УДК 519.872

С. И. Тришечкин

СИСТЕМА $\mathrm{SM}_2/\mathrm{MSP}/1/(n_1, n_2)$ С ДИСЦИПЛИНОЙ СЛУЧАЙНОГО ВЫБОРА ЗАЯВКИ ИЗ ОЧЕРЕДИ НА ОБСЛУЖИВАНИЕ И РАЗДЕЛЬНЫМИ НАКОПИТЕЛЯМИ[1]

Рассмотрена однолинейная система массового обслуживания с полумарковским входящим потоком заявок двух типов, марковским процессом обслуживания заявок, раздельными накопителями конечной емкости и дисциплиной случайного выбора заявки из очереди на обслуживание. Для этой системы с помощью метода вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания.

Описание системы. Рассмотрим систему массового обслуживания $SM_2/MSP/1$ с полумарковским входящим потоком заявок двух типов. Этот поток определяется полумарковским процессом, функционирующим на конечном множестве состояний — фаз генерации (заявок) $\{1, 2, \ldots, l\}$, $l < \infty$, и управляемым матрицей $A(x)$. Матрица $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$ является суммой матриц $A_1(x)$ и $A_2(x)$, где элемент $\big(A_k(x)\big)_{ij}$, $i, j = \overline{1, l}$, $k = 1, 2$, матрицы $A_k(x)$ представляет собой условную вероятность того, что следующая заявка поступит через время, меньшее x, после предыдущей и будет k-го типа, а процесс генерации перейдет на j-ю фазу при условии, что после поступления предыдущей заявки была i-я фаза генерации. Положим $\overline{A} = \int\limits_0^\infty x\,dA(x)$. Допустим, что для всех i и j выполнено условие $\overline{A}_{ij} < \infty$, и при рассмотреннии стационарного распределения по времени будем полагать, что время между поступлениями заявок не может принимать только значения jt, где t — положительное число, а $j = 0, 1, \ldots$.

Марковский процесс обслуживания заявок определяется следующим образом. Имеется марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом m состояний (фаз обслуживания). Тогда если в некоторый момент в системе на обслуживании находится заявка и фаза

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-07-90147).

обслуживания i-я, $i = \overline{1,m}$, то за малое время Δ с вероятностью $\Lambda_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j-ю, $j = \overline{1,m}$, $j \neq i$, и заявка будет продолжать обслуживаться, а с вероятностью $N_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j-ю, $j = \overline{1,m}$, но обслуживание заявки закончится, и она покинет систему.

Дисциплина случайного выбора заявки из очереди на обслуживание для рассматриваемой системы заключается в следующем. Если в момент окончания обслуживания заявки в системе имеется l_1 заявок первого типа и l_2 второго, то с вероятностью $l_k(\Omega_k)_{js}/(l_1 + l_2)$ случайным образом выбирается одна из заявок k-го типа, $k = 1, 2$, и процесс обслуживания изменяет свою фазу с j-й на s-ю. Если же после окончания обслуживания очередной заявки в системе не остается других заявок, то процесс обслуживания сохраняет свою фазу до поступления новой заявки, а затем, если новая заявка имеет k-й тип, то с вероятностью $(\Omega_k)_{js}$ изменяет фазу с j-й на s-ю. Матрицы из элементов Λ_{ij}, N_{ij} и $(\Omega_k)_{js}$ обозначим Λ, N и Ω_k. Очевидно, что матрицы Ω_k, $k = 1, 2$, являются стохастическими. Введем также матрицу $\Lambda^* = \Lambda + N$, причем матрица Λ^* предполагается неразложимой, а матрица N — ненулевой.

Для каждого типа заявок в системе имеются накопители конечной емкости: $1 \leq n_1 < \infty$ для первого типа заявок и $1 \leq n_2 < \infty$ для заявок второго типа. Заявка того типа, накопитель которого заполнен, теряется при поступлении в систему.

Системы с дисциплиной случайного выбора заявок из очереди на обслуживание исследовались различными авторами. В частности, для анализа системы $M^{[X]}/G/1/\infty$ с такой дисциплиной и пуассоновским неординарным входящим потоком в работах [1–3] был применен подход, основанный на ветвящихся процессах Крампа–Мода–Ягерса. Метод анализа системы с марковским входящим потоком однотипных заявок, также основанный на ветвящихся процессах специального типа, предложен в работе [4]. Система с аналогичными характеристиками входящих потоков и дисциплиной обслуживания, но с общим накопителем, исследовалась в работе [9]. В работах [5–6] исследовались системы с двумя типами заявок, марковским входящим потоком, а также общей и раздельными очередями заявок каждого типа.

Вспомогательные матрицы. Введем $F_{l_1,l_2}^{k_1,k_2}(x)$ — матрицу, элемент $\left(F_{l_1,l_2}^{k,k_2}(x)\right)_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в момент x в системе в очереди будет находиться k_1 и k_2 заявок первого и второго типа соответственно (при этом если $k_1 = k_2 = 0$, то на приборе будет обслуживаться заявка), а фаза процесса обслуживания будет j-я при условии, что в начальный момент в системе в очереди было l_1 и l_2 заявок первого и второго типа соответственно (если

$l_1 = l_2 = 0$, то на приборе обслуживалась заявка), процесс обслуживания находился на i-й фазе и за время x в систему не поступило ни одной заявки. Введем также $F^*_{l_1, l_2}(x)$ — матрицу, элемент $\left(F^*_{l_1, l_2}(x)\right)_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в момент x система будет свободна, а фаза процесса обслуживания будет j-я при условии, что в начальный момент в системе в очереди было l_1 и l_2 заявок первого и второго типа соответственно (если $l_1 = l_2 = 0$, то на приборе обслуживалась заявка), процесс обслуживания находился на i-й фазе и за время x в систему не поступило ни одной заявки.

