

УДК 621.1.016.4

Ле Шонг Тунг

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО
СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ
ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ**

Рассмотрена задача определения стационарного температурного поля в конструкции методом локальных вариаций. Решение основано на использовании интегрального функционала, достигающего минимума на искомом решении.

Не изменяющееся во времени температурное состояние конструкции количественно описывается температурным полем, которое представляет собой совокупность значений температуры T во всех точках M области D и ее границы C . Если в материале отсутствуют источники (или стоки) теплоты, то стационарное температурное поле в области D удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению [1]

$$\nabla(\lambda(M, T)\nabla T(M)) = 0, \quad M \in D, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$T(N) = f_1(N), \quad N \in C \setminus C_2, \quad (2)$$

$$\lambda(N, T)\mathbf{n}(N)\nabla T(N) = f_2(N, T), \quad N \in C_2, \quad (3)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; $\lambda(M, T)$ — теплопроводность материала конструкции, зависящая в общем случае от координат точки $M \in D$ (или $N \in C_2$) и температуры; $f_1(N)$ — заданная функция; $\mathbf{n}(N)$ — единичный вектор внешней нормали к участкам C_2 границы, на которых задана функция $f_2(N, T)$.

Количественный анализ математической модели (1)–(3) можно провести различными методами, причем в случае нелинейной зависимости функции f_2 и теплопроводности материала конструкции от температуры этот анализ связан с выполнением последовательных приближений. В дальнейшем положим

$$f_2(N, T) = \alpha(N)(T_C(N) - T(N)),$$

где $T_C(N)$ и $\alpha(N)$ — зависящие от положения точки $N \in C_2$ температура внешней среды и коэффициент теплообмена с этой средой соответственно. При сравнительно слабой зависимости λ от T на каждой

очередной итерации можно выбирать численные значения λ , соответствующие температуре, полученной на предшествующей итерации. Тогда на каждой очередной итерации вместо задачи (1)–(3) необходимо решать линейное дифференциальное уравнение

$$\nabla(\lambda(M)\nabla T(M)) = 0, \quad M \in D, \quad (4)$$

с граничными условиями (2) и условием

$$\lambda(N)\mathbf{n}(N)\nabla T(N) + \alpha(N)T(N) = \alpha(N)T_C(N), \quad N \in C_2. \quad (5)$$

Для конструкции сложной формы эффективным методом решения задачи рассматриваемого типа является метод конечных элементов, который основан на интегральной формулировке рассматриваемой задачи. В данном случае эта форма может быть приведена к интегральному функционалу [1]

$$J(T) = \int_D \frac{\lambda(M)}{2} (\nabla T(M))^2 dD + \int_{C_2} \alpha(N) \left(\frac{T(N)}{2} - T_C \right) T(N) dC, \quad (6)$$

который допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых в области D распределениях температуры, удовлетворяющих граничному условию (2). При этом на истинном решении задачи функционал (6) достигает минимума. Это свойство позволяет применить для решения метод локальных вариаций [2].

Используем функционал (6) для нахождения распределения температуры в двухслойной оболочке, две стенки которой связаны между собой ребрами, образующими каналы для охлаждающей жидкости. Повторяющийся элемент оболочки представлен на рис. 1, *a*. На внутреннюю стенку воздействует газ с температурой $T_г$. Охлаждающая жидкость имеет температуру $T_ж$.

Разобьем область D на прямоугольные ячейки прямыми $x = x_j + j\Delta x$ и $y = y_k + k\Delta y$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, $\Delta x, \Delta y > 0$, затем на треугольные ячейки (рис. 1, *б*). Предполагается, что параметры сетки подобраны так, что линии $x = x_m$, $x = x_l$, $x = x_{m_1}$, $x = x_{m_2}$, $y = y_1$, $y = y_n$, $y = y_{n_1}$ совпадают с соответствующими границами области D .

