

В. В. Феоктистов, О. О. Мякинник

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ПРЕОБРАЗОВАННЫХ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Система дифференциальных уравнений пограничного слоя преобразована к системе уравнений в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью, которая является обобщенной системой уравнений типа Риккати. После представления искомой вектор-функции в виде асимптотического ряда решение граничных задач для этой системы сведено к решению систем алгебраических уравнений второго порядка. Получено решение двумерной стационарной задачи пограничного слоя, доказаны вид решения и его согласованность с известным численным решением. Нестационарная двумерная задача формирования пограничного слоя при разгонном движении жидкости решена на временном интервале от нуля до бесконечности, где решение нестационарной задачи переходит в решение задачи стационарной.

В 1968 г. Ф.И. Федоров (Институт физики БАН) показал, что система дифференциальных уравнений в частных производных любого порядка с постоянными коэффициентами, в которую неизвестные функции и их производные входят рационально, может быть представлена в виде системы уравнений первого порядка с нелинейностями второй степени [1]. Эта система получила название системы уравнений Федорова (или системы универсальных нелинейных уравнений) и записывается в матричной форме в виде нелинейного уравнения

$$\sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_k} = \vec{C}_0 + C_1 \vec{B} + \vec{B}^T C_2 \vec{B}, \quad (1)$$

где $\vec{B}^T = (B_1, \dots, B_n)$; A_k и C_1 — квадратные числовые матрицы размера $n \times n$; C_0 — n -мерный числовой вектор-столбец; в системе наряду с квадратными матрицами содержится кубическая матрица C_2 , построенная из коэффициентов при квадратичных членах. Действительно, производные любого порядка $\partial^m F / \partial x^m$, в том числе и смешанные, путем последовательных замен

$$B_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad B_2 = \frac{\partial B_1}{\partial x}, \quad \dots, \quad B_m = \frac{\partial B_{m-1}}{\partial x} \quad (2)$$

можно свести к производным первого порядка, а произведения $F^p \cdot (\partial^m F / \partial x^m)^q$ путем замен

$$B_{m+1} = F^2, \quad B_{m+2} = B_{m+1}F, \quad \dots, \quad B_{m+p-1} = B_{m+p-2}F, \\ B_{m+p} = B_{m+p-1}B_m, \quad \dots, \quad B_{m+p+q-1} = B_{m+p+q-2}B_m \quad (3)$$

сводятся к произведениям не более чем двух функций. Поскольку соотношения (2)–(3) являются частным случаем уравнения (1), то результирующая система для вектор-функции

$$\vec{B}^T = (F, B_1, B_2, \dots, B_m, B_{m+1}, \dots, B_{m+p-1}, \dots, B_{m+p+q-1}),$$

которую Ф.И. Федоров называет *объединенным полем*, будет иметь ту же форму.

В форме (1) получены уравнения физических полей, охватывающие четыре основных типа взаимодействий: электромагнитные, слабые, сильные и гравитационные [2]. Свойства уравнений и описываемых ими полей определяются алгебраическими свойствами кубической матрицы, соответствующей квадратичной форме, и квадратных матриц-коэффициентов при вектор-функции.

По Ф.И. Федорову универсальная матричная форма (1) является единой математической основой для описания элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий. Схожий подход развивает профессор Р. Героч (факультет общей теории относительности Чикагского университета), который исследует структуру дифференциальных уравнений в частных производных в теоретической физике. Он считает, что класс так называемых квазилинейных гиперболических систем первого порядка (от которых систему (1) отличает наличие квадратичного члена) является достаточно широким, чтобы вместить описания всех классических физических систем [3].

С точки зрения математической физики, система (1) является обобщенной системой уравнений типа Риккати (помимо переменной $x_1 = t$ в системе присутствуют пространственные переменные x_2, \dots, x_s) и при моделировании физических процессов рассматривается как последовательный переход от линейных систем к нелинейным.

В настоящее время не существует общих методов решения системы Федорова. В данной работе система рассматривается в приложении к уравнениям ламинарного пограничного слоя при плоском течении [4].

Классическое предположение Л. Прандтля о том, что в тонком пограничном слое градиент каждой составляющей скорости в направлении, перпендикулярном поверхности рассматриваемого тела, значи-

тельно превышает ее градиент в направлении, параллельном поверхности тела, приводит уравнения Навье–Стокса к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \rho = \text{const}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4)–(5) называются уравнениями Прандтля для ламинарного пограничного слоя [4]. Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — продольная и поперечная составляющие скорости, направленные вдоль осей Ox и Oy , которые откладываются параллельно и перпендикулярно поверхности обтекаемого тела из расположенного на ней начала координат O ; ν — коэффициент кинематической вязкости. На внешней границе пограничного слоя $u(x, y, t)$ переходит в скорость внешнего течения $U(x, t)$, которая рассматривается как известная функция. Поскольку изменение давления p поперек пограничного слоя мало, его можно определить из уравнения Навье–Стокса для внешнего течения в направлении x , где отсутствуют все члены, зависящие от вязкости, и нет градиента скорости в направлении y :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6)$$

Решение уравнений Прандтля должно удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0 & \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y = 0, \quad t \geq 0, \\ u = U(x, t) & \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y = \infty, \quad t \geq 0, \\ u = U_t(x, y) & \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