Матрицы $F^{k_1, k_2}_{l_1, l_2}(x)$ и $F^*_{l_1, l_2}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$F^{l_1, l_2}_{l_1, l_2}(x) = e^{\Lambda x}, \qquad l_1, l_2 \geq 0, \tag{1}$$

$$F^{k, l_2}_{l_1, l_2}(x) = \frac{n_1}{l_1 + l_2} \int\limits_0^x e^{\Lambda y} N \Omega_1 F^{k, l_2}_{l_1 - 1, l_2}(x - y)\, dy, \quad l_2 \geq 0, \quad 0 \leq k < n_1, \tag{2}$$

$$F^{l_1, k}_{l_1, l_2}(x) = \frac{n_2}{l_1 + l_2} \int\limits_0^x e^{\Lambda y} N \Omega_2 F^{l_1, k}_{l_1, l_2 - 1}(x - y)\, dy, \quad l_1 \geq 0, \quad 0 \leq k < l_2, \tag{3}$$

$$F^{k_1, k_2}_{l_1, l_2}(x) = \frac{1}{l_1 + l_2} \int\limits_0^x e^{\Lambda y} N \big(l_1 \Omega_1 F^{k_1, k_2}_{l_1 - 1, l_2}(x - y) +$$

$$+ n_2 \Omega_2 F^{k_1, k_2}_{l_1, l_2 - 1}(x - y)\big)\, dy, \quad 0 \leq k_1 < l_1, \quad 0 \leq k_2 < l_2, \tag{4}$$

$$F^*_{l_1, l_2}(x) = \int\limits_0^x F^{0, 0}_{l_1, l_2}(y) N\, dy, \qquad l_1, l_2 \geq 0. \tag{5}$$

Поясним вывод соотношений (1)–(5) на примере формулы (4). Для этого рассмотрим на интервале $[0, x)$ момент времени y, в который окончится обслуживание первой заявки. С учетом изменения фазы обслуживания вероятность того, что эта заявка не будет обслужена к моменту y, определяется матрицей $e^{\Lambda y}$. В момент y с интенсивностью N заканчивается обслуживание поступившей заявки, и на прибор поступает следующая заявка, которая с вероятностью $(l_k/(l_1 + l_2))\Omega_k$, $k = 1, 2$, окажется заявкой k-го типа (с учетом изменения фазы обслуживания). На интервале времени $[y, x)$ числа заявок первого и второго типа должны уменьшиться до k_1 и k_2 соответственно, что в зависимости от типа второй обслуживающейся заявки происходит с (матричной) вероятностью $F^{k_1, k_2}_{l_1 - 1, l_2}(x - y)$ или $F^{k_1, k_2}_{l_1, l_2 - 1}(x - y)$. Применяя формулу полной вероятности, приходим к соотношению (4).

Формулы (1)–(5) позволяют вычислять матрицы $F_{l_1,l_2}^{k_1,k_2}(x)$ и $F_{l_1,l_2}^{*}(x)$ рекуррентно. При этом сначала определяются матрицы $F_{l_1,l_2}^{l_1,l_2}(x) = e^{\Lambda x}$, затем матрицы $F_{n_1,n_2}^{l_1-1,l_2}(x)$ и $F_{l_1,l_2}^{l_1,l_2-1}(x)$ и т.д. и, наконец, матрицы $F_{l_1,l_2}^{0,0}(x)$ и $F_{l_1,l_2}^{*}(x)$. Один из возможных алгоритмов вычисления этих и других используемых в дальнейшем матриц более подробно описан в работе [9].

Вложенная цепь Маркова. Пусть $\xi(t)$ — фаза генерации, $\eta(t)$ — фаза обслуживания, а $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ — числа заявок соответственно первого и второго типа в очереди в системе в момент t.

Рассмотрим последовательные моменты $\tau_n,\ \ n \geq 0$, поступления заявок в систему.

Определим случайные величины $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$, $\eta_n = \xi(\tau_n + 0)$, $\nu_{1n} = \nu_1(\tau_n + 0)$ и $\nu_{2n} = \nu_2(\tau_n + 0)$, которые представляют собой соответственно фазу генерации, фазу обслуживания и числа заявок первого и второго типов в очереди в системе непосредственно после момента поступления n-й заявки. Положим $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n, \nu_{1n}, \nu_{2n})$. Тогда последовательность $\{\zeta_n,\ \ n \geq 0\}$ образует однородную цепь Маркова, которую будем называть вложенной. Очевидно, что множество состояний $\mathcal{X}$ вложенной цепи Маркова имеет вид

$$\mathcal{X} = \{(i, j, l_1, l_2),\ \ i = \overline{1, l},\ \ j = \overline{1, m},\ \ 0 \leq l_1 \leq n_1,\ 0 \leq l_2 \leq n_2\},$$

где i, j, l_1 и l_2 — соответственно фаза генерации, фаза обслуживания и числа заявок первого и второго типа в очереди в системе непосредственно после момента поступления заявки.

Далее каждой паре индексов $i, j,\ \ i = \overline{1, l},\ \ j = \overline{1, m}$, поставим в соответствие один индекс $u = m(i-1)+j$. Тогда множество состояний $\mathcal{X}$ вложенной цепи Маркова можно представить в виде

$$\mathcal{X} = \{(u, n_1, n_2),\ \ u = \overline{1, lm},\ \ 0 \leq l_1 \leq n_1,\ 0 \leq l_2 \leq n_2\},$$

что позволит для упрощения записи пользоваться кронекеровым произведением матриц.

Обозначим через P матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $\{\zeta_n,\ \ n \geq 0\}$. Матрица P, в свою очередь, состоит из матриц $P_{n_1,n_2}^{k_1,k_2}$. Элемент $(P_{l_1,l_2}^{k_1,k_2})_{u_1 u_2}$ матрицы $P_{l_1,l_2}^{k_1,k_2}$ представляет собой условную вероятность того, что после поступления очередной заявки в системе в очереди будет находиться k_1 и k_2 заявок первого и второго типа соответственно, а фазы процессов генерации и обслуживания будут i_2-я и j_2-я, при условии, что после поступления предыдущей заявки в системе в очереди было l_1 и l_2 заявок первого и второго типа, а процессы генерации и обслуживания находились на i_1-й и j_1-й фазах.

В соответствии с принятым соглашением имеем $u_1 = m(i_1-1)+j_1$, $u_2 = m(i_2-1)+j_2$.

