3. Б а л а б у х Л. И., К о л е с н и к о в К. С., З а р у б и н В. С. Основы строительной механики ракет. – М.: Высшая школа, 1969. – 494 с.

Статья поступила в редакцию 17.09.2003

Ле Шонг Тунг родился в 1965 г. во Вьетнаме, окончил в 1988 г. Казанское высшее инженерное училище. Аспирант кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области термомеханики.

Le Song Tung (b. 1965 in Viet-Nam) graduated from the Kazan Higher Engineering School in 1988. Post-graduate of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of Thermal Mechanics.

УДК 519.62

А. Н. М о р о з о в

МЕТОД ОПИСАНИЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Предложен метод нахождения L-мерной характеристической функции случайного процесса, получаемого путем линейного интегрального преобразования из процесса с независимыми приращениями. Показано, что разработанный метод применим для описания немарковских процессов, в частности фликкер-шума.

Постановка задачи. Теория стохастических дифференциальных систем позволяет определять необходимые статистические характеристики случайного процесса $Z(t)$ в том случае, когда этот процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dZ = a(Z,t)dt + b(Z,t)dW(t), \tag{1}$$

где $W(t)$ — процесс с независимыми приращениями. Процесс $Z(t)$ в этом случае является марковским процессом, статистические характеристики которого можно определить путем решения дифференциального уравнения для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L)$ [1].

Однако существуют процессы, которые невозможно описать с помощью дифференциального уравнения (1). В частности, если случайный процесс $Z(t)$ описывается с помощью линейного интегрального преобразования

$$Z(t) = \int\limits_0^t G(t,\tau)dW(\tau), \tag{2}$$

где $G(t,\tau)$ — непрерывная функция переменной τ, то этот процесс может не являться марковским процессом. Здесь полагаем, что интеграл (2) представляет собой интеграл Ито [1–3]. Частный случай использования преобразования (2) для описания дробового эффекта исследован в работе [1].

Из выражения (2) следует, что начальное условие для процесса $Z(t)$ имеет вид

$$Z(t)\Big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

а, следовательно, его одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda;t)$ имеет начальное условие [1]

$$g_1(\lambda;t)\Big|_{t=0} = 1. \tag{4}$$

Если интегральное преобразование (2) имеет ядро $G(t,\tau)$, допускающее сведение уравнения (2) к конечномерной системе уравнений типа (1), то задача нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$ может быть решена стандартными методами теории стохастических дифференциальных систем [1–4]. Однако в общем случае такое преобразование невозможно, поэтому необходима разработка методики нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (2).

Целью настоящей работы является построение метода нахождения L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого линейным интегральным преобразованием (2).

Случай сведения к дифференциальному уравнению. Если ядро интегрального преобразования (2) имеет вид

$$G(t,\tau) = \exp(-\alpha(t-\tau)), \tag{5}$$

то уравнение (2) позволяет получить уравнение Ито

$$dZ = -\alpha Z dt + dW(t) \tag{6}$$

с начальным условием (3).

В случае, если одномерная характеристическая функция процесса с независимыми приращениями $W(t)$ имеет вид $h_1(\lambda;t)$, то уравнение для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (6), можно представить в виде [1]

$$\frac{\partial g_L}{\partial t} = -\alpha\lambda\frac{\partial g_L}{\partial \lambda_L} + \chi(\lambda_L;t_L)g_L, \tag{7}$$

где

$$\chi(\lambda_L; t_L) = \frac{\partial}{\partial t_L} \ln h_1(\lambda_L; t_L), \qquad L = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Начальное условие для уравнения (7) имеет вид

$$g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; \quad t_1, \ldots, t_{L-1}, t_L)\Big|_{t_L = t_{L-1}} = \\ = g_{L-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{L-2}, \lambda_{L-1} + \lambda_L; \quad t_1, \ldots, t_{L-1}) . \tag{9}$$

Решение уравнения (7) с учетом начального условия (4) позволяет получить выражение для L-мерной характеристической функции:

$$g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \\ = \exp\left(\sum_{l=1}^{L} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \chi\left(\sum_{k=l}^{L} \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)); \tau \right) d\tau \right). \tag{10}$$

Если процесс $W(t)$ является винеровским процессом с интенсивностью ν и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1(\lambda; t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \nu \lambda^2 t \right), \tag{11}$$

