающей точки для случая, когда конечное положение (φ_D, θ_D) лежит вне области достижимости из начального положения $(\varphi_0 > \varphi_D)$, при первом (а) и втором (б) способах построения программного движения

- 1) при $\varphi = \varphi_0$ длина ноги изменяется от l_0 до l_{\max} ;
- 2) если в процессе изменения угла φ от φ_0 до φ_{\max} точка (φ_D, θ_D) попадает на границу области достижимости из некоторого положения (φ^*, θ^*) (т.е. (φ^*, θ^*) попадает на границу области достижимости (φ_D, θ_D) , см. утверждение 1), при $\varphi = \varphi^*$ длина ноги изменяется от l_{\max} до l_{\min} . Угол φ изменяется от φ^* до φ_D , в результате угол поворота корпуса θ становится равным θ_D . В положении (φ_D, θ_D) длина ноги изменяется до l_D . Конец;
- 3) в противном случае нога поворачивается относительно корпуса, угол φ увеличивается до φ_{\max} ;
- 4) при $\varphi = \varphi_{\max}$ длина ноги изменяется от l_{\max} до l_{\min} ;
- 5) если в процессе изменения угла φ от φ_{\max} до φ_{\min} точка (φ_D, θ_D) попадает на границу области достижимости из некоторого положения (φ^*, θ^*) , то при $\varphi = \varphi^*$ длина ноги изменяется от l_{\min} до l_{\max} . Угол φ изменяется от φ^* до φ_D , в результате угол поворота корпуса θ становится равным θ_D . В положении (φ_D, θ_D) длина ноги изменяется до l_D . Конец;
- 6) в противном случае нога поворачивается относительно корпуса, угол φ уменьшается до φ_{\min} ;
- 7) при $\varphi = \varphi_{\min}$ длина ноги изменяется от l_{\min} до l_{\max} ;
- 8) если в процессе изменения угла φ от φ_{\min} до φ_{\max} точка (φ_D, θ_D) попадает на границу области достижимости из некоторого положения (φ^*, θ^*) , при $\varphi = \varphi^*$ длина ноги изменяется от l_{\max} до l_{\min} . Угол φ изменяется от φ^* до φ_D , в результате угол поворота корпуса θ становится равным θ_D . В положении (φ_D, θ_D) длина ноги изменяется до l_D . Конец;
- 9) В противном случае происходит переход к пункту 3.

Второму способу построения программного движения соответствует траектория движения изображающей точки на плоскости φ, θ , показанная на рис. 6, б. Тогда сначала при $\varphi = \varphi_0$ длина ноги изменяется до l_{\min} . Нога аппарата поворачивается на угол $\Delta\varphi_1 = \varphi_{\min} - \varphi_0$. Далее все аналогично первому способу. Если $\theta_D > \theta_0$, то по сравнению с предыдущим случаем изменяются направления поворотов ноги. Соответствующие траектории изображающей точки на плоскости φ, θ показаны на рис. 7.

Описанный алгоритм построения программного движения можно изобразить в виде блок-схемы, представленной на рис. 8. При этом реализуются траектории изображающей точки, соответствующие первому способу построения программного движения (рис. 6, а и 7, а). Обозначим l_1, l_2 и φ_1, φ_2 — значения соответствующих координат аппарата в начале и конце этапа движения при $l = \text{const}$, что позволит

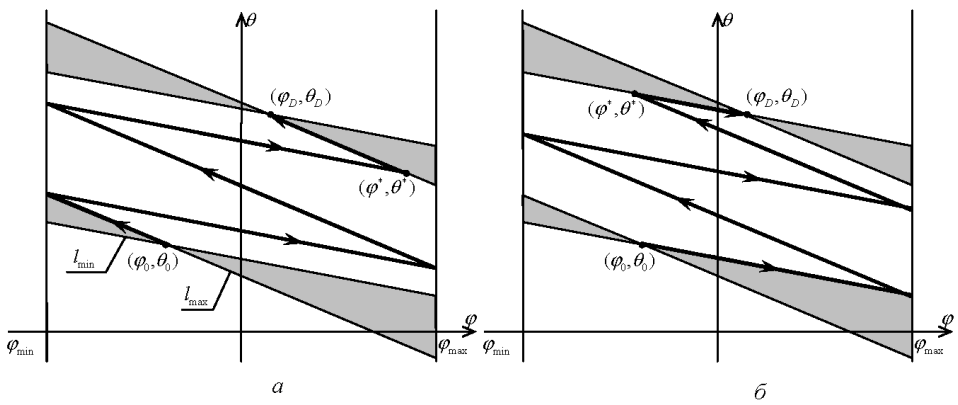


Рис. 7. Траектории движения изображающей точки для случая, когда конечное положение (φ_D, θ_D) лежит вне области достижимости из начального положения $(\varphi_0 < \varphi_D)$, при первом (а) и втором (б) способах построения программного движения