Матрицы $P_{l_1,l_2}^{k_1,k_2}$ определяются следующими формулами:

$$P_{l_1,l_2}^{0,0} = \int_0^\infty dA_1(x)\otimes\bigl(F_{l_1,l_2}^{*}(x)\Omega_1\bigr) + \int_0^\infty dA_2(x)\otimes\bigl(F_{l_1,l_2}^{*}(x)\Omega_2\bigr),$$

$$0\le l_1\le n_1,\quad 0\le l_2\le n_2, \tag{6}$$

$$P_{l_1,l_2}^{k,0} = \int_0^\infty dA_1(x)\otimes F_{l_1,l_2}^{k-1,0}(x),\quad l_1<n_1,\quad 0\le l_2\le n_2,\quad 0<k\le l_1+1, \tag{7}$$

$$P_{l_1,l_2}^{0,k} = \int_0^\infty dA_2(x)\otimes F_{l_1,l_2}^{0,k-1}(x),\quad 0\le l_1\le n_1,\quad l_2<n_2,\quad 0<k\le n_2+1, \tag{8}$$

$$P_{l_1,l_2}^{k_1,k_2} = \int_0^\infty dA_1(x)\otimes F_{l_1,l_2}^{k_1-1,k_2}(x) + \int_0^\infty dA_2(x)\otimes F_{l_1,l_2}^{k_1,k_2-1}(x),$$

$$0\le l_1\le n_1,\quad 0\le l_2\le n_2,\quad 0<k_1\le l_1,\quad 0<k_2\le l_2, \tag{9}$$

$$P_{l_1,l_2}^{l_1+1,k} = \int_0^\infty dA_1(x)\otimes F_{l_1,l_2}^{l_1,k}(x),\quad 0\le l_1<n_1,\quad 0\le l_2\le n_2,\quad 0<k\le l_2, \tag{10}$$

$$P_{l_1,l_2}^{k,l_2+1} = \int_0^\infty dA_2(x)\otimes F_{l_1,l_2}^{k,l_2}(x),\quad 0\le l_1\le n_1,\quad 0\le l_2<n_2,\quad 0<k\le l_1, \tag{11}$$

$$P_{n_1,k}^{n_1,0} = \int_0^\infty dA_1(x)\otimes\bigl(F_{n_1,k}^{n_1-1,0}(x)+F_{n_1,k}^{n_1,0}(x)\bigr),\quad 0\le k\le n_2, \tag{12}$$

$$P_{n_1,k_1}^{n_1,k_2} = \int_0^\infty dA_1(x)\otimes\bigl(F_{n_1,k_1}^{n_1-1,k_2}(x)+F_{n_1,k_1}^{n_1,k_2}(x)\bigr)+$$

$$+\int_0^\infty dA_2(x)\otimes\bigl(F_{n_1,k_1}^{n_1,k_2-1}(x)\bigr),\quad k_2\le k_1+1,\quad 0<k_2<n_2,\quad 0\le k_1\le n_2, \tag{13}$$

$$P_{k,n_2}^{0,n_2} = \int_0^\infty dA_2(x)\otimes\bigl(F_{k,n_2}^{0,n_2-1}(x)+F_{k,n_2}^{0,n_2}(x)\bigr),\quad 0\le k,\le n_1, \tag{14}$$

$$P^{k_2,\,n_2}_{k_1,\,n_2} = \int\limits_0^\infty dA_2(x) \otimes \left(F^{k_2,\,n_2-1}_{k_1,\,n_2}(x) + F^{k_2,\,n_2}_{k_1,\,n_2}(x)\right) + \int\limits_0^\infty dA_1(x) \otimes F^{k_2-1,\,n_2}_{k_1,\,n_2}(x),$$

$$0 < k_1 \le k_2 < n_2, \quad k_2 \le k_1 + 1, \quad 0 < k_2 < n_1, \quad 0 \le k_1 \le n_1, \quad (15)$$

$$P^{n_1,\,n_2}_{n_1,\,n_2} = \int\limits_0^\infty dA_1(x) \otimes \left(F^{n_1-1,\,n_2}_{n_1,\,n_2}(x) + F^{n_1,\,n_2}_{n_1,\,n_2}(x)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty dA_2(x) \otimes \left(F^{n_1,\,n_2-1}_{n_1,\,n_2}(x) + F^{n_1,\,n_2}_{n_1,\,n_2}(x)\right). \quad (16)$$

Формула (16) получена следующим образом. В системе после поступления очередной заявки содержится n_1 заявок первого и n_2 заявок второго типа при условии, что после поступления предыдущей заявки было также n_1 заявок первого и n_2 заявок второго типа, в следующих случаях:

— за время между поступлениями заявок не обслуживается ни одна заявка или обслуживается только одна заявка первого типа и затем поступает заявка также первого типа;

— за время между поступлениями заявок не обслуживается ни одна заявка или обслуживается только одна заявка второго типа и затем поступает заявка также второго типа.

Учитывая, что время между поступлениями заявок имеет функцию распределения $A_1(x)$ (приходит заявка первого типа) или $A_2(x)$ (приходит заявка второго типа), получаем соотношение (16).

Аналогичным образом получены формулы (6)–(15). Как обычно, матричная запись соответствует фазам генерации и обслуживания заявок.

Остальные матрицы $P^{k_1,\,k_2}_{l_1,\,l_2}$ являются нулевыми.

Решение системы уравнений равновесия. Обозначим через $\vec{\pi}$ вектор стационарных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова. Заметим, что вектор $\vec{\pi}$ представляет собой набор векторов $\vec{\pi}_{l_1,\,l_2}$, $0 \le l_1 \le n_1,\ 0 \le l_2 \le n_2$, где координата $(\vec{\pi}_{l_1,\,l_2})_u$ вектора $\vec{\pi}_{l_1,\,l_2}$ представляет собой стационарную вероятность того, что в системе в очереди находится l_1 и l_2 заявок первого и второго типа, а фазы процессов генерации и обслуживания i-я и j-я, $u = m(i-1) + j$. Тогда вектор $\vec{\pi}$ удовлетворяет системе уравнений равновесия

$$\vec{\pi} P = \vec{\pi}$$

с условием нормировки

$$\sum_{\substack{0\le l_1\le n_1,\\ 0\le l_2\le n_2}} \vec{\pi}_{l_1,\,l_2}\vec{1}=1$$

(здесь и далее $\vec{l}$ означает вектор-столбец $(1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$, размерность которого определяется либо нижним индексом, либо из контекста).

Стандартным методом нахождения стационарных вероятностей является решение системы уравнений равновесия методом Гаусса. Однако алгоритм Гаусса при численной реализации имеет свойство накапливать ошибку и, кроме того, приводит к затратам машинного времени, пропорциональным третьей степени размерности системы. Поскольку рассматриваемая система имеет размерность n_1n_2I, то затраты машинного времени при решении методом Гаусса пропорциональны $(n_1n_2I)^3$. Поэтому предлагается другой алгоритм, в котором из-за порядка расчета ошибка не накапливается, а за счет учета частичной разреженности матрицы вероятностей переходов алгоритм затрачивает машинное время, пропорциональное $n_1^2n_2^3I^3$. Отметим, что разница между типами частиц возникает вследствие системы нумерации, принимаемой ниже. Если поменять местами типы частиц при нумерации, то можно получить время работы, пропорциональное $n_1^3n_2^2I^3$.

