УДК 517.958

В. Я. Томашпольский

ОБОБЩЕННО-УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИТА

Рассмотрены локализованные волны в модели упругого композита, находящегося в предварительно деформированном состоянии. Показано, что в отличие от случая композита без предварительных деформаций, в рассматриваемом случае классические уединенные волны (солитоны) — решения, ответвляющиеся от нулевого решения (состояния покоя), замещаются обобщенно-уединенными волнами, которые являются продуктом нелинейного резонанса солитона и периодической волны конечного периода. Показано также, что наличие обобщенно-уединенных волн приводит к дисперсионному распаду локализованных возмущений за счет излучения резонансной волны.

В последнее время в теории упругости и ее приложениях сохраняется устойчивый интерес к так называемым композиционным материалам [1]. Для изучения крупномасштабных процессов (с масштабом, сильно превосходящим размер неоднородностей в таких материалах) используется метод осреднений основных уравнений модели [2, 3]. При этом свойства композита, описываемого осредненными уравнениями, обнаруживают существенные различия со свойствами составляющих материал компонентов. В частности, типичным является случай возникновения дисперсии в композите, при том, что в каждом из упругих материалов, составляющих композит, дисперсии нет. Таким образом, композит, состоящий из упругих материалов с нелинейным уравнением состояния, представляет собой диспергирующую среду, в которой могут распространяться волны, являющиеся результатом взаимодействия нелинейных и дисперсионных эффектов, в том числе солитоны — классические уединенные волны.

В настоящей работе рассматривается модель композита, предложенная в работе [4]. В этой модели существует два семейства собственных линейных мод, каждое из которых отвечает одной из ветвей дисперсионного уравнения для линейных волн. В работе [5] эти семейства названы быстрым и медленным в соответствии с фазовыми скоростями бесконечно длинных волн, характеризующих каждую ветвь дисперсионного соотношения: для быстрого семейства эта скорость больше, чем для медленного. Возникает линейный резонанс длинной быстрой волны и моды медленного семейства с ненулевым волновым числом, что позволяет предположить отсутствие классических уединенных волн — решений, ответвляющихся от нулевого решения, в быстром семействе. При отсутствии предварительных деформаций в композите этот резонанс, однако, на нелинейном уровне не сохраняется, и рассматриваемая модель допускает существование классических уединенных волн, соответствующих как медленному, так и быстрому семейству.

В настоящей работе показано существование семейств уединенных волн — решений, ответвляющихся от нулевого решения (состояния покоя) системы. При этом, в отличие от случая отсутствия предварительных деформаций, в быстром семействе возникают обобщенно-уединенные волны, которые являются продуктом нелинейного резонанса классической уединенной волны и собственной моды, отвечающей резонансному волновому числу.

Постановка задачи. Рассмотрим плоские волны в слабо анизотропной, слабо неоднородной, не ограниченной во всех направлениях упругой среде с постоянной плотностью ρ_0. С этой средой связана декартова лагранжева система координат x_k, $k = 1, 2, 3$. В результате деформации точка с координатами x_k подвергается смещению: $x'_k = x_k + w_k(x_j, t)$, $k, j = 1, 2, 3$. Распространение плоской волны характеризуется зависимостью градиентов перемещений $u_{ij} = \partial w_i / \partial x_i$ и компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = (1/2)(u_{ij} + u_{ji} + u_{ij} u_{ji})$ только от одной пространственной переменной — координаты $x = x_3$, $-\infty < x < +\infty$, и от времени t. Деформации ε_{11}, ε_{12} и ε_{22} могут быть ненулевыми постоянными, при этом поворотом системы координат в плоскости волны можно получить равенство $\varepsilon_{12} = 0$. Кроме того, будем полагать, что $\varepsilon_{33} << \varepsilon_{3j}$, $j \neq 3$, т.е. рассмотрим квазипоперечные волны, для которых существенно изменение только сдвиговых деформаций ε_{13}, ε_{23} и градиентов перемещений u_{13}, u_{23}.

Упругий потенциал среды задается своим разложением по градиентам перемещений. Ограничимся в этом разложении главными членами [6]:

$$\Phi = \frac{1}{2} f \big(u_{13}^2 + u_{23}^2\big) + \frac{1}{2} g \big(u_{23}^2 - u_{13}^2\big) - \frac{1}{4} \kappa \big(u_{13}^2 + u_{23}^2\big)^2 ; \qquad (1)$$

здесь константа f определяется через упругие модули среды и постоянные деформации ε_{11} и ε_{22} в плоскости фронта волны; $g > 0$ — коэффициент анизотропии, вызванной наличием предварительных деформаций ε_{11} и ε_{22}; коэффициент κ выражается через упругие модули среды [6].