выражающим соответственно условие прилипания вязкой жидкости к твердой стенке, условие связи с внешним потоком и распределение скорости в начальный момент времени [4]. Кроме того, в некотором поперечном сечении пограничного слоя ($x = x_0, y \geq 0, t \geq 0$) задается профиль скоростей $u(x_0, y, t)$. Если $x_0 = 0$, началом координат является передняя кромка тела либо критическая точка

$$u = U_0(y, t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad y \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Если скорость внешнего течения зависит и от x , и от t ($U = U(x, t)$), то дифференциальные уравнения пограничного слоя в некоторой области

исследования относятся к классу уравнений переменного типа [5–7].
Для случая

$$U = u_0 x^m t^n, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad n \geq 0, \quad (9)$$

где u_0 — соответствующая размерная постоянная, эта область определяется из условия [8]

$$0 \leq \frac{x^{1-m}}{u_0 t^{n+1}} \leq \frac{1-m}{1+n}. \quad (10)$$

В настоящей работе исследуется случай $m = 1, n \geq 0$, который соответствует критическому пограничному слою, или пограничному слою в критической точке, введенному в работе [5].

Преобразование двумерных задач пограничного слоя к системе (1) дифференциальных уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью. Рассмотрим плоское течение вязкой жидкости вблизи критической точки. При таком течении жидкость подходит из бесконечности к поставленной поперек течения стенке и далее течет вдоль поверхности в противоположные от критической точки стороны. Нестационарное течение, возникающее из состояния покоя, подробно исследовано на малом временном интервале (см. библиографию в работе [4]). Вместе с тем, авторам не известны решения задачи (4)–(8) на временном интервале от нуля до бесконечности, когда при разгонном характере внешнего течения пограничный слой стабилизируется, переходя в стационарный.

Для полного решения нестационарной задачи необходимо получить решение двумерной задачи для установившегося пограничного слоя. В этом случае в уравнениях (4)–(6) отсутствуют частные производные по времени ($\partial u / \partial t$ и $\partial U / \partial t$), краевые условия (7)–(8) принимают вид

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0 & \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y = 0; \\ u = U(x) & \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y = \infty; \quad U(x) = u_0 x^m, \quad m = 1; \\ u = U_0(y) & \quad \text{при} \quad x = 0, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения ламинарного пограничного слоя, являясь нелинейной системой уравнений второго порядка, в которую неизвестные составляющие скорости u, v и их производные входят рационально, могут быть рассмотрены как система (1). Уравнения (4)–(5) не являются единственной формой записи уравнений пограничного слоя. Одной из часто встречающихся в приложениях формой является уравнение Крокко [9], в котором в качестве неизвестной функции рассматривается производная $\partial u / \partial y = \omega(x, y)$.

После введения в уравнение (4) функции ω и заданной в (11) скорости внешнего течения уравнение (4) принимает вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \omega = u_0^2 x + \nu \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (12)$$

Продифференцируем уравнение (12) по y и, подставив в результат дифференцирования

$$\omega \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \omega + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

значение поперечной составляющей скорости

$$v = \frac{1}{\omega} \left(u_0^2 x + \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

предварительно также полученное из уравнения (12), получим

$$\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \left(u_0^2 x + \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

или с использованием уравнения неразрывности (5)

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \left(u_0^2 x + \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (13)$$

Перейдем от переменных (x, y) к переменным (x_*, u_*) :

$$x_* = x, \quad u_* = \frac{u}{u_0 x}, \quad \omega = \omega(x_*, u_*); \quad (14)$$

выведем формулы перехода к новым переменным, которые в дальнейшем будем называть *переменными Крокко*:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x_*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_*} + \frac{\partial u_*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_*} = \frac{\partial}{\partial x_*} - \frac{u_*}{x_*} \frac{\partial}{\partial u_*} + \frac{1}{u_0 x_*} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_*},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x_*}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x_*} + \frac{\partial u_*}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_*} = \frac{1}{u_0 x_*} \omega \frac{\partial}{\partial u_*},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u_0 x_*} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u_*} \right) = \frac{\omega}{(u_0 x_*)^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_*} \right)^2 + \frac{\omega^2}{(u_0 x_*)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_*^2}. \quad (15)$$

Уравнение (13) и краевые условия в новых переменных принимают вид

$$\nu \omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_*^2} + u_0 (u_0 x_*)^2 (u_*^2 - 1) \frac{\partial \omega}{\partial u_*} - (u_0 x_*)^3 u_* \frac{\partial \omega}{\partial x_*} = 0,$$

$$\omega \frac{\partial \omega}{\partial u_*} \Big|_{u_*=0} = -\frac{u_0^3}{\nu} x_*^2, \quad \omega|_{u_*=1} = 0, \quad \omega|_{x_*=0} = 0.$$

Чтобы избавиться от постоянных коэффициентов u_0 и ν , произведем замену

$$\omega = \omega_*(x_*, u_*) \sqrt{\frac{u_0^3}{\nu}} \quad (16)$$

и, опуская звездочки при x_* , u_* и ω_* , окончательно запишем уравнения стационарного пограничного слоя и условия (11) в форме Крокко:

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + x^2 (u^2 - 1) \frac{\partial \omega}{\partial u} - x^3 u \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

$$\omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \Big|_{u=0} = -x^2, \quad \omega|_{u=1} = 0, \quad \omega|_{x=0} = 0. \quad (18)$$

Выполненное преобразование, состоящее в выборе продольной составляющей скорости течения пограничного слоя u в качестве новой независимой переменной, а функции $\omega = \partial u / \partial y$ в качестве искомой функции, называется *преобразованием Крокко*, уравнение (17) — уравнением пограничного слоя в форме Крокко. Преобразование, сохраняя представление нелинейности уравнения в рациональной форме, переводит задачу из бесконечной области по пространственной переменной y в интервал $[0, 1]$ по переменной u . При этом условие прилипания для составляющих скорости преобразуется в условие для произведения искомой функции ω и ее производной, т.е. в квадратичный член системы (1), представленный через ее основные элементы.