Для удобства изложения обозначим в этом разделе состояния вложенной цепи Маркова по числу заявок в очереди на обслуживание через q_k, где k — номер состояния, полученный следующим образом: нумеруем состояния от бо́льшего числа заявок к меньшему сначала по первому индексу, затем по второму. Таким образом, состояние (n_1,n_2) обозначим через q_1, состояние (n_1-1,n_2) — через q_2, (n_1-2,n_2) — через q_3 и т.д. (рис.1). Очевидно, что число состояний для рассматриваемой системы обслуживания с r местами ожидания равно $N_r=(n_1+{}+1)(n_2+1)$. Естественно, каждое состояние q_k, полученное таким способом, состоит из lm состояний вложенной цепи Маркова, отвечающих различным значениям фаз генерации и обслуживания.

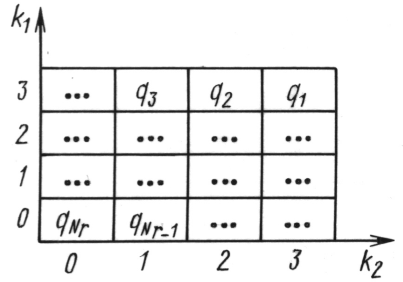

Рис. 1. Нумерация состояний процесса по количеству заявок

Алгоритм решения системы уравнений равновесия включает следующие действия.

1. Последовательно исключаются состояния q_x с наибольшим номером, и рассматриваются цепи Маркова без одного состояния (обоснование алгоритма приводится в работе [7, гл. 6]. Обозначим матрицу переходных вероятно-

стей цепи Маркова с j состояниями через $P^{[j]}$. Естественно, матрица $P^{[j]}$ состоит из матриц $P^{[j]}_{k,n}$, соответствующих переходам из состояния q_k в состояние q_n. 2. Пересчитывается матрица переходных вероятностей $P^{[j-1]}_{k,\,n}$ для новой цепи Маркова. Именно при выполнении этого шага происходит экономия вычислительных ресурсов по сравнению с методом Гаусса. Пусть q_x — исключаемое состояние, q_a — элемент множества состояний, в которые можно попасть из исключаемого состояния за один шаг, q_b — элемент множества всех неисключенных состояний. Обозначим через $Q_{x,a}$ вероятность того, что при первом выходе из состояния q_x цепь Маркова с x состояниями попадет в состояние q_a. Тогда

$$Q_{x,a} = \left(E - P^{[x]}_{x,\,x}\right)^{-1} P^{[x]}_{x,\,a},$$

а пересчет P будет производится по формуле

$$P^{[x-1]}_{b,\,a} = P^{[x]}_{b,\,a} + P^{[x]}_{b,\,x} Q_{x,\,a}.$$

На рис. 2 белым цветом обозначены уже исключенные состояния; q_x — состояние, которое исключается на данном шаге; темным цветом обозначено множество состояний, в которые можно попасть из исключаемого состояния за один шаг (q_a); темные и серые ячейки представляют собой множество всех еще не исключенных состояний (q_b).

3. Для цепи Маркова с одним состоянием q_1 и матрицей переходных вероятностей $P^{[1]}_{1,\,1}$ решается система уравнений равновесия

$$\vec{\pi}^{[1]}_{q_1} = \vec{\pi}^{[1]}_{q_1} P^{[1]}_{1,\,1},$$

соответствующая этой цепи, и с точностью до константы находится вектор $\vec{\pi}^{[1]}_{q_1}$ стационарных вероятностей состояний такой цепи Маркова. Этот же вектор $\vec{\pi}^{[1]}_{q_1}$, с точностью до другой константы, которая позже будет определена из условия нормировки, является вектором $\vec{\pi}_{n_1,\,n_2}$ стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова.

4. Последовательно добавляется по одному состоянию q_i, и рассматривается цепь Маркова с i состояниями. Находится $\vec{\pi}^{[i]}_{q_i}$ из соотношения

$$\sum_{j=1}^{i} \vec{\pi}^{[j]}_{q_j} P^{[i]}_{j,\,i} = \vec{\pi}^{[i]}_{q_i},$$

представляющего собой последнее уравнение системы уравнений равновесия для цепи Маркова с i состояниями. Вектор $\vec{\pi}^{[i]}_{q_i}$, с точностью до

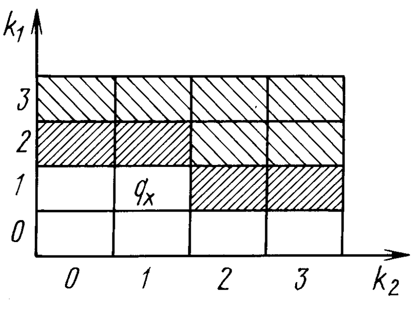

Рис. 2. Порядок пересчета P

константы, определяемой из условия нормировки, является также соответствующим вектором стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова. Здесь $\vec{\pi}_{q_j}^{[j]}$, $j = \overline{1,\, i-1}$, — векторы стационарных вероятностей состояний цепей Маркова с j состояниями, уже найденные ранее.

5. Производится нормирование полученных стационарных вероятностей состояний $\vec{\pi}_{q_i}^{[i]}$ с помощью условия нормировки

$$\sum_{k=1}^{N_r} \vec{\pi}_{q_k}^{[k]} \vec{1} = 1.$$

Отметим, что через стационарные вероятности состояний вложенной цепи Маркова легко выражаются стационарные вероятности характеристик очереди по моментам поступления заявок, что отличает рассматриваемую систему от двойственной системы с марковским входящим потоком и произвольными распределениями времен обслуживания заявок первого и второго типа (рассмотренной в работе [6]). В частности, стационарная вероятность $p_{\text{пот}}$ потери заявки определяется формулой

$$p_{\text{пот}} = \vec{\pi}_{n_1,\, n_2} \int\limits_0^\infty \big(dA(x) \otimes F_{n_1,\, n_2}^{n_1,\, n_2}(x)\big)\vec{1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_2-1} \vec{\pi}_{n_1,\, k} \int\limits_0^\infty \big(dA_1(x) \otimes F_{n_1,\, k}^{n_1,\, k}(x)\big)\vec{1} + \sum_{k=0}^{n_1-1} \vec{\pi}_{k,\, n_2} \int\limits_0^\infty \big(dA_2(x) \otimes F_{k,\, n_2}^{k,\, n_2}(x)\big)\vec{1},$$