Минимизируемый функционал $J(T)$ приближенно заменим суммой

$$J \approx I = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (I_{jk}^1 + I_{jk}^2), \quad (7)$$

где I_{jk}^1, I_{jk}^2 — приближенные значения вкладов в функционал по треугольникам с вершинами в точках M_{jk} , $M_{j+1,k}$, $M_{j,k+1}$ и $M_{j+1,k+1}$,

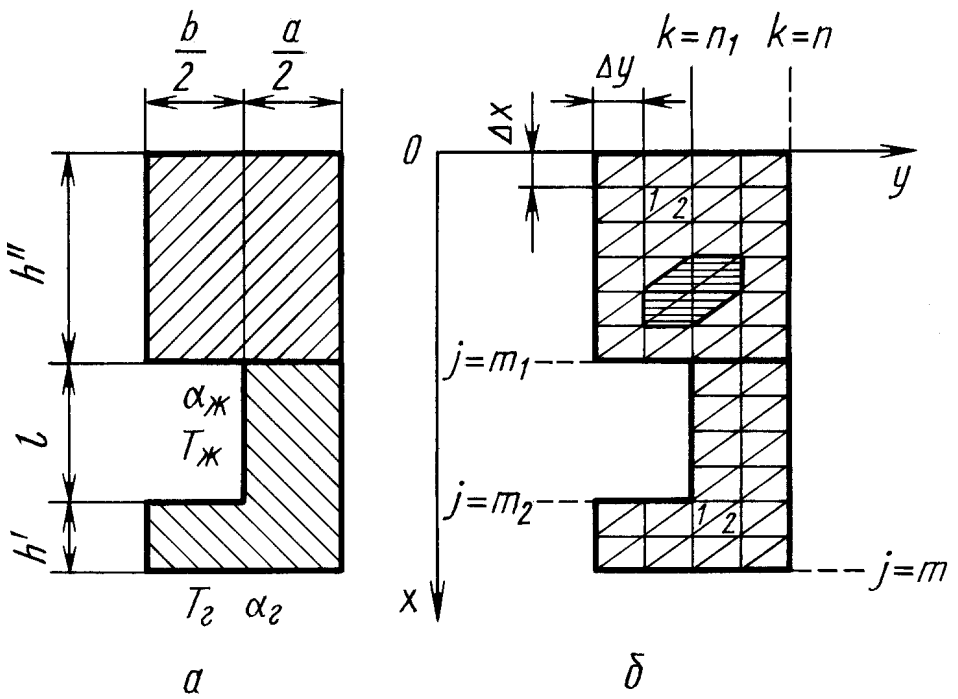


Рис. 1. Повторяющийся элемент оболочки:

a — исходящая область; *b* — триангуляция области

$M_{j+1,k}$, $M_{j,k+1}$ соответственно. Частные производные в формуле (6) приближенно представим следующими конечно-разностными формулами: для треугольных ячеек с вершинами M_{jk} , $M_{j+1,k}$, $M_{j,k+1}$ (ячеек 1 на рис. 1, б) —

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 = \frac{T_{jk} - T_{j+1,k}}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 = \frac{T_{j,k+1} - T_{jk}}{\Delta y}; \quad (8)$$

для треугольных ячеек с вершинами $M_{j+1,k+1}$, $M_{j+1,k}$, $M_{j,k+1}$ (ячеек 2 на рис. 1, б) —

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 = \frac{T_{j,k+1} - T_{j+1,k+1}}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 = \frac{T_{j+1,k+1} - T_{j+1,k}}{\Delta y}. \quad (9)$$

Получим формулы вычисления функционала для ячеек с вершинами во внутренних узлах:

$$I_{jk}^1 = \lambda_{jk} \left(\left(\frac{T_{jk} - T_{j+1,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{j,k+1} - T_{jk}}{\Delta y} \right)^2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{4}, \quad (10)$$

$$I_{jk}^2 = \lambda_{jk} \left(\left(\frac{T_{j,k+1} - T_{j+1,k+1}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{j+1,k+1} - T_{j+1,k}}{\Delta y} \right)^2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{4}; \quad (11)$$

в узлах на поверхности внутренней стенки, омываемой охлаждающей жидкостью:

$$I_{jk}^1 = \left(\alpha_{\text{ж}} \frac{T_{jk}}{2} - \alpha_{\text{ж}} T_{\text{ж}} \right) T_{jk} \Delta y + \lambda_{jk} \left(\left(\frac{T_{jk} - T_{j+1,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{j,k+1} - T_{jk}}{\Delta y} \right)^2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{8} \quad (12)$$

(I_{jk}^2 вычисляется по формуле (11)); в узлах на поверхности наружной стенки, омываемой охлаждающей жидкостью:

$$I_{jk}^2 = \left(\alpha_{\text{ж}} \frac{T_{jk}}{2} - \alpha_{\text{ж}} T_{\text{ж}} \right) T_{jk} \Delta y + \lambda_{jk} \left(\left(\frac{T_{j,k+1} - T_{j+1,k+1}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{j+1,k+1} - T_{j+1,k}}{\Delta y} \right)^2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{8} \quad (13)$$