то в соответствии с формулами (8) и (10) имеем

$$g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \\ = \exp\left(-\frac{\nu}{2\alpha} \sum_{l,k=1}^{L} (\lambda_l \lambda_k (\exp(-\alpha |t_l - t_k|) - \exp(-\alpha(t_l + t_k)))) \right). \tag{12}$$

Для случая, когда процесс $W(t)$ представляет собой пуассоновский процесс с интенсивностью потока скачков ν и характеристической функцией скачков $g(\lambda)$, с учетом его одномерной характеристической функции

$$h_1(\lambda; t) = \exp((g(\lambda) - 1)\nu t) \tag{13}$$

имеем

$$g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \\ = \exp\left(\nu \sum_{l=1}^{L} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g\left(\sum_{k=l}^{L} \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)) \right) - 1 \right) d\tau \right). \tag{14}$$

Отметим, что процессы, описываемые L-мерными характеристическими функциями (12) и (14), являются марковскими случайными процессами и удовлетворяют условию (9).

Построение одномерной характеристической функции. Будем полагать, что преобразование (2) представляет собой интеграл Ито [1–3]. Разобьем интервал $(0, t)$ на N равных интервалов продолжительностью $\Delta t = t/N$. Моменты времени t_n, соответствующие окончаниям интервалов, удовлетворяют условию $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t$. Тогда интеграл Ито в уравнении (2) можно заменить средним квадратическим пределом

$$Z(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} G(t, t_n)\, \Delta W(t_n), \tag{15}$$

где $\Delta W(t_n) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ — независимые приращения процесса $W(t_n)$.

Одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ процесса $Z(t)$ выражается формулой

$$g_1(\lambda; t) = \langle \exp(i\lambda Z(t)) \rangle, \tag{16}$$

где операция $\langle\cdot\rangle$ представляет собой нахождение математического ожидания. Подставляя выражение (15) в формулу (16), получим

$$\begin{aligned} g_1(\lambda; t) &= \left\langle \exp\left(i\lambda \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} G(t, t_n)\, \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \exp(i\lambda G(t, t_n)\, \Delta W(t_n)) \right\rangle. \end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку приращения $\Delta W(t_n)$ являются независимыми, то последнее выражение в формуле (17) приобретает вид

$$g_1(\lambda; t) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, \Delta W(t_n)) \rangle. \tag{18}$$

Логарифмируя выражение (18), получим

$$\ln g_1(\lambda; t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \ln h(\lambda; t; t_n), \tag{19}$$

где
$$h(\lambda; t; t_n) = \langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\,\Delta W(t_n))\rangle. \tag{20}$$

Учитывая то, что для процесса с независимыми приращениями характеристическую функцию приращений можно представить через его одномерную характеристическую функцию, имеем
$$h(\lambda; t; t_n) = \langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\,\Delta W(t_n))\rangle = \frac{\langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, W(t_{n+1}))\rangle}{\langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, W(t_n))\rangle}. \tag{21}$$

Тогда
$$\ln h(\lambda; t; t_n) = \\ = \ln\langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, W(t_{n+1}))\rangle - \ln\langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, W(t_n))\rangle. \tag{22}$$

Подставив выражение (22) в формулу (19), получим
$$\ln g_1(\lambda; t) = \\ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\ln\langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, W(t_{n+1}))\rangle - \ln\langle \exp(i\lambda G(t, t_n)\, W(t_n))\rangle}{\Delta t}\Delta t. \tag{23}$$

После замены в формуле (23) суммирования интегралом Ито и последующего потенцирования полученного выражения имеем
$$g_1(\lambda; t) = \exp\left(\int\limits_0^t \chi(\lambda G(t, \tau)\,; \tau)\, d\tau\right), \tag{24}$$

где
$$\chi(\lambda G(t, \tau)\,; \tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\ln h_1(\lambda G(t, \tau)\,; \tau), \tag{25}$$
$$h_1(\lambda G(t, \tau)\,; \tau) = \langle \exp(i\lambda G(t, \tau)\, W(\tau))\rangle. \tag{26}$$

Для случая, когда процесс $W(t)$ является винеровским (см. формулу (11)), имеем
$$g_1(\lambda; t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\nu\lambda^2\int\limits_0^t G^2(t, \tau)\, d\tau\right), \tag{27}$$

а для случая, когда он является пуассоновским (см. формулу (13)) —
$$g_1(\lambda; t) = \exp\left(\nu\int\limits_0^t (g(\lambda G(t, \tau)) - 1)\, d\tau\right). \tag{28}$$