Уравнения для величин u_{13} и u_{23}, определяемые упругим потенциалом Φ, являются гиперболическими:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{i3}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{i3}}\right), \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Возникновение дисперсионных членов в этих уравнениях возможно при переходе к описанию упругой среды с учетом неоднородностей [3]. В настоящей работе в качестве таких неоднородностей будем рассматривать включенные в упругую матрицу упругие стержни, параллельные оси x и однородно распределенные в среде. В этом случае уравнения (2) модифицируются за счет слагаемых, отвечающих изгибной энергии стержней:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{i3}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{i3}}\right) - m\frac{\partial^4 u_{i3}}{\partial x^4}, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $m > 0$ — постоянная, определяемая жесткостью стержня на изгиб.

В настоящей работе рассмотрим случай предварительно деформированного композита: при $x \to \pm\infty$ имеем $u_{i3} \to u_{0i}$, $i = 1, 2$, где константы u_{01} и u_{02} характеризуют предварительную деформацию u_{13} и u_{23} соответственно.

После подстановки в уравнения (3) $u_i + u_{0i}$ вместо u_{i3}, где u_i — возмущение u_{i3} на фоне u_{0i}, $i = 1, 2$, введения автомодельной переменной $\xi = x - Vt$, где V — постоянная скорость распространения волны, и однократного интегрирования с использованием условий убывания на бесконечности получим

$$\begin{aligned} \frac{m}{\rho_0}\ddot{u}_i = &\left(\left(\mu_i - \frac{3\kappa}{\rho_0}u_i^2 - \frac{\kappa}{\rho_0}u_{0j}^2 - V^2\right)u_i - \frac{\kappa}{\rho_0}u_i^3 - \frac{3\kappa}{\rho_0}u_{0i}u_i^2 - \frac{\kappa}{\rho_0}u_i u_j^2 - \right. \\ &\left. - \frac{2\kappa}{\rho_0}u_{0j}u_i u_j - \frac{\kappa}{\rho_0}u_{0i}u_j^2 - \frac{2\kappa}{\rho_0}u_{0i}u_{0j}u_j\right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $\mu_1 = (f - g)/\rho_0$; $\mu_2 = (f + g)/\rho_0$; точкой обозначается дифференцирование по ξ.

При отсутствии предварительной деформации (т.е. при $u_{0i} = 0$) эти сравнения имеют солитонные решения [5].

Линейные резонансы. Для дальнейшего анализа приведем некоторые свойства дисперсионного соотношения системы (3).

Дисперсионное соотношение, получаемое в результате подстановки в уравнения (3) выражений $u_1 = A_1 \exp(i(kx - \omega t))$ и $u_2 = A_2 \exp(i(kx - \omega t))$, имеет вид

$$\left(\omega^2 - \frac{m}{\rho_0}k^4 - \nu_- k^2\right)\left(\omega^2 - \frac{m}{\rho_0}k^4 - \nu_+ k^2\right) = 0, \tag{5}$$

где

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{2}\biggl(\mu_1 + \mu_2 - \frac{4\kappa}{\rho_0}(u_{01}^2 + u_{02}^2) \pm$$

$$\pm\sqrt{\biggl(\mu_1 + \mu_2 - \frac{2\kappa}{\rho_0}(u_{01}^2 + u_{02}^2)\biggr)^2 - 4\mu_1\mu_2 + \frac{8\kappa}{\rho_0}(\mu_1 u_{02}^2 + \mu_2 u_{01}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_0}\biggl(f - 2\kappa(u_{01}^2 + u_{02}^2) \pm \sqrt{\kappa^2(u_{01}^2 + u_{02}^2)^2 - 2\kappa g(u_{02}^2 - u_{01}^2) + g^2}\biggr) \quad (6)$$

(заметим, что подкоренное выражение неотрицательно при любых значениях u_{01}, u_{02}).

При наличии изотропии (при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $g = 0$) получим

$$\nu_- = \mu - \frac{3\kappa}{\rho_0}\bigl(u_{01}^2 + u_{02}^2\bigr), \qquad \nu_+ = \mu - \frac{\kappa}{\rho_0}\bigl(u_{01}^2 + u_{02}^2\bigr).$$

Дисперсионное соотношение имеет две ветви: $\omega_{1,2} = k\sqrt{\nu_{\pm} + m\rho_0^{-1}k^2}$. Из выражений (6) следует, что величины ν_- и ν_+ при различных значениях u_{01}, u_{02} могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Легко видеть, что $\nu_- \geqslant 0$, если значения u_{01}, u_{02} удовлетворяют неравенствам

$$u_{01}^2 + u_{02}^2 \leqslant \frac{f}{2\kappa}, \qquad u_{02}^2 - u_{01}^2 > \frac{f^2 + 3g^2}{6\kappa g};$$

если второе неравенство не выполнено, то требуется выполнение неравенства

$$u_{01}^2 + u_{02}^2 \leqslant \frac{2f - \sqrt{f^2 + 3g^2 - 6g(u_{02}^2 - u_{01}^2)}}{3\kappa}.$$

Будем рассматривать только случай $\nu_- > 0$.