(I_{jk}^1 вычисляется по формуле (10)); в узлах на поверхности ребер, омываемой охлаждающей жидкостью:

$$I_{jk}^1 = \left(\alpha_{\text{ж}} \frac{T_{jk}}{2} - \alpha_{\text{ж}} T_{\text{ж}} \right) T_{jk} \Delta x + \lambda_{jk} \left(\left(\frac{T_{jk} - T_{j+1,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{jk+1} - T_{jk}}{\Delta y} \right)^2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{8}; \quad (14)$$

в узлах на поверхности внутренней стенки со стороны нагрева газом:

$$I_{jk}^2 = \left(\alpha_{\text{г}} \frac{T_{jk}}{2} - \alpha_{\text{г}} T_{\text{г}} \right) T_{jk} \Delta y + \lambda_{jk} \left(\left(\frac{T_{j-1,k} - T_{jk}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{T_{j,k+1} - T_{jk}}{\Delta y} \right)^2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{8} \quad (15)$$

(I_{jk}^1 вычисляется по формуле (10)); здесь $\alpha_{\text{ж}}$, $\alpha_{\text{ж}}$ — коэффициенты теплообмена стенок оболочки с газом и жидкостью соответственно.

Сначала задаем некоторые исходные значения температуры $T_{jk}(x_j, y_k)$ для всех узлов созданной сетки. Эти значения должны удовлетворять условию (2). Вычисляем значения I_{jk}^1 , I_{jk}^2 , I и сохраняем их в памяти ЭВМ. Затем варьируем температуру с заданным положительным достаточно малым шагом h .

Каждая итерация реализуется следующим образом [2]. Исходными данными являются значения T_{jk} , I_{jk}^1 , I_{jk}^2 , полученные на предыдущей итерации (для первого приближения — исходные значения).

Изменение значения $T_{jk}(x_j, y_k)$ в одном внутреннем узле сетки вызывает изменения функционала только в шести слагаемых, входящих в сумму (7). Сумму этих слагаемых обозначим выражением

$$\Phi = I_{jk}^1 + I_{j-1,k}^2 + I_{j-1,k}^1 + I_{j-1,k-1}^2 + I_{j,k-1}^1 + I_{j,k-1}^2. \quad (16)$$

При замене T_{jk} на $T_{jk} + h$ или $T_{jk} - h$ имеем суммы Φ^+ и Φ^- соответственно. Если при замене, например, T_{jk} на $T_{jk} + h$ значение функционала I окажется меньше соответствующего значения, полученного на предыдущей итерации, т.е. $\Phi^+ < \Phi$, то вместо T_{jk} принимаем новое значение $T_{jk} + h$. В противном случае заменяем T_{jk} на $T_{jk} - h$ и сравниваем Φ и Φ^- . В случае, если обе замены не уменьшают значения суммы (7), в памяти ЭВМ сохраняем значение T_{jk} , полученное на предыдущей итерации. После обхода всех узлов сетки переходим к следующей итерации, которую выполняем аналогичным образом. Шаг варьирования уменьшаем, если на очередной итерации температура во всех узлах осталась неизменной. Процесс варьирования температуры на данной сетке завершаем при выполнении условия

$$h < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (17)$$

где ε — заданное положительное достаточно малое число.

Затем варьируем температуру на более мелкой сетке, увеличив m, n (например, вдвое), т.е. уменьшив $\Delta x, \Delta y$. В качестве исходных данных принимаем значения, полученные из решения на предыдущей сетке, причем значения для новых узлов более мелкой сетки получаем путем интерполяции. Варьирование реализуется аналогично рассмотренному выше.