Общий случай построения L-мерной характеристической функции. Для нахождения L-мерной характеристической функции получим интегральное преобразование (2) для произвольных моментов времени t_l, причем для определенности будем полагать, что $t_{l+1} > t_l$:

$$Z(t_l) = \int\limits_0^{t_l} G(t_l, \tau)\, dW(\tau), \tag{29}$$

где $l = 1, 2, \ldots, L$. Учитывая то, что выражение (29) представляет собой интеграл Ито, заменим его средним квадратическим пределом:

$$Z(t_l) = \lim_{N_l \to \infty} \sum_{n=0}^{N_l - 1} G(t_l, t_n)\, \Delta W(t_n); \tag{30}$$

здесь N_l — число разбиений интервала (0, t_l).

По определению L-мерная характеристическая функция $g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L)$ выражается формулой

$$g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{L} \lambda_l Z(t_l) \right) \right\rangle. \tag{31}$$

Подставив выражение (30) в формулу (31), получим

$$\begin{aligned} &g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \\ &= \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \lim_{N_l \to \infty} \sum_{n=0}^{N_l - 1} G(t_l, t_n)\, \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \exp\left(i \lim_{N_L \to \infty} \sum_{n=0}^{N_L - 1} \left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{32}$$

При получении выражения (32) введено условие

$$G(t_l, t_n)\Big|_{t_n > t_l} = 0. \tag{33}$$

Выполнив преобразования, аналогичные преобразованиям (17) и (18), получим

$$\begin{aligned} &g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \\ &= \left\langle \lim_{N_L \to \infty} \prod_{n=0}^{N_L - 1} \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \lim_{N_L \to \infty} \prod_{n=0}^{N_L - 1} \left\langle \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{34}$$

После логарифмирования выражения (34) имеем

$$\ln g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L) = \lim_{N_L\to\infty}\sum_{n=0}^{N_L-1}\ln h(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L;t_n), \tag{35}$$

где

$$h(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L;t_n) = \left\langle \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,t_n)\right)\Delta W(t_n)\right)\right\rangle. \tag{36}$$

Далее, выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям (21)–(26), получим

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L) = \exp\left(\int_0^{t_L}\chi\left(\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right);\tau\right)d\tau\right), \tag{37}$$

где

$$\chi\left(\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right);\tau\right) = \frac{\partial}{\partial\tau}\ln h_1\left(\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right);\tau\right), \tag{38}$$

$$h_1\left(\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right);\tau\right) = \left\langle \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right)W(\tau)\right)\right\rangle. \tag{39}$$

При нахождении интеграла в выражении (37) необходимо учитывать условие (33):

$$G(t_l,\tau)\Big|_{\tau>t_l} = 0. \tag{40}$$

Формулы (24)–(26) являются частными случаями выражений (37)–(39) при $L = 1$.

В том случае, если процесс $W(t)$ является винеровским, имеем

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L) = \\ = \exp\left(-\frac{1}{2}\nu\sum_{l,k=1}^{L}\lambda_l\lambda_k\int_0^{\min(t_l,t_k)}G(t_l,\tau)\,G(t_k,\tau)\,d\tau\right), \tag{41}$$

а если он является пуассоновским —

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L) = \exp\left(\nu\int_0^{t}\left(g\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right)-1\right)d\tau\right). \tag{42}$$

Для случая, когда ядро преобразования (2) имеет вид (5), формулы (37), (41) и (42) совпадают соответственно с выражениями (10), (12) и (14), полученными с помощью теории стохастических дифференциальных систем. В общем случае, когда интегральное преобразование (2) не сводится к конечномерной системе дифференциальных уравнений, формулы (37), (41) и (42) описывают немарковский случайный процесс. Отметим, что условие (9) в общем случае для выражения (42) не выполняется.

