

В принятых предположениях о том, что размеры предъявляемых исков одинаковы, величины страховых премий  $p'_i$  и  $p''_i$  будут совпадать с величиной  $p_i$ .

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г.Д. Карташову.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а с к а к о в В. Н., К а р т а ш о в Г. Д. Введение в актуарную математику. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 63 с.
2. Ф а л и н Г. И. Математический анализ рисков в страховании. – М.: Росс. юрид. издательский дом, 1994. – 130 с.
3. Ф а л и н Г. И., Ф а л и н А. И. Введение в актуарную математику. – М.: Финансово-актуарный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994. – 85 с.

Статья поступила в редакцию 25.09.2003



Анна Леонидовна Ветрова родилась в 1981 г. Студентка МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области теории вероятностей, математической статистики, актуарной математики.

A.L. Vetrova (b. 1981). Student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of probability theory, mathematical statistics, actuarial mathematics.

---

УДК 658.5

В. А. П а в л о в, С. В. Ю р и ц ы н а

## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕИНВЕСТИРОВАНИЯ СРЕДСТВ В РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЯХ

*Рассмотрена задача оптимального распределения прибыли на вложения в производство и выплату дивидендов. Предложена концептуальная модель одного варианта условий инвестирования, исследование которого позволяет оптимизировать принятие решений о реинвестировании средств. В качестве критериев оптимальности рассмотрены экономические показатели. В аналитических и численных решениях показана экономическая обоснованность полного реинвестирования прибыли на начальных этапах проектов.*

Инвесторы, как правило, вкладывают средства с целью приумножения капиталов. Инвестируемые средства могут расходоваться на создание предприятия, которое существует в течение ряда лет, принося прибыль, после чего ликвидируется, и тогда “отдача” вложений складыва-

ется из дивидендных выплат и выручки от продажи активов в результате ликвидации. Если производится продукция или услуги, то обычно существует возможность наращивать выпуск в течение периода существования предприятия путем вложения в производство всей или части прибыли, что, однако, уменьшает другую ее часть, выплачиваемую в виде дивидендов. Таким образом, возникает вопрос оптимального реинвестирования, изучаемый в настоящей работе. В научном финансовом менеджменте известны различные решения этого вопроса с помощью качественного анализа, в частности, в дивидендных политиках [1, 2], но количественный анализ оптимальных пропорций выплат и реинвестирования не был проведен.

Решение вопроса оптимального реинвестирования зависит от степени распыленности инвестора. Ситуация более сложна для анализа в случае, если акции создаваемого предприятия котируются на рынке ценных бумаг и на котировку влияют выплаты дивидендов. В этой ситуации, решая вопрос о дивидендах, следует считаться с реакцией фондового рынка. В настоящей работе исследуется более простая ситуация нераспыленного инвестора, для которого характерно экономически разумное поведение и оценка инвестиции по критерию чистой приведенной стоимости, являющейся общепризнанным критерием эффективности вложений. Кроме того, не рассматривается финансирование долгосрочными кредитами.

Далее рассмотрим математическую модель задачи распределения прибыли и предложим способы получения оптимальных решений в типичных условиях, когда:

а) способность приносить прибыль для изменяющихся по величине активов характеризуется постоянным по годам показателем рентабельности активов  $R = P_i/A_i$ , где  $P_i$  — прибыль, получаемая в  $i$ -й год,  $A_i$  — величина активов в конце  $i$ -го года,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  — число лет существования предприятия;

б) инвестор вкладывает средства  $U$  единовременно в момент создания предприятия;

в) в результате продажи активов  $A_N$ , т.е. активов  $A_i$  при  $i = N$  в конце  $N$ -го (последнего) года существования предприятия, инвестор получает некоторую долю  $k$  стоимости этих активов ( $k \leq 1$  будем называть ликвидационным коэффициентом).

Рассмотрим возможные последствия принятия различных решений по распределению прибыли. Направление в некоторый год всей полученной за год прибыли на развитие производства приводит к росту активов и, следовательно, увеличивает возможности получения доходов в будущие годы; кроме того, таким образом увеличивается конечная сумма, часть которой получит инвестор при ликвидации предприятия. С другой стороны, при таком решении уменьшается общее количество лет, в течение которых могут выплачиваться дивиденды, что

способствует уменьшению общей суммы выплат. Помимо этого, вложение прибыли в производство приведет к некоторой потере средств, поскольку инвестору возвращается лишь часть  $k$  стоимости активов. Наконец, откладывание дивидендных выплат на более поздние годы нежелательно в силу принципа временной ценности денег, согласно которому будущие притоки средств ценятся меньше, чем нынешние.