объединить однотипные пункты 1–3, 4–6, 7–9 описания алгоритма построения программного движения.

Утверждение 2. Выбор способа построения программного движения не влияет на сумму движений по углу φ .

Доказательство. Пусть изображающая точка (см. рис. 9) движется из точки A в B . При первом способе построения программного движения получаем путь точки $ADFB$, а при втором — $ACGB$. Совокупность движений по углу φ — это путь, пройденный проекцией изображающей точки на ось φ . Имеем $ADFB = AD + DF + FB$, $ACGB = AC + CG + GB$. Четырехугольники $ECAD$ и $BFEG$ — параллелограммы, их стороны попарно параллельны и равны; получаем $CA = ED$, $CE = AD$, $FB = EG$, $FE = BG$, тогда $AD + FB = CG$, $FD = CA + BG$.

Пути, пройденные изображающей точкой на плоскости φ, θ для первого и второго способов движения равны: $ADFB = ACGB$. Следовательно, суммы движений аппарата по углу φ также одинаковы.

Назовем *точкой переключения* ту точку на плоскости переменных φ, θ , в которой изменяется длина ноги аппарата.

Утверждение 3. В зависимости от конечного положения аппарата выбор способа построения программного движения может влиять на сумму движений по координате l .

На сумму движений по координате l влияет число точек переключения на траектории изображающей точки. На рис. 10 заштрихованные области и части их границ, обведенные жирной линией, соответствуют конечным положениям аппарата, для которых число точек переключения зависит от способа построения программного движения и различается на 1 (например, точки A и B). Для всех остальных конечных