стационарная вероятность $p_{\text{об}}$ того, что поступающая заявка сразу же начнет обслуживаться, имеет вид

$$p_{\text{об}} = \vec{\pi}_{0,\, 0}\vec{1},$$

а стационарная вероятность $p_{n_1,\, n_2}^{(A)}$ того, что заявка поступит в момент, когда прибор занят и в очереди находится l_1 и l_2 заявок первого и второго типа, $0 \le l_1 \le n_1,\ 0 \le l_2 \le n_2$, задается выражением

$$\vec{p}_{l_1,\, l_2}^{(A)} = \sum_{\substack{l_1 \le k_1 \le n_1, \\ l_1 \le k_1 \le n_1}} \vec{\pi}_{k_1,\, k_2} \int\limits_0^\infty \big(dA(x) \otimes F_{k_1,\, k_2}^{l_1,\, l_2}(x)\big)\vec{1}.$$

Стационарные вероятности по времени. Если стационарное распределение вложенной цепи Маркова известно, то нетрудно определить стационарные вероятности введенного ранее процесса $(\nu_1(t),$

$\nu_2(t), \xi(t), \eta(t))$, описывающего функционирование рассматриваемой системы во времени.

Обозначим через $\vec{P}_0(x)$ вектор, координатами $\left(\vec{P}_0(x)\right)_u$, $u = \overline{1, lm}$, которого являются стационарные вероятности того, что система свободна от заявок, фазы генерации и обслуживания i-я и j-я соответственно, $u = m(i-1) + j$, и время, прошедшее с момента поступления последней заявки, меньше x; а через $\vec{P}_{k_1, k_2}(x)$, $0 \leq k_1 \leq n_1$, $0 \leq k_2 \leq n_2$, обозначим вектор с координатами $\left(\vec{P}_{k_1, k_2}(x)\right)_u$, $u = \overline{1, lm}$, соответствующими стационарным вероятностям того, что прибор занят обслуживанием заявки, в очереди находится k_1 и k_2 заявок первого и второго типа, фазы генерации и обслуживания i-я и j-я, $u = m(i-1) + j$, и время, прошедшее с момента поступления последней заявки, меньше x. Положим $\vec{p}_0(x) = \vec{P}'_0(x)$ и $\vec{p}_{k_1, k_2}(x) = \vec{P}'_{k_1, k_2}(x)$.

Для того чтобы найти $\vec{p}_0(x)$ и $\vec{p}_{k_1, k_2}(x)$, воспользуемся элементами теории полумарковских процессов. Для этого сначала обратимся к полумарковскому процессу генерации заявок и положим $A = A(\infty)$. Обозначим через $\vec{p}^*$ вектор стационарных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова полумарковского процесса генерации заявок, порожденной моментами изменения фаз генерации. Этот вектор определяется из системы уравнений равновесия

$$\vec{p}^* = \vec{p}^* A$$

с условием нормировки

$$\vec{p}^* \vec{1} = 1.$$

Тогда среднее время a между поступлениями заявок имеет в стационарном режиме функционирования вид $a = \vec{p}^* \overline{A} \vec{1}$.

Наконец, обозначим через $A^{(d)}(x)$ диагональную матрицу с диагональными элементами $\left(A^{(d)}(x)\right)_{ii} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{m} A_{ij}(x)$, представляющими собой вероятности того, что время между поступлениями соседних заявок будет больше x, при условии, что после поступления первой из них фаза генерации i-я.

Заметим теперь, что в стационарном режиме функционирования в некоторый момент времени (пусть это момент 0) в системе отсутствуют заявки и время, прошедшее с момента прихода последней заявки, равно x, если последняя заявка поступила в момент $-x$ (интенсивность поступления заявок равна $1/a$), то после ее прихода в системе оказалось l_1 и l_2 заявок первого и второго типа (с вероятностью $\vec{\pi}_{l_1, l_2}$), а за время x не поступало больше заявок (с вероятностью $A^{(d)}(x)$), и все находившиеся в системе заявки были обслужены (с вероятностью $F^*_{l_1, l_2}(x)$).

Векторные и матричные обозначения учитывают фазы генерации и обслуживания. Диагональный вид матрицы $A^{(d)}(x)$ соответствует тому, что между поступлениями заявок фаза генерации не изменяется. Отсюда получаем, что вектор $\vec{p}_0(x)$ выражается через вектор стационарных вероятностей $\vec{\pi}$:

$$\vec{p}_0(x) = \frac{1}{a} \sum_{\substack{0 \le l_1 \le n_1, \\ 0 \le l_2 \le n_2}} \vec{\pi}_{l_1, l_2} \big(A^{(d)}(x) \otimes F^*_{l_1, l_2}(x)\big).$$

Аналогично получим следующее выражение для векторов $\vec{p}_{k_1, k_2}(x)$:

$$\vec{p}_{k_1, k_2}(x) = \frac{1}{a} \sum_{\substack{0 \le l_1 \le n_1, \\ 0 \le l_2 \le n_2}} \vec{\pi}_{l_1, l_2} \big(A^{(d)}(x) \otimes F^{k_1, k_2}_{l_1, l_2}(x)\big).$$

Нетрудно видеть, что векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_{k_1, k_2}$, $0 \le k_1 \le n_1$, $0 \le k_2 \le n_2$, координатами которых являются стационарная вероятность того, что система свободна от заявок, и стационарные вероятности того, что в очереди находится k_1 и k_2 заявок первого и второго типа, без учета времени, прошедшего с момента поступления последней заявки, при различных фазах процессов генерации и обслуживания имеют вид

$$\vec{p}_0 = \int\limits_0^\infty \vec{p}_0(x)\,dx = \frac{1}{a} \sum_{\substack{0 \le l_1 \le n_1, \\ 0 \le l_2 \le n_2}} \vec{\pi}_{l_1, l_2} \int\limits_0^\infty \big(A^{(d)}(x) \otimes F^*_{l_1, l_2}(x)\big)\,dx,$$

$$\vec{p}_{k_1, k_2} = \int\limits_0^\infty \vec{p}_{k_1, k_2}(x)\,dx = \frac{1}{a} \sum_{\substack{0 \le l_1 \le n_1, \\ 0 \le l_2 \le n_2}} \vec{\pi}_{l_1, l_2} \int\limits_0^\infty \big(A^{(d)}(x) \otimes F^{k_1, k_2}_{l_1, l_2}(x)\big)\,dx.$$

Стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания. Вычислим в терминах преобразования Лапласа–Стилтьеса стационарные характеристики времени пребывания заявки v-го типа в системе. Поскольку для заявок обоих типов формулы идентичны, ограничимся рассмотрением заявки первого типа.