Возникает ситуация, в которой необходимо принятие решений об оптимальном распределении прибыли. Можно предположить существование количественных закономерностей в данной ситуации. Для подтверждения этого предположения рассмотрим один частный случай, когда:

- 1) нет потерь стоимости активов при ликвидации ( $k = 1$ );
- 2) фактор временной ценности денег не учитывается или его влияние достаточно мало.

Нетрудно видеть, что в этом случае наибольшую отдачу инвестор получает, если дивиденды вообще не выплачиваются, вся прибыль ежегодно реинвестируется в активы и, следовательно, всю отдачу вложений инвестор получает при продаже активов. В этих условиях наращивание величины активов осуществляется в соответствии со схемой сложных процентов:

$$A_i = U(1 + R)^i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $A_i$  является геометрической прогрессией, что обеспечивает наибольший конечный результат из-за отсутствия потерь в силу условий 1) и 2). Если же  $k < 1$ , что характерно для современных условий производства, когда технологическое оборудование быстро устаревает, можно предположить целесообразность выплаты дивидендов в некоторые или во все годы. Аналогично, учет фактора временной ценности денег может потребовать более сложных решений по распределению прибыли.

Принимая во внимание увеличение по экспоненте активов в условиях полного реинвестирования прибыли, можно ожидать, что будет целесообразным некоторый начальный период роста активов без дивидендных изъятий, за которым следует период выплат, — иначе говоря, перед тем, как инвестор начнет получать отдачу, предприятию необходимо дать возможность “вырасти”.

Обозначим через  $n$  число лет, в течение которых после образования предприятия дивиденды не выплачиваются,  $0 \leq n \leq N$ . Величину  $n$  можно назвать периодом роста предприятия. Тогда отрезок времени продолжительностью  $N - n$  лет, следующий за периодом роста, следует называть периодом отдачи инвестиций.

В настоящей работе рассмотрим два типа графиков распределения прибыли. В случае первого типа в период отдачи инвестиции вся годовая прибыль направляется на выплату дивидендов, а в период роста

вся прибыль реинвестируется в активы; графики этого типа называются графиками с периодом роста и отдачи. В случае второго типа годовая прибыль может распределяться на реинвестируемую и выплачиваемую часть; графики этого типа называются графиками произвольного вида, и в этом случае в разные годы возможны различные решения по распределению прибыли. Первый тип графиков представляет собой частный случай второго.

В табл. 1 приведен пример оптимального периода роста в случае графика первого типа. Сумма  $U = 10$  млн. руб. инвестируется в момент создания предприятия, рентабельность активов составляет  $R = 0,3$ ; ликвидационный коэффициент  $k = 0,5$ ; число лет существования предприятия  $N = 5$ .

Приток средств по инвестициям, включая дивиденды и выручку в результате ликвидации предприятия, рассчитывается для трех вариантов графиков с периодами роста два, три и четыре года. При  $n = 2$  приток максимален и составляет 24,17 млн. руб., тогда как при других значениях  $n$  притоки меньше. Таким образом, возникает предположение о том, что при слишком малом периоде роста предприятие не может достаточно “вырасти”, а при слишком продолжительном невозможно в полной мере получить отдачу от инвестиций; следовательно, возникает необходимость исследования задачи оптимизации периода роста для графиков первого типа. В приведенном примере величина притока средств рассчитана без дисконтирующих поправок, что не изменяет сделанного предположения.

При дальнейшем анализе задачи оптимизации периода роста выводится аналитическое выражение для чистой приведенной стоимости  $V_{NPV}$ . В частном случае неучета временной стоимости денег, т.е. при нулевой ставке дисконтирования, решение находится в виде формулы расчета периода отдачи  $N - n$ , обеспечивающего максимальное значение  $V_{NPV}$ . Случай ненулевой ставки дисконтирования исследуется методом численного компьютерного моделирования и оптимизации.

В случае графиков первого типа к концу периода роста, т.е. к концу  $n$ -го года, активы возрастают до уровня  $U(1 + R)^n$  и будут оставаться неизменными в течение оставшегося периода отдачи продолжительностью  $N - n$  лет, каждый год принося прибыль  $RU(1 + R)^n$ . Всего за период отдачи с учетом дисконтирования по ставке  $r$  инвестор получает сумму средств

$$\begin{aligned} \frac{RU(1 + R)^n}{(1 + r)^n} + \frac{RU(1 + R)^n}{(1 + r)^{n+1}} + \dots + \frac{RU(1 + R)^n}{(1 + r)^N} = \\ = RU(1 + R)^n \sum_{i=n}^N \frac{1}{(1 + r)^i}. \quad (1) \end{aligned}$$