Используя алгоритм (2)–(3), запишем уравнение (17) в виде системы (1):

$$\omega = B_1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial u} = B_2, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \frac{\partial B_2}{\partial u} = B_3, \quad B_1^2 = B_4, \quad (19)$$

$$A_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \vec{B}}{\partial u} = C_1 \vec{B} + \vec{B}^T C_2 \vec{B}, \quad \vec{B}^T = (B_1, B_2, B_3, B_4); \quad (20)$$

здесь матричные коэффициенты имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & x^2(u^2 - 1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

столбец

$$\vec{B}^T C_2 \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1^2 \\ B_3 B_4 \end{pmatrix}$$

описывает нелинейность уравнения (17). Краевые условия (18) принимают вид

$$B_1 B_2|_{u=0} = -x^2, \quad B_1|_{u=1} = 0, \quad B_1|_{x=0} = 0. \quad (21)$$

Метод решения системы (1). Решение системы (1) и ее реализации для уравнений стационарного двумерного пограничного слоя — системы (20) — предлагается искать в виде асимптотического ряда

$$\vec{B}(x) = \sum_{\|\alpha\|=0}^{\infty} \vec{\gamma}_{\alpha} x^{\alpha}, \quad \vec{\gamma}_{\alpha}^T = (\gamma_{\alpha}^1, \dots, \gamma_{\alpha}^n), \quad (22)$$

где $\vec{\gamma}_{\alpha}$ — n -мерный вектор-коэффициент, верхний индекс при его компонентах γ_{α}^j указывает на соответствующую компоненту вектора \vec{B} :

$$\vec{B}(x)^T = (B_1(x), \dots, B_n(x)) = \left(\sum_{\|\alpha\|=0}^{\infty} \gamma_{\alpha}^1 x^{\alpha}, \dots, \sum_{\|\alpha\|=0}^{\infty} \gamma_{\alpha}^n x^{\alpha} \right);$$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_s), & \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_s), \\ \|\alpha\| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s, & x^{\alpha} &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_s^{\alpha_s}; \end{aligned}$$

суммирование проводится по мультииндексу α [10]. Для системы (20) $n = 4$, $s = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = u$. Подставив ряд (22) в систему (20) и приравняв вектор-коэффициенты при подобных членах, получим бесконечную систему алгебраических уравнений второго порядка. Таким образом, нелинейность уравнений пограничного слоя преобразована в квадратичную нелинейность алгебраической системы — системы для определения вектор-коэффициентов $\vec{\gamma}_{\alpha}$ разложения решения задачи в ряд.

Предположим, что начиная с некоторого индекса β , $\|\beta\| \geq N$, все коэффициенты $\vec{\gamma}_{\beta}$ равны нуль-вектору. Тогда для определения коэффициентов $\vec{\gamma}_{\alpha}$, $\|\alpha\| < N$, получим систему с числом уравнений, равным

числу неизвестных. Уравнения сгруппированы в отвечающие мультииндексам α подсистемы квадратичных уравнений, в результате последовательного решения которых можно получить искомые векторкоэффициенты $\vec{\gamma}_\alpha$, $\|\alpha\| < N$:

при $\alpha = (0, 0)$

$$\begin{aligned}\gamma_{(0,1)}^1 &= \gamma_{(0,0)}^2, \\ \gamma_{(0,1)}^2 &= \gamma_{(0,0)}^3, \\ 0 &= \gamma_{(0,0)}^1 - \gamma_{(0,0)}^4, \\ 0 &= \gamma_{(0,0)}^3 \gamma_{(0,0)}^4;\end{aligned}$$

при $\alpha = (0, 1)$

$$\begin{aligned}2 \gamma_{(0,2)}^1 &= \gamma_{(0,1)}^2, \\ 2 \gamma_{(0,2)}^2 &= \gamma_{(0,1)}^3, \\ 0 &= 2 \gamma_{(0,1)}^1 \gamma_{(0,0)}^1 - \gamma_{(0,1)}^4, \\ 0 &= \gamma_{(0,1)}^3 \gamma_{(0,0)}^4 + \gamma_{(0,0)}^3 \gamma_{(0,1)}^4;\end{aligned}$$

при $\alpha = (1, 0)$

$$\begin{aligned}\gamma_{(1,1)}^1 &= \gamma_{(1,0)}^2, \\ \gamma_{(1,1)}^2 &= \gamma_{(1,0)}^3, \\ 0 &= 2 \gamma_{(1,0)}^1 \gamma_{(0,0)}^1 - \gamma_{(1,0)}^4, \\ 0 &= \gamma_{(0,0)}^3 \gamma_{(1,0)}^4 + \gamma_{(1,0)}^3 \gamma_{(0,0)}^4;\end{aligned}$$

при $\alpha = (0, 2)$

$$\begin{aligned}3 \gamma_{(0,3)}^1 &= \gamma_{(0,2)}^2, \\ 3 \gamma_{(0,3)}^2 &= \gamma_{(0,2)}^3, \\ 0 &= (\gamma_{(0,1)}^1)^2 + 2 \gamma_{(0,2)}^1 \gamma_{(0,0)}^1 - \gamma_{(0,2)}^4, \\ 0 &= \gamma_{(0,2)}^3 \gamma_{(0,0)}^4 + \gamma_{(0,0)}^3 \gamma_{(0,2)}^4 + \gamma_{(0,1)}^3 \gamma_{(0,1)}^4;\end{aligned}$$