Результаты расчета распределения температуры по описанному алгоритму представлены на рис. 2. Решение получено с

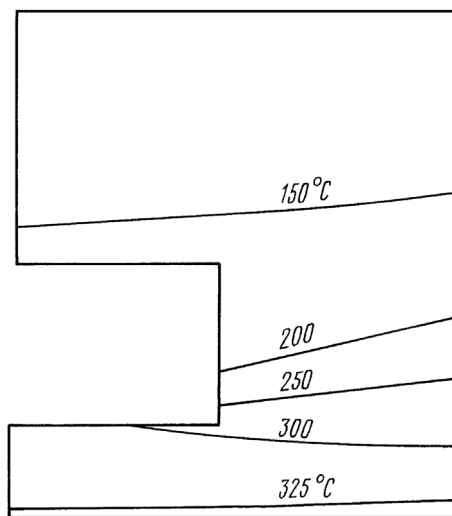


Рис. 2. Результаты расчета распределения температуры по описанному алгоритму

помощью программы, написанной на языке Паскаль. Все точки, имеющие температуру 100 °С, находятся в охлаждающем тракте. Точки на поверхности внутренней стенки, омываемой газом, имеют среднюю температуру 323 °С.

Расчет проводился при следующих исходных данных:

Толщина внутренней стенки	$h' = 1$ мм
Толщина наружной стенки	$h'' = 3$ мм
Высота ребер	$l = 2$ мм
Толщина ребер	$a = 1$ мм
Расстояние между ребрами	$b = 1$ мм
Температура газа	$T_{\Gamma} = 3700$ °С
Температура жидкости	$T_{\text{ж}} = 100$ °С
Коэффициенты теплообмена оболочки	
с газом	$\alpha_{\Gamma} = 2947,5$ Вт/м ² ·град
с жидкостью	$\alpha_{\text{ж}} = 24130$ Вт/м ² ·град
Коэффициенты теплопроводности	
для внутренней стенки	$\lambda' = 2904$ Вт/м·град
для наружной стенки	$\lambda'' = 14,5$ Вт/м·град

Наименьший шаг варьирования составил $h = 10^{-3}$ град на сетке с шагом $\Delta x = 0,125$ мм по оси x и $\Delta y = 0,0625$ мм по оси y .

Полученные результаты сравним с данными расчета температуры в предположении термически тонких ребер [3]. Сначала определим коэффициент эффективности оребрения

$$K = \frac{b}{b+a} + \frac{2l}{b+a} \frac{ch\zeta}{\zeta} = 2,156,$$

где

$$\zeta = \sqrt{\frac{2\alpha_{\text{ж}}}{\lambda'a}} l,$$

c — некоторая константа.

Тогда плотность теплового потока составит

$$q = \frac{T_{\Gamma} - T_{\text{ж}}}{\frac{1}{\alpha_{\Gamma}} + \frac{h'}{\lambda'} + \frac{1}{K\alpha_{\text{ж}}}} = 10,1 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2,$$

а средние температуры на поверхности стенок, омываемых жидкостью и газом, составят 294 и 328 °С соответственно. Разница между этими значениями температур и соответствующими значениями, полученными методом локальных вариаций, составляет 5 °С.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- З а р у б и н В. С. Прикладные задачи термочности элементов конструкции. – М.: Машиностроение, 1985. – 290 с.
- Ч е р н о у с ь к о Ф. Л., Б а н и ч у к Н. В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. – 237 с.

Статья поступила в редакцию 17.09.2003

Ле Шонг Тунг родился в 1965 г. во Вьетнаме, окончил в 1988 г. Казанское высшее инженерное училище. Аспирант кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области термомеханики.

Le Song Tung (b. 1965 in Viet-Nam) graduated from the Kazan Higher Engineering School in 1988. Post-graduate of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of Thermal Mechanics.

УДК 519.62

А. Н. Морозов

МЕТОД ОПИСАНИЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Предложен метод нахождения L -мерной характеристической функции случайного процесса, получаемого путем линейного интегрального преобразования из процесса с независимыми приращениями. Показано, что разработанный метод применим для описания немарковских процессов, в частности фликкер-шума.

Постановка задачи. Теория стохастических дифференциальных систем позволяет определять необходимые статистические характеристики случайного процесса $Z(t)$ в том случае, когда этот процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dZ = a(Z, t)dt + b(Z, t)dW(t), \quad (1)$$

где $W(t)$ — процесс с независимыми приращениями. Процесс $Z(t)$ в этом случае является марковским процессом, статистические характеристики которого можно определить путем решения дифференциального уравнения для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ [1].

Однако существуют процессы, которые невозможно описать с помощью дифференциального уравнения (1). В частности, если случайный процесс $Z(t)$ описывается с помощью линейного интегрального преобразования

$$Z(t) = \int_0^t G(t, \tau)dW(\tau), \quad (2)$$