Из соотношения (5) видно, что кривые дисперсионного соотношения симметричны по отношению к осям ω и k, поэтому достаточно рассмотреть случай $\omega \geqslant 0$, $k \geqslant 0$.

Взаимное расположение быстрой (для ν_+) и медленной (для ν_-) ветвей дисперсионного соотношения показано на рис. 1.

В настоящей работе будем рассматривать волны, движущиеся со скоростями, близкими к $\sqrt{\nu_{\pm}}$. Положим $V^2 = \nu_{\pm} - \nu_{\pm}\nu$, где $\nu > 0$ — малый безразмерный параметр.

Из рис. 1 видно, что при фиксированном значении фазовой скорости V прямая $\omega = kV$ на положительной полуоси k имеет не более двух точек пересечения с обеими ветвями. В случае $V^2 = \nu_- - \nu_-\nu$, где $\nu > 0$, прямая $\omega = kV$ не пересекает ветвей при $k > 0$; следовательно, решением системы будет простая уединенная волна. В случае $V^2 = \nu_+ - \nu_+\nu,\ \nu > 0$, прямая $\omega = kV$ при $k > 0$ пересекает медленную ветвь; следовательно, имеет место резонанс длинной медленной и короткой быстрой волн.

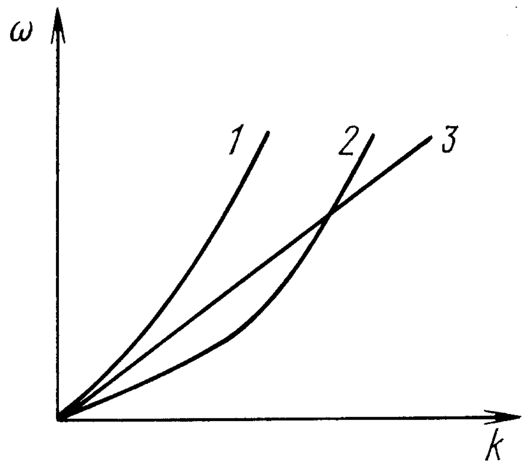

Рис. 1. Взаимное расположение ветвей дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$**:**
1 — быстрая ветвь, *2* — медленная ветвь, *3* — $\omega = kV$

Бегущие волны описываются динамической системой, эквивалентной уравнениям (4):

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_3,\\
\dot{u}_2 &= u_4,\\
\dot{u}_3 &= \alpha_1(\nu_\pm)\,u_1 - \beta u_2 + F_1,\\
\dot{u}_4 &= \alpha_2(\nu_\pm)\,u_2 - \beta u_1 + F_2,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\beta = 2\kappa m^{-1}u_{01}u_{02}$; $\alpha_i(V^2)$, $i = 1, 2$, — функции, зависящие от скорости распространения волн:

$$\alpha_i(V^2) = \frac{\rho_0}{m}\left(\mu_i - \frac{3\kappa}{\rho_0}u_{0i}^2 - \frac{\kappa}{\rho_0}u_{0j}^2 - V^2\right), \qquad i, j = 1, 2, \qquad i \neq j;$$

нелинейные функции F_i, $i = 1, 2$, имеют вид

$$F_i = \frac{\nu\nu_\pm\rho_0}{m}u_i - \frac{\kappa}{m}u_i^3 - \frac{3\kappa}{m}u_{0i}u_i^2 - \frac{\kappa}{m}u_iu_j^2 - \frac{2\kappa}{m}u_{0j}u_iu_j - \frac{\kappa}{m}u_{0i}u_j^2.$$

Представим систему (7) в матричном виде:

$$\frac{dw}{d\xi} = A(\nu_\pm)w + F(\nu, w),$$

где $w = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)^{\text{т}}$, $(0,\ 0,\ F_1,\ F_2)^{\text{т}}$,

$$A(V^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \alpha_1(V^2) & -\beta & 0 & 0\\ -\beta & \alpha_2(V^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