при $\alpha = (1, 1)$

$$\begin{aligned}2 \gamma_{(1,2)}^1 &= \gamma_{(1,1)}^2, \\ 2 \gamma_{(1,2)}^2 &= \gamma_{(1,1)}^3, \\ 0 &= 2 \gamma_{(1,0)}^1 \gamma_{(0,1)}^1 + 2 \gamma_{(1,1)}^1 \gamma_{(0,0)}^1 - \gamma_{(1,1)}^4, \\ 0 &= \gamma_{(0,1)}^3 \gamma_{(1,0)}^4 + \gamma_{(1,1)}^3 \gamma_{(0,0)}^4 + \gamma_{(1,0)}^3 \gamma_{(0,1)}^4 + \gamma_{(0,0)}^3 \gamma_{(1,1)}^4;\end{aligned}$$

при $\alpha = (2, 0)$

$$\gamma_{(2,1)}^1 = \gamma_{(2,0)}^2,$$

$$\gamma_{(2,1)}^2 = \gamma_{(2,0)}^3,$$

$$0 = (\gamma_{(0,1)}^1)^2 + 2 \gamma_{(0,2)}^1 \gamma_{(0,0)}^1 - \gamma_{(0,2)}^4,$$

$$0 = \gamma_{(0,0)}^3 \gamma_{(2,0)}^4 + \gamma_{(1,0)}^3 \gamma_{(1,0)}^4 + \gamma_{(2,0)}^3 \gamma_{(0,0)}^4 - \gamma_{(0,0)}^2 \quad (23)$$

и т. д.

Подстановка ряда (22) в краевые условия (21) приводит к квадратичным уравнениям

$$\gamma_{(0,0)}^1 \gamma_{(0,0)}^2 = 0,$$

$$\gamma_{(1,0)}^1 \gamma_{(0,0)}^2 + \gamma_{(0,0)}^1 \gamma_{(1,0)}^2 = 0,$$

$$\gamma_{(2,0)}^1 \gamma_{(0,0)}^2 + \gamma_{(1,0)}^1 \gamma_{(1,0)}^2 + \gamma_{(0,0)}^1 \gamma_{(2,0)}^2 = -1,$$

$$\gamma_{(0,0)}^1 \gamma_{(3,0)}^2 + \gamma_{(3,0)}^1 \gamma_{(0,0)}^2 + \gamma_{(1,0)}^1 \gamma_{(2,0)}^2 + \gamma_{(2,0)}^1 \gamma_{(1,0)}^2 = 0 \quad (24)$$

и т. д., являющимся записью условия на стенке, уравнениям

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1}^{N-1} \gamma_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1 = 0, \quad \alpha_1 = \overline{0, (N-1)}, \quad (25)$$

на внешней границе и условию

$$\gamma_{(0, \alpha_2)}^1 = 0, \quad \alpha_2 = \overline{0, (N-1)}, \quad (26)$$

в заданном поперечном сечении. Решение системы алгебраических уравнений второго порядка (23)–(26) позволяет определить коэффициенты разложения решения задачи (20)–(21) в асимптотический ряд (22).

Представление решения нелинейного уравнения в виде ряда связано с проблемой выделения из бесконечной системы уравнений конечной подсистемы, удовлетворительно описывающей свойства решения, и разрешения содержащейся в ней нелинейности. Отметим работу [11], в которой решение уравнений Навье–Стокса представляется в виде функциональных рядов. Из бесконечной системы уравнений по некоторому алгоритму выделяют конечную цепочку попарно зацепляющихся линейных уравнений в частных производных. Нелинейность исходных уравнений последовательно раскрывается в правых частях уравнений цепочки. Предлагаемая процедура, по утверждению авторов, позволяет получить всю систему уравнений, описывающих нелинейные эффекты исследуемого течения. В отличие от подхода, предложенного в работе [11], в настоящей работе изначально не ставилась цель исключить

нелинейность при построении системы (23). В результате выполнения преобразования Крокко характер нелинейности уравнения проявляется в условии на стенке (21), что дает возможность разрешить квадратичную форму (24). Данный факт позволяет сделать вывод о соответствии преобразования Крокко характеру нелинейности уравнений пограничного слоя.

Алгоритм решения алгебраической системы. Подставим условие (26) в условие (24) и выразим коэффициенты $\gamma_{(j,0)}^2$, которые являются коэффициентам разложения компоненты B_2 , $B_2 = \partial\omega/\partial u$, искомого вектора \vec{B} в асимптотический ряд (22), через $\gamma_{(j,0)}^1$ — коэффициенты разложения в ряд компоненты B_1 , $B_1 = \omega$:

$$\gamma_{(j,0)}^2 = f_j(\gamma_{(1,0)}^1, \gamma_{(2,0)}^1, \dots, \gamma_{(j,0)}^1), \quad j = \overline{1, (N-1)}. \quad (27)$$