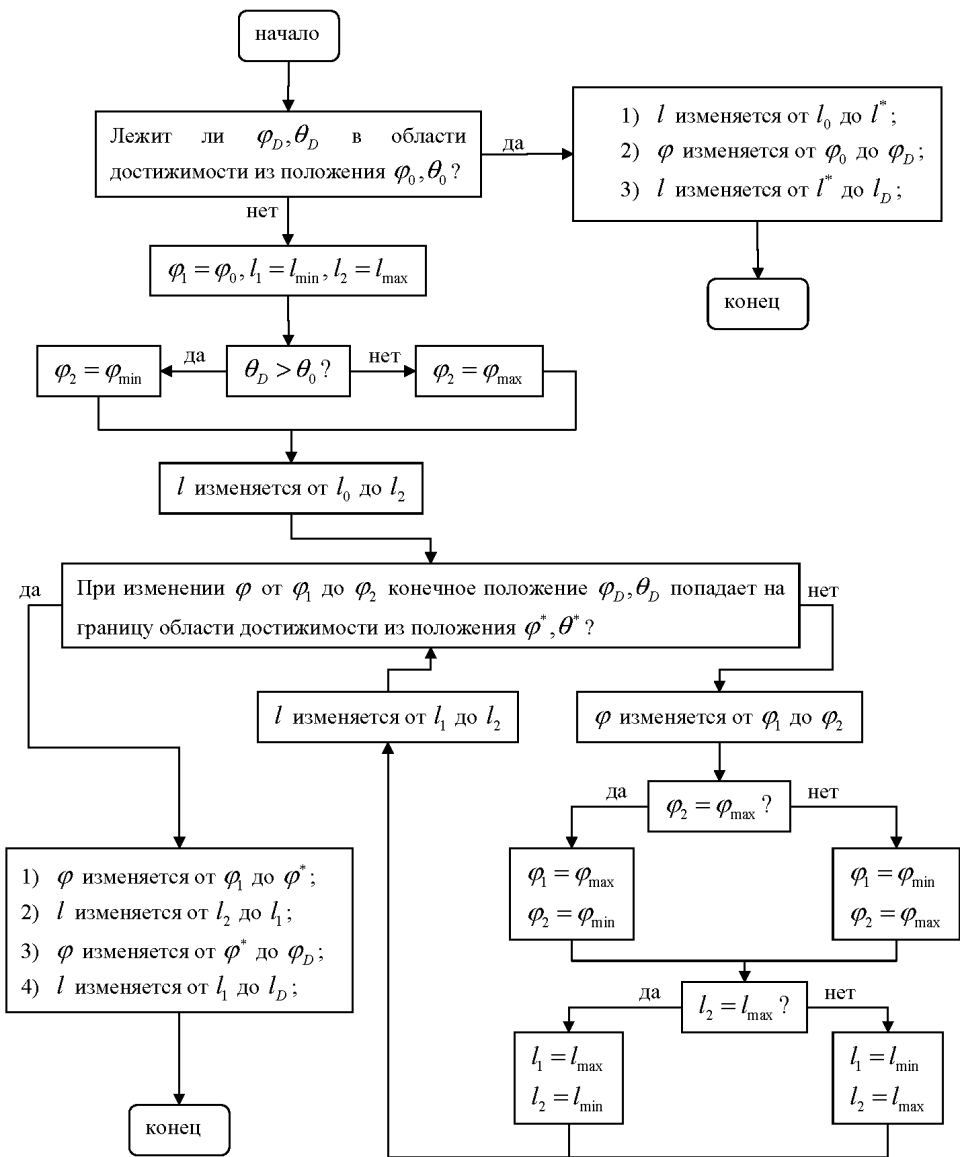


Рис. 8. Блок-схема алгоритма построения программного движения (первый способ)

положений способ движения не влияет на число точек переключения (например, точки C и D). Это легко подтверждается построением траекторий изображающей точки на плоскости φ, θ .

Утверждение 4. При изменении ограничений на значения угла φ сумма движений по углу φ остается постоянной, а по координате l — изменяется.

Доказательство. Рассмотрим два случая (рис. 11) — когда движение точки по координате φ ограничено ($\varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$) и когда ограничений нет. В первом случае траектория точки $ADCHGB$, во втором — $ADEFB$. Имеем $ADCHGB = AD + DC + CH + HG +$