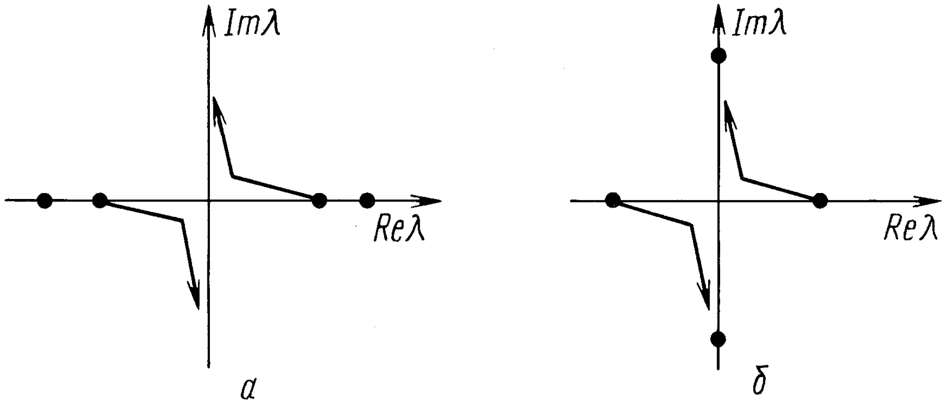

Рис. 2. Изменение собственных значений матрицы $A(V^2)$ в комплексной плоскости спектрального параметра λ при прохождении ν через нуль:
а — для $V^2 = \nu_- - \nu_-\nu$, *б* — для $V^2 = \nu_+ - \nu_+\nu$

Характеристическое уравнение $|A(V^2) - \lambda I| = 0$ имеет следующий вид:

$$\lambda^4 - \lambda^2\big(\alpha_1\big(V^2\big) + \alpha_2\big(V^2\big)\big) + \alpha_1\big(V^2\big)\,\alpha_2\big(V^2\big) - \beta^2 = 0. \qquad (8)$$

Это же уравнение можно получить из дисперсионного соотношения заменой $\lambda = ik$, $V = \omega/k$. Из соотношения (5) следует, что характеристическое уравнение (8) принимает вид

$$\left(\lambda^2 - \frac{\rho_0}{m}\big(\nu_+ - V^2\big)\right)\left(\lambda^2 - \frac{\rho_0}{m}\big(\nu_- - V^2\big)\right) = 0. \qquad (9)$$

Расположение собственных значений в комплексной плоскости спектрального параметра λ при прохождении ν через нуль изображено на рис. 2.

При $V^2 = \nu_\pm$ на мнимой оси лежат следующие корни характеристического уравнения (9): при $V^2 = \nu_-$ — нуль второго порядка; при $V^2 = \nu_+$ — нуль второго порядка и два ненулевых значения $\lambda = \pm iq$, где

$$q = \sqrt{\rho_0 m^{-1}(\nu_+ - \nu_-)}.$$

Солитонные решения. При $V^2 = \nu_- - \nu$ имеем простую бифуркацию, для которой на рис. 2, *а* представлено изменение собственных значений матрицы $A(V^2)$ (корней уравнения (9)), перемещающихся с действительной оси на мнимую при прохождении ν через нуль. Положим $w = w_0 + w_1$, где $w_0 \in E_0$, $w_1 \in E_1$, E_0 и E_1 — соответственно центральное и гиперболическое подпространства фазового пространства (7). Согласно теореме о центральном многообразии [7], для достаточно малых ν и w_0 имеем

$$w_1 = \Psi(\nu, w_0),$$

где

$$\Psi(\nu, w_0) = O\big(\nu|w_0|, |w_0|^2\big).$$

Представим далее w_0 в виде

$$w_0 = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1, \tag{10}$$

где φ_0 и φ_1 — собственный и присоединенный векторы матрицы $A(\nu_-)$, $A(\nu_-)\varphi_0 = 0$, $A(\nu_-)\varphi_1 = \varphi_0$,

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha_1(\nu_-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \alpha_1(\nu_-) \end{pmatrix}.$$

Для достаточно малых ν и $a = \{a_0, a_1\}^{\text{т}}$, таким образом, динамическая система четвертого порядка (7) сводится к системе второго порядка, которая в переменных a_0 и a_1 имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{a}_0 = a_1, \\ &\dot{a}_1 = \frac{\nu\nu_-\rho_0}{m}a_0 - \frac{3\kappa}{m}(u_{01}\beta + u_{02}\alpha_1(\nu_-))\, a_0^2 + \bar{o}\big(\nu a_0 + a_0^2\big) + O(a_1^2). \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) получена скалярным умножением системы (7) на присоединенный ψ_0 и собственный ψ_1 векторы матрицы $A(\nu_-)^{\text{т}}$: $A(\nu_-)^{\text{т}}\psi_1 = 0$, $A(\nu_-)^{\text{т}}\psi_0 = \psi_1$. Эти векторы задаются соотношениями

$$\psi_0 = \frac{1}{\alpha_1(\nu_-)^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha_1(\nu_-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_1 = \frac{1}{\alpha_1(\nu_-)^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \alpha_1(\nu_-) \end{pmatrix}.$$

Векторы ψ_i, $i = 0, 1$, нормированы так, что $\langle\varphi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1$; здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — обычное скалярное произведение в C^4. Проведем в системе (11) следующее масштабное преобразование:

$$a_0 = \frac{\nu\nu_-\rho_0}{2\kappa(u_{01}\beta + u_{02}\alpha_1(\nu_-))}b_0, \qquad \zeta = \sqrt{\frac{\nu\nu_-\rho_0}{m}}\xi.$$