Введем обозначение

$$\gamma_{(1,0)}^1 = z$$

для первого ненулевого коэффициента разложения ω . Будем последовательно, начиная с подсистемы, соответствующей мультииндексу нулевой длины, решать систему квадратичных алгебраических уравнений (23), учитывая зависимость (27) и выражая через z искомые коэффициенты разложения. Рассмотрим в качестве предполагаемого решения частичную сумму ряда (22)

$$\vec{B}(x) = \sum_{\|\alpha\|=0}^{N+2} \vec{\gamma}_\alpha x^\alpha, \quad N = 10; \quad (28)$$

тогда условие (25) связи с внешним потоком принимает вид

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6} \frac{(z^4 - 3)}{z^5} + \frac{5}{24} \frac{(z^4 - 3)}{z^7} + \dots + \gamma_{(1,9)}^3 &= 0, \\ g_{21}\gamma_{(2,0)}^1 + g_{22}\gamma_{(2,8)}^3 &= 0, \\ g_{31}\gamma_{(3,0)}^1 + g_{32}\gamma_{(3,7)}^3 + R_3(\gamma_{(2,0)}^1) &= 0, \\ g_{41}\gamma_{(4,0)}^1 + g_{42}\gamma_{(4,6)}^3 + R_4(\gamma_{(2,0)}^1, \gamma_{(3,0)}^1) &= 0, \\ &\dots\dots \\ g_{91}\gamma_{(9,0)}^1 + g_{92}\gamma_{(9,1)}^3 + R_9(\gamma_{(2,0)}^1, \gamma_{(3,0)}^1, \dots, \gamma_{(8,0)}^1) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где g_{i1}, g_{i2} — числовые коэффициенты; R_i — рациональные функции, $i = 2, (N-1)$, $R_1 = 0$.

Из условия (29) в предположении $\vec{\gamma}_\alpha = 0$ при $\|\alpha\| \geq 10$ получим $\gamma_{(k,0)}^1 = 0$, $k > 1$. Для определения остальных ненулевых коэффициентов разложения решения задачи (20)–(21) в (28) необходимо

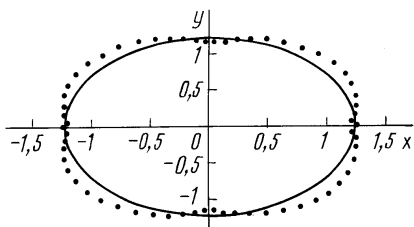


Рис. 1. Спектр корней, реализуемый из условия связи с внешним потоком

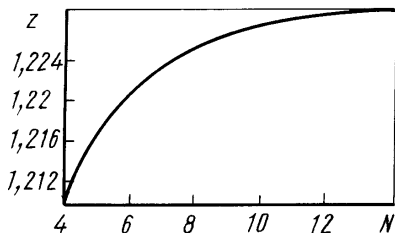


Рис. 2. Зависимость значений действительного положительного корня от порядка приближения N

найти корни первого уравнения системы (29). Среди корней показанных на рис. 1, при любом приближении существует один действительный положительный корень, который будем использовать при построении решения. Зависимость значений этого корня от числа учтенных слагаемых уравнения представлена на рис. 2. При выбранном приближении ($N = 10$) корню $z = 1,2276$ соответствует решение

$$\omega(x, u) = 1,2276 x - 0,8146 xu - 0,2703 xu^2 - 0,0436 xu^3 - 0,0362 xu^4 - 0,0187 xu^5 - \dots = x\omega_0(u), \quad (30)$$

представленное на рис. 3. Полученное решение имеет вид

$$\omega = x\omega_0(u) \quad (31)$$

и задает распределение функции ω по координате x . Подстановка решения (30) в уравнение (17) приводит к оценке

$$\Delta\omega = 0,1 \cdot 10^{-1} x^3 + 0,5 \cdot 10^{-9} x^3 u - 0,3 \cdot 10^{-9} x^3 u^2 + 0,4 \cdot 10^{-9} x^3 u^3 + \dots,$$

условие на внешней границе выполняется с точностью до

$$\Delta(\omega|_{u=1}) = -0,845 \cdot 10^{-9} x.$$

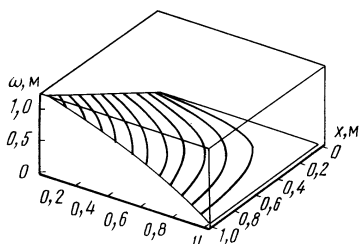


Рис. 3. Решение стационарной задачи

Предложенный метод позволил доказать вид решения (31), который в работе [4] задается для скоростей из дополнительных соображений. Подставив решение (31) в уравнение (17), придем к задаче

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \omega_0}{du^2} + (u^2 - 1) \frac{d\omega_0}{du} - u\omega_0 = 0, \quad (32)$$

$$\omega_0 \left. \frac{d\omega_0}{du} \right|_{u=0} = -1, \quad \omega_0|_{u=1} = 0, \quad (33)$$

что соответствует записи в форме Крокко известной задачи о плоском течении вязкой жидкости вблизи критической точки [4]. Решение этой задачи предлагаемым методом и сравнение полученного решения с известным численным приведено в работе [13]. Обоснованное для задач пограничного слоя отклонение в 1% от теоретического достигается уже на первых шагах вычислений (при решении алгебраической системы до подсистемы, соответствующей индексу α , $\|\alpha\| = 3$).

Решение двумерной задачи о развитии течения вязкой жидкости при ускоренном набегании на стенку. Применим предложенный алгоритм решения двумерных задач пограничного слоя к решению задач нестационарного пограничного слоя (4)–(8). Исключив из рассмотрения процессы, возникающие в пограничном слое при периодическом движении, ограничимся задачами, связанными с разгонным движением жидкости, когда тело и жидкость до момента времени $t = 0$ находятся в состоянии покоя, а затем жидкость начинает набегать на покоящееся тело.