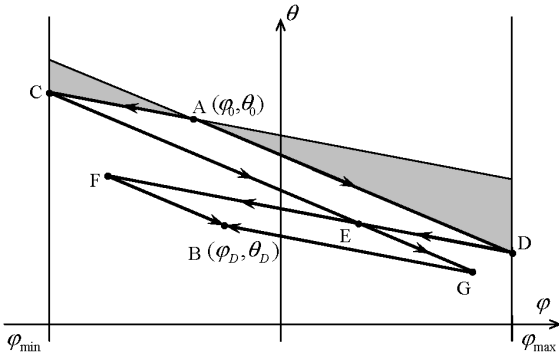


Рис. 9. К утверждению 2

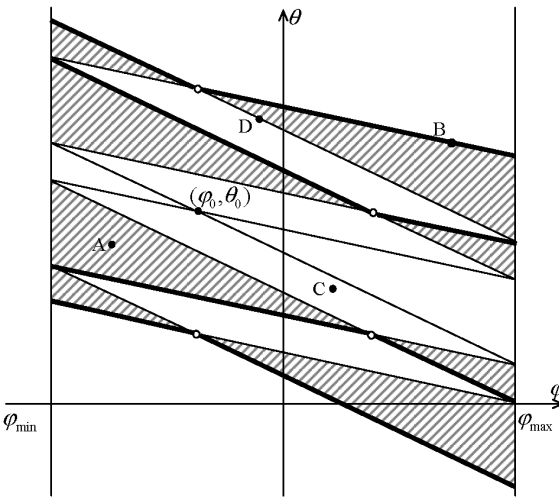


Рис. 10. К утверждению 3

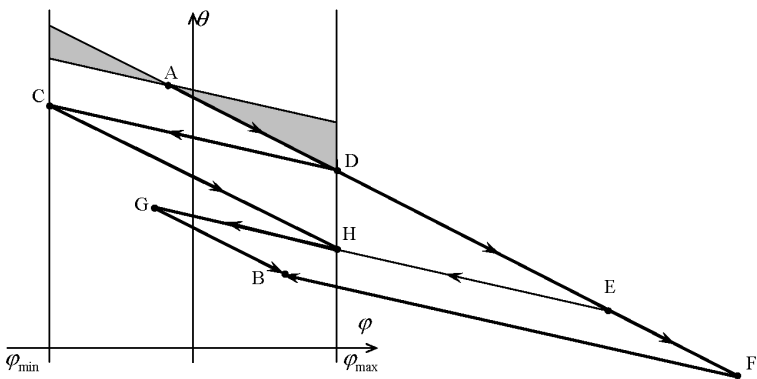


Рис. 11. К утверждению 4

+ GB , $ADEFB = AD + DE + EF + FB$. Четырехугольники $DCHE$ и $EGBF$ — параллелограммы, их стороны попарно параллельны и равны. Получаем $CH = DE$, $CD = HE$, $GB = EF$, $GE = BF$, тогда $AF = AD + CH + GB$, $BF = CD + GH$.

Пути, пройденные изображающей точкой на плоскости φ, θ для первого и второго способов движения равны: $ADCHGB = ADEFB$. Следовательно, суммы движений аппарата по углу φ также одинакова.

На сумму движений по координате l влияет число точек переключения на траектории изображающей точки. На рис. 11 видно, что в первом случае на траектории лежит шесть точек переключения, во втором — три. Если точка (φ_D, θ_D) не лежит в области достижимости из начального положения, то чем меньше диапазон значений угла φ , тем больше точек переключения будет проходить изображающая точка. В случае, когда движение по углу φ не ограничено, имеем минимальное число точек переключения, равное трем.

Следствие. Для минимизации движений аппарата по координате l при построении программного движения необходимо использовать весь допустимый диапазон значений по углу φ (см. утверждение 4) и выбирать способ построения программного движения в зависимости от требуемого конечного положения (φ_D, θ_D) (см. утверждение 3). Этот пункт не реализован в блок-схеме, показанной на рис. 8.

Результаты математического моделирования движения аппарата. Масса корпуса, цилиндра и штока ноги, их моменты инерции относительно их центров масс соответственно составляют: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 1$ кг, $J_1 = 0,5$ кг·м², $J_2 = 0,07$ кг·м², $J_3 = 0,04$ кг·м². Расстояния, определяющие положения центров масс цилиндра и штока, составляют $r_2 = 0,3$ м, $r_3 = 0,4$ м. Длина ноги l изменяется в пределах от $l_{\min} = 0,6$ м до $l_{\max} = 1$ м. Угол поворота ноги относительно корпуса φ изменяется в пределах от $\varphi_{\min} = -30^\circ$ до $\varphi_{\max} = 30^\circ$.

В качестве примера рассмотрен разворот аппарата из начального положения $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $l_0 = 1$ м в конечное $\varphi_D = 0^\circ$, $\theta_D = -10^\circ$, $l_D = 1$ м. Программное движение строится первым способом (см. рис. 6, а и 7, а).

На рис. 12 показаны графики $\varphi(t)$, $l(t)$, $\theta(t)$. Функции угла поворота ноги аппарата $\varphi(t)$ и длины ноги аппарата $l(t)$ получены как решение задачи быстрогодействия [8] при условиях $|\ddot{\varphi}_{\max}| = 20^\circ/\text{с}^2$, $|\ddot{l}_{\max}| = 0,5$ м/с², т.е. ускорения являются кусочно-постоянными функциями времени. На рис. 13 показана траектория движения изображающей точки на плоскости φ, θ . В процессе разворота аппарата два раза изменяется длина ноги (точки переключения B и C). Движение происходит при максимально вытянутой ноге ($l_{\max} = 1$ м, отрезки AB и CD) и максимально поджатой ($l_{\min} = 0,6$ м, отрезок BC).