Тогда уравнения системы (11) после исключения a_1 представим в виде

$$b_0'' = b_0 - \frac{3}{2}b_0^2 + O(\nu), \tag{12}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ζ. В главном приближении по ν для $\nu > 0$ уравнение (12) имеет решение

$$b_0 = \mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\zeta}{2}\right) + O(\nu)\,. \tag{13}$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{\nu\nu_-\rho_0}{2\kappa(u_{01}\beta + u_{02}\alpha_1(\nu_-))}\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu\nu_-\rho_0}{m}}\xi\right) + O\big(\nu^2\big), \quad a_1 = \dot{a}_0. \tag{14}$$

Более того, оказывается, что для малых ν решение (14) является точным для полной системы (11), оно четно и экспоненциально убывает на обеих бесконечностях.

Обозначим через $a^* = (a_0^*, a_1^*)^{\mathrm{т}}$ главную часть по ν в решении (14). Тогда для $\nu_0 > 0$ и достаточно малых $\nu \in (0, \nu_0]$ существует семейство солитонных решений $a = (a_0, a_1)^{\mathrm{т}}$ полной системы (11). Более того, верна следующая оценка:

$$|a - a^*| \leqslant c_0\nu^2 \exp\Big(-\sigma_0\sqrt{\nu\nu_-\rho_0 m^{-1}}|\xi|\Big), \tag{15}$$

где c_0 зависит только от ν_0 и некоторого $\sigma_0 < 1$.

Докажем это утверждение. Пусть $\tilde{\tilde{b}}_0$ — малое нелинейное возмущение решения $\tilde{b}_0 = \mathrm{ch}^{-2}(\zeta/2)$ в уравнении (12). Уравнение (12) может быть представлено в виде

$$M\tilde{\tilde{b}}_0 = \nu N(b_0, \nu), \tag{16}$$

где

$$M = \frac{d^2}{d\zeta^2} - 1 + 3\tilde{b}_0,$$

$N(b_0, \nu)$ — четная функция для четных b_0 (в соответствии со свойством обратимости исходных уравнений), $N(b_0, \nu) \leqslant c$, константа c не зависит от ν для $\nu \in (0, \nu_0)$.

В соответствии с теоремой о неявной функции уравнение (16) имеет единственное решение достаточно малой амплитуды, если оператор M является обратимым в подходящих функциональных пространствах.

Определим пространства экспоненциально убывающих функций C^j_σ, $j = 0, 1, 2$, $\sigma < 1$, следующим образом:

$$C^j_\sigma = \left\{ f \in C^j(R)\,, \quad \sup_\zeta \left| \exp(\sigma|\zeta|)\, f^{(m)}(\zeta) \right| < \infty, \quad m \leqslant j \right\}.$$

Введем обозначения $X \subset C^2_\sigma$ и $Y \subset C^0_\sigma$ для банаховых пространств четных функций с нормами соответственно $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$. Докажем, что уравнение

$$M\tilde{\tilde{b}}_0 = f, \tag{17}$$

где $\tilde{\tilde{b}}_0 \in X$ и $f \in Y$, имеет единственное решение. Уравнение (17) имеет вид

$$\tilde{\tilde{b}}{}_0'' - \tilde{\tilde{b}}_0 + 3\tilde{b}_0\tilde{\tilde{b}}_0 = f. \tag{18}$$

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (18), не имеет фундаментальной системы решений в функциональном пространстве X: решение $\gamma_1 = c_1\tilde{b}_0'$ является нечетным решением (константа c_1 определяется из условия $\gamma_1'(0) = 1$), а линейно независимое решение $\gamma_2 = c_2\gamma_1 + c_3\gamma_1 \int \gamma_1^{-2} d\zeta$ (константы c_2 и c_3 определяются из условий $\gamma_2(0) = 1$, $\gamma_2'(0) = 0$) является четным, однако возрастающим как $\exp(|\zeta|)$ на обеих бесконечностях. Отсутствие фундаментальной системы решений в X означает, что решение уравнения (18) единственно, если оно существует. Существование решения неоднородного уравнения (18) определяется по формуле

$$\gamma = \gamma_2 \int_\zeta^\infty \gamma_1 f\, d\zeta + \gamma_1 \int_0^\zeta \gamma_2 f\, d\zeta. \tag{19}$$

Оценки для $\|\gamma\|_X$ и $\|f\|_Y$, из которых непосредственно следует оценка (15), легко получаем из формулы (19).