Поскольку в задаче (4)–(8) отсутствует характерный линейный размер, система допускает переход от трех переменных к двум безразмерным переменным [14]:

$$\xi = \frac{x}{Ut}, \quad \eta = \frac{y\sqrt{U}}{\sqrt{\nu x}}, \quad (34)$$

или

$$\theta = \frac{Ut}{x}, \quad \zeta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}; \quad (35)$$

функция тока в переменных (ξ, η) имеет вид

$$\psi = \sqrt{\nu x U} f(\xi, \eta),$$

где функция $f(\xi, \eta)$ неизвестна. Задавая внешнее течение в виде (9) для $m = 1$:

$$U = u_0 x t^n,$$

получаем

$$\psi = x\sqrt{\nu u_0 t^n} f.$$

Подставляя затем составляющие скорости

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 x t^n \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\nu u_0 t^n} f$$

в уравнения (4)–(6), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + (n+1)\xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \left(f - \frac{n}{2}\xi\eta\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \\ + 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + n\xi \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

которое является частным случаем полученной в работе [7] единой формы записи для целого класса задач пограничного слоя — вязкого сжимаемого нестационарного пограничного слоя. Краевые условия (7)–(8) при заданном внешнем течении принимают вид

$$\begin{aligned} f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 & \quad \text{при } \eta = 0, \quad 0 \leq \xi < \infty, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1 & \quad \text{при } \eta = \infty, \quad 0 \leq \xi < \infty, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = f_0(\eta) & \quad \text{при } \xi = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = f_\infty(\eta) & \quad \text{при } \xi = \infty. \end{aligned} \quad (37)$$

Применим алгоритм решения к двумерным нестационарным задачам. Введем функцию $\partial^2 f / \partial \eta^2 = \tilde{\omega}(\xi, \eta)$ и запишем в переменных Крокко

$$\tilde{\tau} = \xi, \quad \tilde{u} = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{\tau}, \tilde{u})$$

уравнение (36):

$$\begin{aligned} (n+1)\tilde{\tau}^2 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{\tau}} + \tilde{\omega}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}^2} + (n\tilde{\tau}(\tilde{u}-1) + (\tilde{u}^2-1)) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}} - \\ - \left(\tilde{u} + \frac{3}{2}n\tilde{\tau} \right) \tilde{\omega} = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

и краевые условия (37):

$$\tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}} \Big|_{\tilde{u}=0} = -1 - n\tilde{\tau}, \quad \tilde{\omega}|_{\tilde{u}=1} = 0, \quad \tilde{\omega}|_{\tilde{\tau}=0} = \omega_0. \quad (39)$$

В качестве значения искомой функции $\tilde{\omega}$ при $\tilde{\tau} = 0$ принимается решение задачи (32)–(33).

Используя процедуру (19) для задачи (38)–(39) в виде

$$\tilde{\omega} = \tilde{B}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \tilde{u}} = \tilde{B}_2, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}^2} = \frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial \tilde{u}} = \tilde{B}_3, \quad \tilde{B}_1^2 = \tilde{B}_4,$$

запишем и решим ее как следующую задачу для системы (1):

$$\tilde{A}_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial \tilde{\tau}} + \tilde{A}_2 \frac{\partial \vec{B}}{\partial \tilde{u}} = \tilde{C}_1 \vec{B} + \tilde{B}^T \tilde{C}_2 \vec{B}, \quad \vec{B}^T = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4), \quad (40)$$

где нелинейность уравнения (38) описана столбцом

$$\vec{B}^T \tilde{C}_2 \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\tilde{B})^2 \\ -\tilde{B}_3 \tilde{B}_4 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \Big|_{\tilde{u}=0} = -1 - n\tilde{\tau}, \quad \tilde{B}_1 \Big|_{\tilde{u}=1} = 0, \quad \tilde{B}_1 \Big|_{\tilde{\tau}=0} = \omega_0. \quad (41)$$

Задача (32)–(33) решена в работе [13] как задача для системы (1) и во введенных обозначениях записывается следующим образом:

$$\omega_0 = B_1^0, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial u} = \frac{\partial B_1^0}{\partial u} = B_2^0, \quad \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial u^2} = \frac{\partial B_2^0}{\partial u} = B_3^0, \quad (B_1^0)^2 = B_4^0,$$

$$A_1 \frac{\partial \vec{B}^0}{\partial u} = C_1^0 \vec{B}^0 + \vec{B}^{0T} C_2^0 \vec{B}^0, \quad \vec{B}^{0T} = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0); \quad (42)$$

$$\vec{B}^{0T} C_2^0 \vec{B}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (B^0)^2 \\ B_3^0 B_4^0 \end{pmatrix};$$

$$B_1^0 B_2^0 \Big|_{u=0} = -1, \quad B_1^0 \Big|_{u=1} = 0. \quad (43)$$

Отметим, что после выполненных преобразований задача (38)–(39) может быть записана и решена как краевая задача для системы уравнений (1) относительно восьмимерной вектор-функции \vec{B} ,

$$\vec{B}^T = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4, B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0),$$

которая соответствует функции, называемой Ф.И. Федоровым объединенным полем, и полностью описывает изучаемый процесс. Блочная структура матриц-коэффициентов

$$\begin{pmatrix} \text{Bl}_1 & 0 \\ 0 & \text{Bl}_2 \end{pmatrix},$$

где блок Bl_1 отвечает задаче (40)–(41), а блок Bl_2 — задаче (42)–(43), и задаваемое процедурой (19) одинаковое строение блоков позволяет решать по описанному алгоритму обе задачи одновременно.