Пусть в начальный момент времени 0 в системе находится l_1 и l_2, $0 \le l_1 \le n_1$, $0 \le l_2 \le n_2$, заявок первого и второго типа (при этом на приборе обслуживается заявка), одна из заявок первого типа является выделенной, и процесс обслуживания находится на i-й фазе. Обозначим через $G^{1, k_1, k_2}_{l_1, l_2}(x)$ матрицу, элемент $\big(G^{1, k_1, k_2}_{l_1, l_2}(x)\big)_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в момент x в системе в очереди будет находиться $k_1 \ge 1$ и $k_2 \ge 0$ заявок первого и второго типа, фаза обслуживания будет j-я и выделенная заявка останется в очереди при совместном выполнении введенного выше условия и условия, что за время x в систему не поступит ни одной заявки.

Матрицы $G^{1,k_1,k_2}_{l_1,l_2}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$G^{1,l_1,l_2}_{l_1,l_2}(x) = e^{\Lambda x}, \quad l_1 \geq 1, \quad l_2 \geq 0, \tag{17}$$

$$G^{1,k,l_2}_{l_1,l_2}(x) = \frac{l_1-1}{l_1+l_2}\int\limits_0^x e^{\Lambda y} N\Omega_1 G^{1,k,l_2}_{l_1-1,l_2}(x-y)\,dy, \quad l_2 \geq 0, \quad 1 \leq k < l_1, \tag{18}$$

$$G^{1,l_1,k}_{l_1,l_2}(x) = \frac{l_2}{l_1+l_2}\int\limits_0^x e^{\Lambda y} N\Omega_2 G^{1,l_1,k)}_{l_1,l_2-1}(x-y)\,dy, \quad l_1 \geq 1, \quad 0 \leq k < l_2, \tag{19}$$

$$G^{1,k_1,k_2}_{l_1,l_2}(x) = \frac{1}{l_1+l_2}\int\limits_0^x e^{\Lambda y} N\big((l_1-1)\Omega_1 G^{1,k_1,k_2}_{l_1-1,l_2}(x-y)+$$

$$+l_2\Omega_2 G^{1,k_1,k_2}_{l_1,l_2-1}(x-y)\big)\,dy, \quad 1 \leq k_1 < l_1, \quad 0 \leq k_2 < l_2, \tag{20}$$

которые получены точно так же, как формулы (1)–(4), но с учетом того, что если в момент освобождения прибора в очереди находится l_1 заявок первого типа и на обслуживание выбирается заявка именно первого типа, то вероятность выделенной заявке остаться в очереди равна $(l_1-1)/l_1$.

Как и формулы (1)–(4), соотношения (17)–(20) позволяют вычислять матрицы $G^{1,k_1,k_2}_{l_1,l_2}(x)$ рекуррентно.

Положим

$$\widetilde{G}^{1,k_1,k_2}_{v,l_1,l_2}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dA_v(x) \otimes G^{1,k_1,k_2}_{l_1,l_2}(x), \quad v = 1,2.$$

Элемент $\left(\widetilde{G}^{1,k_1,k_2}_{v,l_1,l_2}(s)\right)_{u_1u_2}$ матрицы $\widetilde{G}^{k_1,k_2}_{v,l_1,l_2}(s)$ представляет собой преобразование Лапласа–Стилтьеса для времени между поступлениями заявок, умноженного на индикатор события, состоящего в том, что в момент поступления второй заявки в системе в очереди будет находиться $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 0$ заявок первого и второго типа, вторая заявка будет v-го типа, фаза генерации будет i_2-я, фаза обслуживания будет j_2-я, $u_2 = m(i_2-1)+j_2$, и выделенная заявка первого типа останется в очереди при условии, что после поступления первой заявки в системе находилось $l_1 \geq 1$ и $l_2 \geq 0$ заявок первого и второго типа, фаза генерации была i_1-я и фаза обслуживания была j_1-я, $u_1 = m(i_1 - 1) + j_1$.

Снова предположим, что в начальный момент 0 в системе находится l_1 и l_2 заявок первого и второго типа, $0 \leq l_1 \leq n_1$, $0 \leq l_2 \leq n_2$, одна из заявок первого типа является выделенной и процесс обслуживания находится на i-й фазе. Обозначим через $H^{(1)}_{l_1,\,l_2}(x)$ матрицу, элемент $\big(H^{(1)}_{l_1,\,l_2}(x)\big)_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что выделенная заявка начнет обслуживаться до момента x и в начале ее обслуживания фаза обслуживания будет j-я при совместном выполнении введенного выше условия и условия, что за время x в систему не поступит ни одной заявки. Положим $h^{(1)}_{l_1,\,l_2}(x) = \big(H^{(1)}_{l_1,\,l_2}(x)\big)'$.

Поскольку выделенная заявка первого типа поступает на прибор в момент x в том случае, когда к моменту x в очереди останется k_1 и k_2, $1 \leq k_1 \leq l_1$, $0 \leq k_2 \leq l_2$, заявок первого и второго типа (в том числе выделенная заявка), в момент x окончится обслуживание заявки, и на прибор будет выбрана именно выделенная заявка, то получаем

$$h^{(1)}_{l_1,\,l_2}(x) = \frac{1}{k_1 + k_2} \sum_{k_1=1}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} G^{1,\,k_1,\,k_2}_{l_1,\,l_2}(x) N \Omega_1.$$

Положим

$$\widetilde{H}^{(1)}_{l_1,\,l_2}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} \big(\overline{A}(x)\vec{1}\big) \otimes h^{(1)}_{l_1,\,l_2}(x)\, dx.$$

Тогда элемент $\big(\widetilde{H}^{(1)}_{l_1,\,l_2}(s)\big)_{uj_2}$ матрицы $\widetilde{H}^{(1)}_{l_1,\,l_2}(s)$ представляет собой преобразование Лапласа–Стилтьеса для момента поступления выделенной заявки первого типа на прибор, умноженного на индикатор события, состоящего в том, что до этого момента в систему не поступит новая заявка и в этот момент фаза обслуживания будет j_2-я при условии, что в начальный момент поступила заявка (возможно, выделенная) и после ее поступления в системе оказалось $l_1 \geq 1$ и $l_2 \geq 0$ заявок первого и второго типа, фаза генерации была i_1-я и фаза обслуживания j_1-я, $u = m(i_1 - 1) + j_1$. Отметим, что матрицы $\widetilde{H}^{(1)}_{l_1,\,l_2}(s)$ имеют размер $lm \times m$, поскольку не учитывается фаза генерации в момент поступления выделенной заявки на прибор (это определяется умножением матрицы $\overline{A}(x)$ на вектор $\vec{1}$).