Таблица 1

Период роста $n$ , годы	Параметры финансового состояния предприятия	Номер года $i$					Сумма дивидендов за 5 лет, млн. руб.	Выручка от продажи активов, млн. руб.	Приток средств, млн. руб.
		1	2	3	4	5			
2	Активы $A_i$ , млн. руб.	10	13	16,9	16,9	16,9	$5,07 \cdot 3 =$ $= 15,21$	$16,59 \cdot 0,5 =$ $= 8,45$	$15,21 + 8,45 =$ $= 23,66$
	Прибыль, млн. руб.	3	3,9	5,07	5,07	5,07			
	Дивиденды, млн. руб.	0	0	5,07	5,07	5,07			
3	Активы $A_i$ , млн. руб.	10	13	16,9	21,79	21,97	$6,59 \cdot 2 =$ $= 13,18$	$21,97 \cdot 0,5 =$ $= 10,98$	$13,18 + 10,98 =$ $= 24,17$
	Прибыль, млн. руб.	3	3,9	5,07	6,59	6,59			
	Дивиденды, млн. руб.	0	0	0	6,59	6,59			
4	Активы $A_i$ , млн. руб.	10	13	16,9	21,97	28,56		$28,56 \cdot 0,5 =$ $= 14,28$	$8,57 + 14,28 =$ $= 22,85$
	Прибыль, млн. руб.	3	3,9	5,07	6,59	8,57	8,57		
	Дивиденды, млн. руб.	0	0	0	0	8,57			

Дисконтированный приток средств в результате продажи активов составляет

$$\frac{kRU(1+R)^n}{(1+r)^N}. \quad (2)$$

Чистый дисконтированный поток средств  $V_{NPV}$  инвестора, приведенный к моменту вложения, представляет собой сумму выражений (1) и (2), из которой вычитается величина вложения  $U$ :

$$V_{NPV} = RU(1+R)^n \sum_{i=n}^N \frac{1}{(1+r)^i} + \frac{kRU(1+R)^n}{(1+r)^N} - U. \quad (3)$$

В случае, когда фактором временной ценности денег можно пренебречь ( $r = 0$ ), выражение (3) упрощается:

$$V_{NPV} = RU(1+R)^n(N-n) + kRU(1+R)^n - U. \quad (4)$$

С целью сделать математические выкладки менее громоздкими получим формулу оптимального значения периода отдачи сначала для случая  $k = 0$ , т.е. при отсутствии продажи активов. Тогда выражение (4) принимает вид

$$V_{NPV} = RU(1+R)^n(N-n) - U. \quad (5)$$

Максимальное значение  $V_{NPV}$  достигается, когда первое слагаемое правой части выражения (5), зависящее от  $n$ , имеет максимальное значение. Постоянные множители  $RU$  не влияют на значение  $n$ . Таким образом, задача максимизации эффекта инвестиции без учета дисконтирования и при отсутствии продажи активов сводится к нахождению  $n$ , при котором максимально значение выражения

$$(1+R)^n(N-n). \quad (6)$$

Путем дифференцирования этого выражения получим

$$(1+R)^n[(N-n)\ln(1+R) - 1].$$

Первый множитель положителен, поэтому нулевое значение производной и максимальное значение этого выражения находятся из условия равенства нулю выражения в квадратных скобках:

$$n = \frac{N-1}{\ln(1+R)}.$$

Период отдачи, соответствующий максимальному значению этого выражения, имеет вид

$$N - n = \frac{1}{\ln(1 + R)}. \quad (7)$$

Как видно, продолжительность оптимального периода отдачи зависит только от доходности активов. С возрастанием доходности период отдачи уменьшается. Согласно выражению (7) при  $R = 0,4$  период отдачи составляет три года, при  $R = 1$  — один год. В случае продажи активов при  $k \neq 0$  формулу периода отдачи получим аналогично:

$$N - n = \frac{1}{\ln(1 + R)} - \frac{k}{R}. \quad (8)$$

Очевидно, что с ростом возможностей вернуть инвестиции путем продажи активов период отдачи уменьшается.

Вывод формул с учетом дисконтирования является громоздкой процедурой. (Возможно, аналитические выражения для оптимальных дивидендных политик для этого случая удастся получить, учитывая, что выражение (1) представляет собой дисконтирование аннуитета, формула для которого получается как сумма членов геометрической прогрессии.) Поэтому задача построения оптимального графика дивидендных выплат в случае существенности фактора временной ценности денег решалась с помощью численных расчетов в электронных таблицах.

Строки электронной таблицы соответствовали всем рассмотренным переменным величинам, а столбцы — годам. Значения переменных величин для некоторого года рассчитывались с помощью формул электронной таблицы с использованием значений, полученных для предшествующего года, и параметров задачи. В специальную “варьируемую” строку записывались числа — доли прибыли, выплачиваемой в виде дивидендов в данный год. Таким образом, оптимальные графики относятся ко второму типу — графикам произвольного вида. Оптимизация численных значений в варьируемой строке выполнялась по критерию максимального значения  $V_{NPV}$  с помощью многомерного поискового оптимизатора “Поиск решения”, имеющегося в системе Excel. При этом оптимизатору в качестве критерия оптимальности указывалась ячейка, в которой рассчитывалось значение  $V_{NPV}$ , соответствующее текущим значениям в оптимизируемой строке.