Решение краевой задачи для уравнения (38) — задачи о развитии $\tilde{\omega}$ во времени — получено при ограниченных значениях переменной $\tilde{\tau}$. Для использования данного алгоритма при больших значениях этой

переменной перейдем в задаче (4)–(8) к переменным (35) и функции $\varphi(\theta, \zeta)$:

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, f) &\rightarrow (\theta, \zeta, \varphi), \\ \theta &= \frac{1}{\xi}, \quad \zeta = \xi^{1/2}\eta, \quad \varphi = \varphi(\theta, \zeta) = \xi^{1/2}f(\xi, \eta), \quad (44) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} &= u', \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = \omega', \end{aligned}$$

что в переменных Крокко

$$\tau' = \theta, \quad u' = \zeta$$

приведет к уравнению

$$(n+1)\tau' \frac{\partial \omega'}{\partial \tau'} = (\omega')^2 \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u'^2} + \left(\tau'(u'^2 - 1) + n(u' - 1) \right) \frac{\partial \omega'}{\partial u'} - (\tau'u' + n - 0,5)\omega' \quad (45)$$

с краевыми условиями

$$\omega' \frac{\partial \omega'}{\partial u'} \Big|_{u'=0} = -(\tau' + n), \quad \omega' \Big|_{u'=1} = 0, \quad \omega' \Big|_{\tau'=0} = \omega'_0, \quad (46)$$

где ω'_0 — решение задачи

$$(\omega'_0)^2 \frac{d^2 \omega'_0}{du'^2} + n(u' - 1) \frac{d\omega'_0}{du'} - 0,5n\omega'_0 = 0, \quad (47)$$

$$\omega'_0 \frac{d\omega'_0}{du} \Big|_{u'=0} = -1, \quad \omega'_0 \Big|_{u'=1} = 0. \quad (48)$$

Повторим рассуждения для задачи (45)–(46). Используя процедуру (19) в виде

$$\omega' = B'_1, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial u'} = \frac{\partial B'_1}{\partial u'} = B'_2, \quad \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u'^2} = \frac{\partial B'_2}{\partial u'} = B'_3, \quad (B'_1)^2 = B'_4,$$

построим матрицы-коэффициенты для соответствующей системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$A'_1 \frac{\partial \vec{B}'}{\partial \tau'} + A'_2 \frac{\partial \vec{B}'}{\partial u'} = C'_1 \vec{B}' + \vec{B}'^T C'_2 \vec{B}', \quad \vec{B}'^T = (B'_1, B'_2, B'_3, B'_4), \quad (49)$$

с квадратичной нелинейностью

$$\vec{B}'^T C'_2 \vec{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (B'_1)^2 \\ B'_3 B'_4 \end{pmatrix}$$

и краевыми условиями

$$B_1' B_2' \Big|_{u'=0} = -(\tau' + n), \quad B_1' \Big|_{u'=1} = 0, \quad B_1' \Big|_{\tau'=0} = \omega'_0. \quad (50)$$

Для нахождения решения ω'_0 задачи (47)–(48) строилась система, аналогичная системе (42).

Асимптотическое решение задачи (38)–(39) по переменным $(\tilde{\tau}, \tilde{u})$ связано с асимптотическим решением задачи (45)–(48) по переменным (τ', u') следующим образом:

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0,5(\tau')^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0,5(\tau')^{-1/2} \omega',$$

$$\tau' = \frac{1}{\tilde{\tau}}, \quad u' = 0,5 \tilde{\tau}^{1/2} \tilde{u},$$

$$\tilde{\omega}(\tilde{u}, \tilde{\tau}) = 0,5(\tau')^{-1/2} \omega'(u', \tau'),$$

$$\tilde{\omega}(\tilde{u}, \tilde{\tau}) = 0,5\sqrt{\tilde{\tau}} \omega' \left(0,5\sqrt{\tilde{\tau}} \tilde{u}, \frac{1}{\tilde{\tau}} \right).$$

Двумерная нестационарная задача формирования пограничного слоя (36)–(37) решена для области $\xi \in [0, \infty]$.

Задача (36)–(37) рассмотрена для случаев $n = 0$ и $n = 1$. Первому отвечает ситуация, когда жидкость в пограничном слое достигнет скорости внешнего течения $U = u_0 x$ очень быстро, т.е. приводится в движение рывком. Тогда пограничный слой также стабилизируется быстро, и функция $\tilde{\omega}(\tilde{\tau}, \tilde{u})$ переходит в $\omega_0(u)$. При $n = 1$ происходит разгон жидкости с ускорением. Сечения полученных решений $\tilde{\omega}(\tilde{\tau}, \tilde{u})$ и $\omega'(\tau', u')$ по переменным $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_k$ и $\tau' = \tau'_k$ соответственно

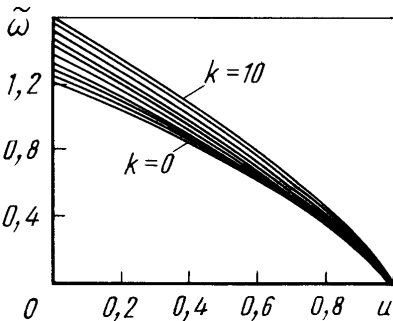


Рис. 4. Случай $n = 1$. Изменение $\tilde{\omega}(\tilde{\tau}, \tilde{u})$ поперек пограничного слоя при $\tilde{\tau} = 0,1k$, $k = 0, 10$