Обозначим теперь через $\widetilde{W}^{(1)}_{l_1,\,l_2}(s)$ матрицу, элемент $\big(\widetilde{W}^{(1)}_{l_1,\,l_2}(s)\big)_{uj_2}$ которой представляет собой преобразование Лапласа–Стилтьеса для момента поступления заявки первого типа на прибор, умноженного на индикатор события, состоящего в том, что в этот момент фаза обслуживания будет j_2-я при условии, что эта заявка поступила в начальный момент и после ее поступления в системе оказалось $l_1 \geq 1$ и $l_2 \geq 0$ заявок первого и второго типа, фаза генерации была i_1-я и фаза обслуживания была j_1-я, $u = m(i_1 - 1) + j_1$. Матрицы $\widetilde{W}^{(1)}_{l_1, l_2}(s)$ имеют размер $lm \times m$.

При $l_1 \leq n_1$ и $l_2 \leq n_2$ вновь поступившая заявка первого типа может начать обслуживаться на приборе еще до момента поступления следующей заявки; не начать обслуживаться до момента поступления следующей заявки. В последнем случае в момент поступления следующей заявки в системе останется k_1 и k_2, $1 \leq k_1 \leq n_1$, $0 \leq k_2 \leq n_2$, заявок первого и второго типа (в том числе и рассматриваемая заявка), и рассматриваемая заявка будет ожидать начала обслуживания дополнительное время, обусловленное начальным состоянием с $k_1 + 1$ и k_2 заявками первого и второго типа (если следующая заявка окажется первого типа) или начальным состоянием с k_1 и $k_2 + 1$ заявками первого и второго типа (если следующая заявка окажется второго типа). Отсюда получаем

$$\widetilde{W}^{(1)}_{l_1, l_2}(s) = \widetilde{H}^{(1)}_{l_1, l_2}(s) + \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=1}^{l_2} \Big(\widetilde{G}^{1, k_1, k_2}_{1, l_1, l_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k_1+1, k_2}(s) +$$

$$+ \widetilde{G}^{1, k_1, k_2}_{2, l_1, l_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k_1, k_2+1}(s) \Big), \quad 1 \leq l_1 < n_1, \quad 0 \leq l_2 < n_2.$$

Аналогично получены формулы

$$\widetilde{W}^{(1)}_{n_1, l_2}(s) = \widetilde{H}^{(1)}_{n_1, l_2}(s) + \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=1}^{l_2} \Big(\widetilde{G}^{1, k_1, k_2}_{1, n_1, l_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k_1+1, k_2}(s) +$$

$$+ \widetilde{G}^{1, k_1, k_2}_{2, n_1, l_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k_1, k_2+1}(s) \Big) + \sum_{k=0}^{l_2} \Big(\widetilde{G}^{1, n_1, k}_{1, n_1, l_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{n_1, k}(s) +$$

$$+ \widetilde{G}^{1, n_1, k}_{2, n_1, l_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{n_1, k+1}(s) \Big), \qquad 1 \leq l_1 < n_1;$$

$$\widetilde{W}^{(1)}_{l_1, n_2}(s) = \widetilde{H}^{(1)}_{l_1, n_2}(s) + \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \Big(\widetilde{G}^{1, k_1, k_2}_{1, l_1, n_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k_1+1, k_2}(s) +$$

$$+ \widetilde{G}^{1, k_1, k_2}_{2, l_1, n_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k_1, k_2+1}(s) \Big) + \sum_{k=0}^{l_1} \Big(\widetilde{G}^{1, k, n_2}_{1, l_1, n_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k+1, n_2}(s) +$$

$$+ \widetilde{G}^{1, k, n_2}_{2, l_1, n_2}(s) \widetilde{W}^{(1)}_{k, n_2}(s) \Big), \qquad 0 \leq l_2 < n_2;$$

$$\widetilde{W}^{(1)}_{n_1,n_2}(s) = \widetilde{H}^{(1)}_{n_1,l_2}(s) + \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=1}^{n_2-1}\big(\widetilde{G}^{1,k_1,k_2}_{1,n_1,n_2}(s)\widetilde{W}^{(1)}_{k_1+1,k_2}(s)+$$

$$+\widetilde{G}^{1,k_1,k_2}_{2,n_1,n_2}(s)\widetilde{W}^{(1)}_{k_1,k_2+1}(s)\big) + \sum_{k=0}^{n_1-1}\big(\widetilde{G}^{1,k,n_2}_{1,n_1,n_2}(s)\widetilde{W}^{(1)}_{k+1,n_2}(s)+$$

$$+\widetilde{G}^{1,k,n_2}_{2,n_1,n_2}(s)\widetilde{W}^{(1)}_{k,n_2}(s)\big) + \sum_{k=0}^{n_2-1}\big(\widetilde{G}^{1,n_1,k}_{1,n_1,n_2}(s)\widetilde{W}^{(1)}_{n_1,k}(s)+$$

$$+\widetilde{G}^{1,n_1,k}_{2,n_1,n_2}(s)\widetilde{W}^{(1)}_{n_1,k+1}(s)\big) + \big(\widetilde{G}^{1,n_1,n_2}_{1,n_1,n_2}(s) + \widetilde{G}^{2,n_1,n_2}_{1,n_1,n_2}(s)\big)\widetilde{W}^{(1)}_{n_1,n_2}(s).$$