В результате численных расчетов установлено, что при нулевых ставках дисконтирования получаемые периоды отдачи совпадают со значениями, получаемыми по формулам (7) и (8). Для года, находящегося на границе периодов роста и отдачи, в оптимизируемой строке

получаются дробные значения, т.е. в виде дивидендов выплачивается часть прибыли. Поэтому можно сделать вывод, что “с точностью до года, находящегося на границе”, оптимальные графики выплаты дивидендов относятся к первому типу, т.е. к графикам с периодами роста и отдачи. С ростом коэффициента дисконтирования период отдачи увеличивается, что можно объяснить снижением ценности будущих притоков средств по отношению к моменту создания предприятия (табл. 2). Данные в табл. 2 получены для  $N = 10$  лет и рентабельности активов  $R = 0,55$ .

Таблица 2

Ставка дисконтирования $r$	Период отдачи $N - n$
0	2
0,2	3
0,3	4
0,45	5

Ожидаемую инфляцию и степень рискованности инвестиций можно учесть, пользуясь известными методами, путем введения поправок в ставку дисконтирования. Поэтому предложенные принципы оптимальной дивидендной политики можно рекомендовать к практическому использованию, в частности, с применением программных средств моделирования производственных инвестиций разработки организаций “Альт” и “Про-Инвест”.

Полученную формулу (8) для расчета оптимального периода выплат не следует рассматривать как практический метод построения графиков выплаты дивидендов, поскольку не учтен весьма значимый фактор временной ценности денег. Поэтому анализ, выполненный в настоящей работе, следует рассматривать как обоснование задач численной компьютерной оптимизации планов инвестиции и основу для объяснения получаемых результатов. Построение оптимальных графиков с периодами роста и отдачи по формуле (7) можно рекомендовать в случаях бюджетного планирования деятельности предприятий на коротких годовых отрезках времени, когда нет необходимости дисконтировать притоки средств и когда ставится цель максимизации прибыли, получаемой к концу года. В таких случаях годовой отрезок времени следует считать состоящим из двенадцати месячных отрезков ( $N = 12$ ), период роста  $n$  измерять количеством месяцев, а рентабельность активов приводить к месячному периоду, т.е. полагать  $R$  равной одной двенадцатой части годовой рентабельности.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В а н Х о р н Дж. К. Основы управления финансами / Под ред. Я.В. Соколова. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 799 с.
2. Б и р м а н Г., Ш м и д т С. Экономический анализ инвестиционных проектов / Под ред. Л.П. Белых. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 631 с.
3. К о ч о в и ч Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 272 с.

Статья поступила в редакцию 25.03.2003

Виктор Алексеевич Павлов родился в 1948 г., окончил в 1972 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Промышленная логистика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 25 научных и учебно-методических работ, в том числе в области логистики внутрипроизводственных ресурсов предприятий.



V.A. Pavlov (b. 1948) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1972. Ph.D (Eng), ass. professor, head of “Industrial Logistics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 25 publications and training and methodical articles including those in the field of logistics of internal resources of enterprises.

Светлана Владимировна Юрицына родилась в 1969 г., окончила в 1993 г. МАТИ им. К.Э. Циолковского и в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сотрудник кафедры “Финансы” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

S.V. Yuritsyna (b. 1969) graduated from the Moscow Aviation and Technology Institute n. a. K.E. Tsiolkovsky and Bauman Moscow State Technical University in 2002. Employee of “Finances” department of the Bauman Moscow State Technical University.

---

**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
в 2004 г. вышла в свет книга**

**Калугин В.Т.**

Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 648 с.: ил.

ISBN 5-7038-1968-7 (в пер.)

Изложены результаты исследований различных способов управления аэродинамическими характеристиками ракет, ракетных блоков и космических спускаемых аппаратов. Даны методы математического и физического моделирования процессов обтекания органов управления полетом. Систематизирован материал по аэродинамическим, струйным и газодинамическим органам управления, позволяющий создать расчетную базу для аэрогазодинамического проектирования управляющих и тормозных устройств летательных аппаратов.

Книга предназначена для студентов и аспирантов авиационных и ракетно-космических специальностей вузов и технических университетов. Может быть полезна инженерам и научным работникам, специализирующимся в области аэрогазодинамики и проектирования летательных аппаратов.

По вопросам приобретения книги обращаться по тел. 263-60-45;  
e-mail: [press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)