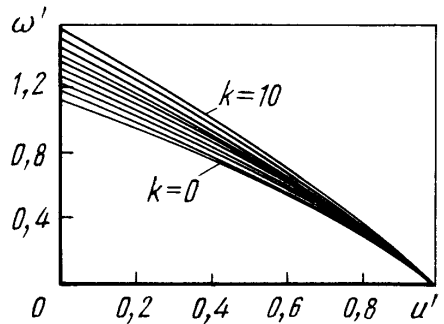


Рис. 5. Случай $n = 1$. Изменение $\omega'(\tau', u')$ поперек пограничного слоя при $\tau' = 0,1k$, $k = 0, 10$

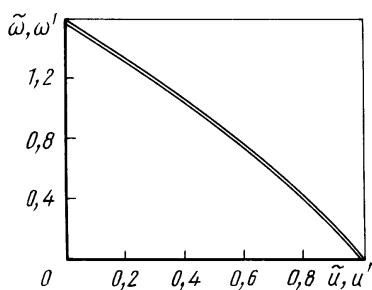


Рис. 6. Случай $n = 1$. Согласование решений $\tilde{\omega}(\tilde{\tau}, \tilde{u})$ и $\omega'(\tau', u')$ при $\tilde{\tau} = \tau' = 1$ стационарной.

($\tilde{\tau}_k = 0,1k$, $\tau' = 0,1k$, $k = \overline{0, 10}$) представлены на рис. 4 и рис. 5. Согласование решений при $\tilde{\tau} = \tau' = 1$ приведено на рис. 6. Решение задачи об изменении пограничного слоя во времени при разгоне с ускорением и разгоне рывком приводит к следующему результату: для любых n при $t \rightarrow \infty$ ($\tilde{\tau} \rightarrow 0$) уравнение (38) сходится к уравнению (32), решение нестационарной задачи $\tilde{\omega}(\tilde{\tau}, \tilde{u})$ стремится к $\omega_0(u)$ — решению задачи

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179. – №4. – С. 802–805.
2. Федоров Ф. И., Бабичев Л. Ф., Кувшинов В. И. Универсальные нелинейные уравнения первого порядка в скалярной электродинамике, теориях гравитации, Веса–Зумино, калибровочной суперсимметрии // Современные проблемы общей теории относительности. – Минск Ин-т физики БАН 1979. – С. 125–143.
3. Geroch R. P. Partial Differential Equations of Physics // General Relativity. – Scottish Universities Summer School in Physics, 1996. – 57 p.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 744 с.
5. Стюартсон К. Теория неустановившихся ламинарных пограничных слоев // Проблемы механики. Вып. IV / Под ред. Х. Драйдена и Т. Кармана. – М.: Ин. лит. – 1963. – С. 9–38.
6. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. – Новосибирск: Наука, 1983. – 272 с.
7. Феоктистов В. В., Феоктистов П. В. Инвариантные решения нестационарных пограничных слоев и их связь с нелинейными уравнениями переменного типа // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 1997. – №1. – С. 14–21.
8. Феоктистов В. В., Феоктистов П. В. Асимптотическая теория контрастных структур переменного типа // Понтрягинские чтения – XIII. Сб. материалов. – Воронеж: ВГУ, 2002. – С. 151–152.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
10. Skobogat'ko V., Myakinnik O. On a Power Series Representation of the General Solution of Fedorov's Set of Equations// Gravitation and Cosmology. — 1995. – V. 1. – № 4. – P. 315–318.
11. Красников Ю. Г., Соловьев В. Р. Нахождение приближенных аналитических решений уравнений Навье–Стокса для стационарного обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью // Механика жидкости и газа. – 1999. – №4. – С. 22–33.
12. Мякинник О. О., Феоктистов В. В. О решении задач пограничного слоя, преобразованных к системе уравнений с квадратичной нелинейностью // Тез. докл. Всероссийской конф. “Необратимые процессы в природе и технике” (23–25 янв. 2001 г.). – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – С. 124–125.

13. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Решение краевой задачи для нелинейной системы, сводящейся к системе с квадратичной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Естественные науки". – 2000. – Т. 5. – № 2. – С. 3–9.
14. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1967. – 428 с.

Статья поступила в редакцию 13.01.2003

Владимир Васильевич Феоктистов родился в 1944 г., окончил в 1967 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р техн. наук, профессор кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии им. Н.Е. Жуковского РАН. Автор более 56 научных работ в области прикладной математики.

V.V. Feoktistov (b. 1944) graduated from the Moscow State University n.a. Lomonosov in 1967. D.Sc. (Eng.), professor of "Mathematical Simulation" department of the Bauman Moscow State Technical University. Winner of the N.Ye. Zhukovsky Prize of the Russian Academy of Sciences. Author of over 56 publications in the field of applied mathematics.



Ольга Олеговна Мякинник окончила в 1984 г. Львовский государственный университет. Сотрудник Института прикладных проблем механики и математики АН Украины (г. Львов), стажер кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 12 научных работ в области нелинейных уравнений математической физики.

O.O. Myakinnik graduated from the Lvov State University in 1984. Worker of the Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the Ukrainian Academy of Sciences (city of Lvov), trainee of "Mathematical Simulation" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 12 publications in the field of nonlinear equations of mathematical physics.