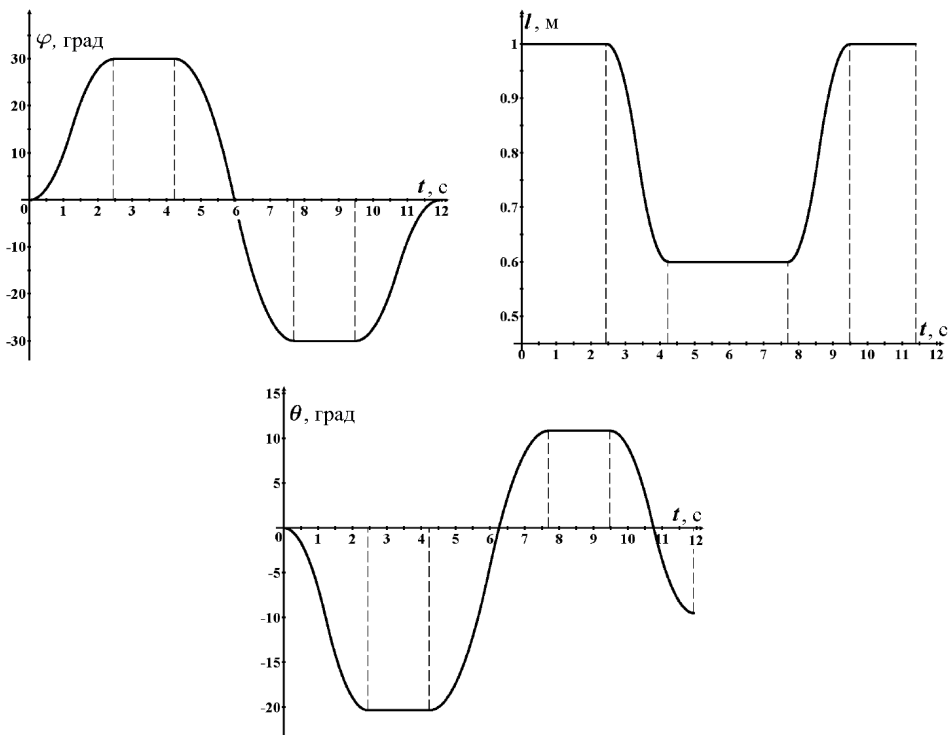


Рис. 12. Графики зависимости координат φ , l , θ от времени

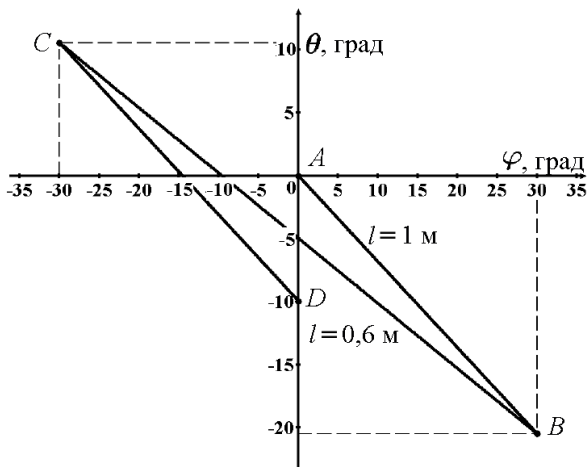


Рис. 13. Траектория изображающей точки на плоскости φ, θ

Выполненная анимация позволяет демонстрировать движения аппарата на экране компьютера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00712) и гранта № НШ-5271.2010.8 по поддержке ведущих научных школ РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O k h o t s i m s k y D. E., et al. Walking machines // Advances in mechanics, 1992, No. 1–2. – P. 39–70.
2. Л а п ш и н В. В. Динамика и управление движением прыгающего аппарата // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983, № 5. – С. 42–51.
3. Л а п ш и н В. В. Управление движением прыгающего аппарата в фазе полета // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984, № 1. – С. 159–165.
4. R a i b e r t M. H. Legged robots that balance // Robotics research: The fourth international symposium. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1986. – 233 p.
5. L a p s h i n V. V. Motion control of a legged machine in the supportless phase of hopping // The international journal of robotics research. – 1991. No. 4. – P. 327–337.
6. К а н е Т. R., S c h e r M. P. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon // International journal of solids and structures. – 1969. – No. 7.
7. К у р с теоретической механики / К.С. Колесников и др. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
8. П о н т р я г и н Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.

Статья поступила в редакцию 29.04.2010

Владимир Владимирович Лапшин родился в 1954 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1975 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор специализируется в области механики и управления движением шагающих аппаратов, робототехники.

V.V. Lapshin (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1975. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Field of scientific research includes mechanics and motion control of walking machines, robotics.

Сергей Петрович Чашников родился в 1989 г. Студент 4 курса кафедры “Специальная робототехника и мехатроника” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

S.P. Chashnikov (b. 1989) – 4-year student of “Special Robotics and Mechatronics” department of the Bauman Moscow State Technical University.