Выражение для главной части солитонного решения в физических переменных находим по формуле (10):

$$u_1 = \beta a_0, \qquad u_2 = \alpha_1(\nu_-)\, a_0.$$

Обобщенно-уединенные волны. При $V^2 = \nu_+ - \nu_+\nu$ имеем бифуркацию, соответствующую резонансу длинной медленной и короткой быстрой волн, для которой на рис. 2, *б* представлено изменение собственных значений матрицы $A(V^2)$ (корней уравнения (9)), перемещающихся с действительной оси на мнимую при прохождении ν через нуль. Как уже было отмечено, в рассматриваемом случае все корни уравнения (9) мнимые: нуль второго порядка и $\pm iq$, где $q = \sqrt{\rho_0 m^{-1}(\nu_+ - \nu_-)}$. В системе (7) произведем замену переменных

$$w = a_0(\xi)\,\varphi_0 + a_1(\xi)\,\varphi_1 + a_+(\xi)\,\varphi_+ + a_-(\xi)\,\varphi_-, \tag{20}$$

где $a_- = \bar{a}_+$, $A\varphi_0 = 0$, $A\varphi_1 = \varphi_0$, $A\varphi_+ = iq\varphi_+$, $A\varphi_- = -iq\varphi_-$ (чертой обозначено комплексное сопряжение). Собственные и присоединенный векторы матрицы $A(\nu_+)$ задаются формулами

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha_1(\nu_+) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \alpha_1(\nu_+) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} \alpha_1(\nu_+) \\ -\beta \\ iq\alpha_1(\nu_+) \\ -iq\beta \end{pmatrix}, \quad \varphi_- = \bar{\varphi}_+.$$

Вектор-функция $\{a_0, a_1, a_+, a_-\}^{\text{т}}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + \langle F, \psi_0\rangle, \\ \dot{a}_1 &= \langle F, \psi_1\rangle, \\ \dot{a}_+ &= iqa_+ + \langle F, \psi_+\rangle, \\ \dot{a}_- &= -iqa_- + \langle F, \psi_-\rangle. \end{aligned} \tag{21}$$

Система (21) получена скалярным умножением системы (7) на собственные ψ_1, ψ_+, ψ_- и присоединенный ψ_0 векторы матрицы $A(\nu_+)^{\text{т}}$: $A(\nu_+)^{\text{т}}\,\psi_+ = -iq\psi_+$, $A(\nu_+)^{\text{т}}\,\psi_- = iq\psi_-$. Эти векторы задаются соотношениями

$$\psi_0 = \frac{1}{\alpha_1(\nu_+)^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha_1(\nu_+) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \frac{1}{\alpha_1(\nu_+)^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \alpha_1(\nu_+) \end{pmatrix},$$

$$\psi_+ = \frac{1}{2q\big(\alpha_1(\nu_+)^2 + \beta^2\big)}\begin{pmatrix} q\alpha_1(\nu_+) \\ -q\beta \\ i\alpha_1(\nu_+) \\ -i\beta \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \bar{\psi}_+.$$

Эти векторы нормированы так, что $\langle\varphi_i,\psi_j\rangle=\delta_{ij}, \langle\varphi_+,\psi_j\rangle=\langle\psi_+,\varphi_j\rangle=0$, $\langle\varphi_+,\psi_+\rangle=1,\ \ \langle\varphi_+,\psi_-\rangle=0,\ \ i,j=0{,}1,\ \ \delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Для упрощения преобразований представим вектор-функцию $F(a_0,a_1,a_+,a_-)$ в виде

$$F(a_0,a_1,a_+,a_-)=F_s(a_0,a_1)+F_z(a_0,a_1,a_+,a_-),$$

$$F_s=(0,0,F_{1s},F_{2s})^{\text{т}},$$

где

$$F_{1s}=\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}\beta a_0-\frac{\kappa}{m}\beta^3a_0^3-\frac{3\kappa}{m}u_{01}\beta^2a_0^2-\frac{\kappa}{m}\beta\alpha_1^2(\nu_+)\,a_0^2-$$
$$-\frac{2\kappa}{m}u_{02}\alpha_1(\nu_+)\,\beta a_0^2-\frac{\kappa}{m}u_{01}\alpha_1^2(\nu_+)\,a_0^2,$$
$$F_{2s}=\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}\alpha_1(\nu_+)\,a_0-\frac{\kappa}{m}\alpha_1^3(\nu_+)\,a_0^3-\frac{3\kappa}{m}u_{02}\alpha_1^2(\nu_+)\,a_0^2-$$
$$-\frac{\kappa}{m}\alpha_1(\nu_+)\,\beta^2a_0^2-\frac{2\kappa}{m}u_{01}\alpha_1(\nu_+)\,\beta a_0^2-\frac{\kappa}{m}u_{01}\beta^2a_0^2.$$