Теперь найдем преобразование Лапласа–Стилтьеса $\vec{w}_1(s)$ для стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания принятой к обслуживанию заявки первого типа (координата $\big(\vec{w}_1(s)\big)_i$ вектора $\vec{w}_1(s)$ соответствует i-й фазе обслуживания заявки в момент начала обслуживания). Для этого сначала получим выражения для некоторых вспомогательных величин. Полагая $A_1 = A_1(\infty)$, получаем следующие соотношения. Для стационарной вероятности τ_1 того, что поступившая заявка будет первого типа, имеем

$$\tau_1 = \vec{p}^{\,*} A_1 \vec{1};$$

для стационарной вероятности $p^{(1)}_{\text{пот}}$ потери заявки первого типа имеем

$$p^{(1)}_{\text{пот}} = \frac{1}{\tau_1}\sum_{r=0}^{n_2}\vec{\pi}_{n_1,r}\int\limits_0^\infty \big(dA_1(x)\otimes F^{n_1,r}_{n_1,r}(x)\big)\vec{1}.$$

Тогда

$$\vec{w}_1(s) = \frac{1}{\tau_1(1-p^{(1)}_{\text{пот}})}\Bigg(\sum_{\substack{0\le k_1\le n_1,\\ 0\le k_2\le n_2}}\ \sum_{\substack{0\le l_1\le \min(k_1,n_1-1),\\ 0\le l_2\le \min(k_2,n_2-1)}}\vec{\pi}_{k_1,k_2}\int\limits_0^\infty \big(dA_1(x)\otimes$$

$$\otimes F^{l_1,l_2}_{k_1,k_2}(x)\big)\widetilde{W}^{(1)}_{l_1+1,l_2}(s) + \sum_{\substack{0\le k_1\le n_1,\\ 0\le k_2\le n_2,}}\vec{\pi}_{k_1,k_2}\int\limits_0^\infty \big(dA_1(x)\otimes F^*_{k_1,k_2}(x)\big)\Bigg).$$

Вычислим преобразование Лапласа–Стилтьеса $v_1(s)$ для стационарного распределения времени пребывания в системе принятой к обслуживанию заявки первого типа. Введем вектор $\vec{\beta}(s)$, координатой $\big(\vec{\beta}(s)\big)_i$

которого является преобразование Лапласа–Стилтьеса для времени обслуживания заявки (любого типа) при условии, что в начале обслуживания фаза обслуживания была i-я. Тогда

$$\vec{\beta}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} e^{\Lambda x} N \vec{1}\, dx = (sE - \Lambda)^{-1} \vec{1}.$$

Поскольку время пребывания заявки состоит из времени ожидания и времени обслуживания, получаем

$$v_1(s) = \vec{w}_1(s) \vec{\beta}(s).$$

Дифференцируя $\vec{w}_1(s)$ и $v_1(s)$ соответствующее число раз в точке $s = 0$, получим выражения для моментов любых порядков стационарных распределений времен ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

Заключение. При нахождении стационарных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова основную вычислительную сложность представляет определение матриц $F_{l_1, l_2}^{k_1, k_2}(x)$ и $F_{l_1, l_2}^{*}(x)$. Алгоритм вычисления этих матриц опирается на метод, изложенный в работе [7, гл. 6]. Поскольку выкладки для вычисления этих матриц тождественно совпадают с выкладками для системы с общим накопителем, рассмотренной в работе [9], то в настоящей работе они не рассматриваются. Аналогичные выкладки для подобных систем приведены в работах [6, 8].

Основываясь на полученных разложениях, нетрудно получить вычислительные процедуры для определения матриц $P_{l_1, l_2}^{k_1, k_2}$ переходных вероятностей вложенной цепи Маркова.

Рассмотренный алгоритм применим также для вычисления матриц $G_{l_1, l_2}^{1, k_1, k_2}(x)$ и $\widetilde{G}_{v, l_1, l_2}^{k_1, k_2}(s)$, $v = 1, 2$, необходимых для нахождения стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания заявки первого типа.

В работе [9] была рассмотрена система $SM_2/PH_2/1/r$, для которой распределение времени обслуживания заявки каждого типа является распределением фазового типа (PH-распределением), и показано, что эта система является частным случаем системы $SM_2/MAP/1/r$.

Поскольку с алгоритмической точки зрения разница между этими системами состоит только в пространстве состояний и матрице переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, а процесс обслуживания, входящий поток и дисциплина обслуживания определены аналогично, то все сделанные выкладки для системы $SM_2/PH_2/1/r$ будут верны и для системы $SM_2/PH_2/1$ с раздельными накопителями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г р и ш е ч к и н С. А. Ветвящиеся процессы и системы с повторными вызовами или случайной дисциплиной // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – Т. 35. – Вып. 1. – С. 35–50.
2. Г р и ш е ч к и н С. А. Ветвящиеся процессы Крампа–Мода–Ягерса как метод исследования системы $M/G/1$ с разделением процессора // Теория вероятностей и ее прим. – 1991. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 16–33.
3. G r i s h e c h k i n S. A. On a relationship between processor-sharing queues and Crump–Mode–Jagers branching processes // Adv. Appl. Probab. – 1992. – V. 24. – P. 653–698.
4. П е ч и н к и н А. В. Система обслуживания с марковским входящим потоком и дисциплиной случайного выбора заявок из очереди // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 90–97.
5. П е ч и н к и н А. В., Т р и ш е ч к и н С. И. Ветвящийся процесс с двумя типами частиц, управляемый цепью Маркова, и его применение к исследованию системы массового обслуживания с дисциплиной случайного выбора из очереди // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Естественные науки".– 2000. – № 1. – С. 5–17.
6. Т р и ш е ч к и н С. И. Система $MAP/G_2/1/n$ с двумя типами требований, дисциплиной RANDOM и раздельными очередями // Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика. – 2002. – № 1. – С. 144–158.
7. Б о ч а р о в П. П., П е ч и н к и н А. В. Теория массового обслуживания. – М.: РУДН, 1995.
8. К о л я д е н к о в а Л. Г., П е ч и н к и н А. В., Т р и ш е ч к и н С. И. Система $MAP_2/G_2/1/n$ с абсолютным приоритетом и общей очередью // Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика. – 2000. – № 1. – С. 72–90.
9. П е ч и н к и н А. В., Т р и ш е ч к и н С. И. Система $SM_2/MSP/1/r$ с дисциплиной случайного выбора заявки на обслуживание и общим накопителем // Системы и средства информатики: Спец.выпуск — М.: Институт проблем информатики РАН, 2002. – С. 160–180.

Сергей Иванович Тришечкин родился в 1976 г., окончил в 1999 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Научный сотрудник НИИ СМ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 5 научных работ в области теории вероятностей и ее применений. Погиб в 2003 г.

S.I. Trishechkin (b. 1976) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1999. Researcher of "SM" research institute of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 5 publications in the field of probability theory and its applications. Died in 2003.