Пример немарковского процесса, описывающего фликкер-шум. Рассмотрим случай, когда ядро преобразования (2) имеет вид

$$G(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}, \tag{43}$$

а процесс $W(t)$ является винеровским. Тогда на основании формулы (27) при переходе от расходящегося интеграла к аппроксимирующей его конечной величине для одномерной характеристической функции имеем

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\nu\lambda^2 \ln\frac{t}{\delta t}\right), \tag{44}$$

где $\delta t > 0$ — малая величина. Для L-мерной характеристической функции применение формулы (42) позволяет получить

$$\begin{aligned} g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L) = \\ = \exp\Biggl(-\frac{1}{2}\nu\Biggl(\sum_{l=1}^{L}\left(\lambda_l^2 \ln\frac{t}{\delta t}\right) + \\ + 4\sum_{\substack{l,k=1\\ l>k}}^{L}\left(\lambda_l\lambda_k \ln\frac{\sqrt{t_l}+\sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}}\right)\Biggr)\Biggr). \end{aligned} \tag{45}$$

С помощью формулы (44) и (45) определим математическое ожидание и момент второго порядка случайного процесса $Z(t)$:

$$\langle Z(t)\rangle = \left.\frac{\partial g_1}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0, \tag{46}$$

$$\langle Z(t_1)\, Z(t_2)\rangle = \left.\frac{\partial^2 g_2}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1,\lambda_2=0} = 2\nu\ln\left(\frac{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2 - t_1 + \delta t} + \sqrt{\delta t}}\right); \tag{47}$$

здесь $t_2 > t_1$. При $t_2 = t_1 = t$ формула (47) приобретает вид

$$\left\langle Z^2(t)\right\rangle = \nu \ln\left(\frac{t}{\delta t}\right). \tag{48}$$

Момент второго порядка (47) позволяет определить одностороннюю спектральную плотность случайного процесса $Z(t)$:

$$\begin{gathered} G(\omega) = \lim_{\delta t\to 0}\left(4\int\limits_0^{t-\delta t} \langle Z(t-\tau)\,Z(t)\rangle \cos\omega\tau d\tau\right) = \\ = \lim_{\delta t\to 0}\left(8\nu\int\limits_0^{t-\delta t} \ln\left(\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\tau+\delta t}+\sqrt{\delta t}}\right)\cos\omega\tau d\tau\right). \end{gathered} \tag{49}$$

Путем интегрирования выражения (49) получим [5, раздел 2.5.7]

$$G(\omega) = (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(t^{\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)}\left({}_1F_1\left(\varepsilon; -\varepsilon+\frac{1}{2}; i\omega t\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -{}_1F_1\left(\varepsilon; \varepsilon+\frac{1}{2}; -i\omega t\right)\right)\right), \tag{50}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма функция, ${}_1F_1(a;b;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В случае $\omega t >> 1$ вырожденные гипергеометрические функции в выражении (50) могут быть разложены в ряд по степеням выражения $1/\sqrt{\omega t}$. Тогда при сохранении только первого члена разложения имеем [6, формула (18) на стр. 220]

$$G(\omega)\Big|_{t\to\infty} = (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(t^{\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left((-i\omega t)^{-\varepsilon} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -(i\omega t)^{-\varepsilon}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega t}}\right)\right)\right)\right) = (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}(t^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\varepsilon(\ln(-i\omega t) -$$

$$- \ln(i\omega t))) = (-i)\,\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(t^{\varepsilon}(\varepsilon+1)\Big((-i)\,\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{2\pi\nu}{\omega}. \qquad (51)$$

Таким образом, случайный процесс, описываемый L-мерной характеристической функцией (45), имеет спектральную плотность

$$G(\omega)\Big|_{t\to\infty} = \frac{2\pi\nu}{\omega}, \qquad (52)$$

которая возрастает обратно пропорционально частоте. Таким образом, рассмотренный процесс является фликкер-шумом [7].

Полученная L-мерная характеристическая функция (45) может применяться для описания броуновского движения, так как для флуктуаций коэффициента диффузии броуновской частицы применима модель фликкер-шума [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П у г а ч е в В. С., С и н и ц ы н И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
2. Г а р д и н е р К. В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
3. Х о р с т х е м к е В., Л е ф е в р Р. Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1987. – 400 с.
4. М о р о з о в А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 332 с.
5. П р у д н и к о в А. П., Б р ы ч к о в Ю. А., М а р и ч е в О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
6. Н и к и ф о р о в А. Ф., У в а р о в В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
7. Б о ч к о в Г. Н., К у з о в л е в Ю. Е. Новое в исследованиях $1/f$-шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141. – Вып. 1. – С. 151–176.

Статья поступила в редакцию 10.11.2003

Андрей Николаевич Морозов родился в 1959 г., окончил в 1981 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

A.N. Morozov (b. 1959) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1981. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of high precision measuring and physical kinetics.