Вектор-функция $F_z(a_0,a_1,a_+,a_-)$ включает в себя все остальные слагаемые, содержащие $a_\pm$, причем $F_z(a_0,a_1,0,0)=0$. Тогда получим

$$\langle F,\psi_0\rangle=0,$$

$$\langle F,\psi_1\rangle=\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}a_0-\frac{3\kappa}{m}(u_{01}\beta+u_{02}\alpha_1(\nu_+))\,a_0^2-$$
$$-\frac{\kappa\big(\alpha_1(\nu_+)^2+\beta^2\big)}{m}a_0^3+\langle F_z,\psi_1\rangle,$$

$$\langle F,\psi_+\rangle=\frac{i\kappa a_0^2}{2qm}(\beta u_{02}-\alpha_1(\nu_+)\,u_{01})+\langle F_z,\psi_+\rangle,$$
$$\langle F,\psi_-\rangle=-\langle F,\psi_+\rangle.$$

Система (21), таким образом, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot a_0=a_1,\\
&\dot a_1=\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}a_0-\frac{3\kappa}{m}(u_{01}\beta+u_{02}\alpha_1(\nu_+))\,a_0^2-\\
&\qquad\qquad-\frac{\kappa\big(\alpha_1(\nu_+)^2+\beta^2\big)}{m}a_0^3+\langle F_z,\psi_1\rangle,\\
&\dot a_+=iqa_++\frac{i\kappa a_0^2}{2qm}(\beta u_{02}-\alpha_1(\nu_+)\,u_{01})+\langle F_z,\psi_+\rangle,\\
&\dot a_-=-iqa_--\frac{i\kappa a_0^2}{2qm}(\beta u_{02}-\alpha_1(\nu_+)\,u_{01})+\langle F_z,\psi_-\rangle.
\end{aligned}\tag{22}$$

Преимущество указанной замены координат состоит в декомпозиции неизвестной вектор-функции w на длинноволновую (a_0, a_1) и коротковолновую (a_+, a_-) компоненты. В связи с этим естественно произвести в системе (22) следующее масштабное преобразование:

$$a_0 = \frac{\nu\nu_+\rho_0}{2\kappa(u_{01}\beta + u_{02}\alpha_1(\nu_+))}b_0, \quad a_\pm = \nu^2\nu_+^2 b_\pm, \quad \zeta = \sqrt{\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}}\xi.$$

Тогда уравнения системы (22) после исключения a_1 имеют вид

$$b_0'' = b_0 - \frac{3}{2}b_0^2 + O(\nu),$$

$$\dot{b}_\pm = \pm iqb_\pm \pm \frac{\rho_0^2(\beta u_{02} - \alpha_1(\nu_+)u_{01})}{8\kappa qm(\beta u_{01} + \alpha_1(\nu_+)u_{02})}b_0^2 + O(\nu).$$

В низшем порядке по ν для $\nu > 0$ система (22) имеет решение

$$a_0 = \frac{\nu\nu_+\rho_0}{2\kappa(u_{01}\beta + u_{02}\alpha_1(\nu_+))}\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}}\xi\right) + O(\nu^2). \qquad (23)$$

Отдельно следует рассмотреть изотропный случай, так как при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ имеем

$$u_{01}\beta + u_{02}\alpha_1(\nu_+) = 0.$$

В этом случае первые два уравнения системы (22) после исключения a_1 представим в виде

$$\ddot{a}_0 = \frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}a_0 - \frac{\kappa(\alpha_1(\nu_+)^2 + \beta^2)}{m}a_0^3 + \langle F_z, \psi_1\rangle. \qquad (24)$$

Проведем в уравнении (24) масштабное преобразование:

$$a_0 = \sqrt{\frac{2\rho_0\nu\nu_+}{\kappa(\alpha_1^2(\nu_+) + \beta^2)}}b_0, \qquad \zeta = \sqrt{\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}}\xi.$$

Тогда уравнение (24) будет иметь вид

$$b_0'' = b_0 - 2b_0^3 + O(\nu). \qquad (25)$$

В главном приближении по ν для $\nu > 0$ уравнение (25) имеет решение

$$b_0 = \mathrm{ch}^{-1}(\zeta) + O(\nu).$$

Следовательно,

$$a_0 = \sqrt{\frac{2\rho_0 \nu\nu_+}{\kappa(\alpha_1^2(\nu_+) + \beta^2)}} \mathrm{ch}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\nu\nu_+\rho_0}{m}}\xi\right) + O(\nu).$$

Для определения асимптотики $a_\pm$ на бесконечности рассмотрим далее локальную структуру решения в спектральной области. Опуская члены высшего порядка, представим последнюю пару уравнений (22) в виде

$$La_+ = ca_0^2, \quad \bar{L}a_- = -ca_0^2, \tag{26}$$

где

$$L = \frac{\partial}{\partial \xi} - iq,$$

$$c = \frac{i\kappa}{2qm}(\beta u_{02} - \alpha_1(\nu_+)\, u_{01}).$$

Используя преобразование Фурье

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_\pm \exp(-ik\xi)\, d\xi,$$

из уравнений (23) и (26) получим

$$\hat{a}_\pm = \frac{\pm 1}{k \mp q}\left(c_1 k + c_2 k^3\right) \mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{k\pi}{c_3\sqrt{\nu}}\right), \tag{27}$$

где c_1, c_2 и c_3 — некоторые константы. Здесь использовано соотношение

$$\widehat{\mathrm{ch}^{-4}} x = \left(\frac{1}{3}k + \frac{1}{12}k^3\right) \mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Найдем решение системы (22), выражающееся четными функциями, что совместимо со свойством обратимости. Рассматриваемое решение имеет главную часть (23) и одинаковую асимптотику на обеих бесконечностях. Имеем

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \hat{a}_{\pm} e^{ik\xi} dk, \tag{28}$$

где контур интегрирования Γ_1 проходит над полюсами $\hat{a}_{\pm}$ на вещественной оси, а контур Γ_2 — ниже этих полюсов. Контуры Γ_1 и Γ_2 дают вклады в асимптотики соответственно на минус- и плюс-бесконечностях. Из выражений (27) и (28) следует, что в низшем порядке по ν при $\xi \to \pm\infty$ имеем

$$\begin{aligned} a_+ &\to C \exp\left(-\frac{q\pi}{c_3\sqrt{\nu}} + iq\xi\right), \\ a_- &\to C \exp\left(-\frac{q\pi}{c_3\sqrt{\nu}} - iq\xi\right), \end{aligned} \tag{29}$$

где C — некоторая константа, точное значение которой может быть определено только при анализе полной системы (22). Из равенства (20) получим

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta a_0 + \alpha_1(\nu_+)(a_+ + a_-), \\ u_2 &= \alpha_1(\nu_+)\, a_0 - \beta(a_+ + a_-). \end{aligned} \tag{30}$$

Следовательно, выражения (30) определяют экспоненциально малую осциллирующую компоненту решения (23). Однако при умеренных амплитудах волны ($\nu \sim 1$) амплитуда этой компоненты не будет малой величиной.

Заключение. Рассмотрены вопросы существования стационарных локализованных квазипоперечных волновых структур в нелинейной упругой среде с учетом эффектов дисперсии. Показано, что в окрестности нулевого решения (состояния покоя) в предварительно деформированной среде уединенные волны существуют не для всех диапазонов значений скорости распространения волны, что связано с замещением уединенных волн нелокализованными волновыми структурами–обобщенно-уединенными волнами. В этом состоит отличие рассмотренного случая от случая, когда предварительные деформации отсутствуют и для обеих ветвей дисперсионного соотношения существуют уединенные волны — решения, ответвляющиеся от нулевого решения (состояния покоя).

Наличие обобщенно-уединенных волн среди решений типа бегущей волны свидетельствует о ряде интересных особенностей распада локализованных возмущений в рассматриваемой среде. В частности, при замещении уединенной волны обобщенно-уединенной достаточно общее локализованное возмущение не подвержено более распаду на солитоны — уединенные волны, но распадается за счет излучения резонансной периодической волны [8]. Таким образом, в результате эволюции локализованного возмущения в упругой среде могут возникать коротковолновые структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Димитриенко Ю. М. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997.
2. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Вариационные свойства осредненных уравнений периодических сред // Труды МИАН. – 1990. – Т. 192. – С. 5–19.
3. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370. – № 1. – С. 7–10.
4. Гвоздовская Н. И., Куликовский А. Г. Квазипоперечные ударные волны в упругих средах с внутренней структурой // Прикладная математика и теоретическая физика. – 1999. – Т. 40. – № 2. – С. 174–180.
5. Bakholdin I., Il'ichev A., Tomashpol'skii V. Stability, instability and interaction of solitary pulses in a composite medium // European Journal of Mechanics. A/Solids. – 2002. – № 21. – P. 333–346.
6. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. – М.: Московский лицей, 1998.
7. Iooss G., Adelmeyer M. Topics on Bifurcation Theory and Applications. – Singapore: World Scientific, 1992.
8. Бахолдин И. Б., Томашпольский В. Я. Уединенные волны в модели предварительно деформированного нелинейного композита // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 4. – С. 527–538.

Статья поступила в редакцию 26.11.2002

Виктор Яковлевич Томашпольский родился в 1972 г., окончил в 1994 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Старший преподаватель кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области теории нелинейных волн в упругих средах.

V.Ya. Tomashpolsky (b. 1972) graduated from the Moscow State University n.a. M.V. Lomonosov. Senior teacher of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in theory of nonlinear waves in flexible media.