

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛА ПЛОТНЫХ $F$ -РЕКУРРЕНТНЫХ СЕРИЙ И ЦЕПОЧЕК В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Н.М. Меженная

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com

*Изучены свойства распределения чисел плотных  $F$ -рекуррентных серий и цепочек заданной длины в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин над конечным алфавитом. С помощью функционального варианта метода Чена – Стейна получены оценки скорости сходимости распределения вектора из чисел плотных  $F$ -рекуррентных серий заданных длин к сопровождающему многомерному пуассоновскому распределению (в метрике расстояния по вариации). Выведены многомерные предельная теорема Пуассона и центральная предельная теорема для чисел плотных  $F$ -рекуррентных серий заданной длины и длины не меньше заданной при подходящем изменении параметров схемы (длины последовательности и длины серии). Оценки расстояния по вариации также позволяют получить условия сходимости распределения числа плотных  $F$ -рекуррентных цепочек заданной длины к сложному пуассоновскому распределению.*

**Ключевые слова:** плотные серии, рекуррентные цепочки, предельная теорема Пуассона, центральная предельная теорема, метод Чена – Стейна, оценки скорости сходимости.

## LIMIT THEOREMS FOR DENSE $F$ -RECCURENT SERIES AND CHAINS NUMBERS IN SEQUENCE OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

N.M. Mezhennaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com

*The work is devoted to studying properties of distribution of dense  $F$ -recurrent series and chains with given length in the sequence of independent identically distributed random variables over finite alphabet. Using functional modification of Chen – Stein method we investigate estimators of convergence rate of distribution of numbers of dense  $F$ -recurrent series with given lengths to accompanying multivariate Poisson distribution (in metric of distance by variance). On the ground of this results multivariate Poisson limit theorem and central limit theorem for numbers of dense  $F$ -recurrent series with given lengths and length no less than given were derived under appropriate variation of scheme parameters. The estimators of distance by variance also allow to derive conditions under which distribution of dense  $F$ -recurrent chains with given length converges to compound Poisson distribution.*

**Keywords:** dense runs, recurrent chains, Poisson limit theorem, central limit theorem, Chan – Stein method, convergence rate estimators.

**Введение.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_T, \dots$  — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения из алфавита  $A_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Такие случайные величины принято называть случайными знаками, или просто знаками. Пусть  $f : A_N^l \rightarrow A_N$ . Согласно работе [1], случайные знаки  $X_i, \dots, X_{i+l+s-1}$  образуют

$f$ -рекуррентную цепочку длиной  $s$  ( $s \geq l + 1$ ), если

$$X_{i+l+k} = f(X_{i+k}, \dots, X_{i+l+k-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, s - 1.$$

Если это соотношение при каждом значении  $k$  выполняется хотя бы для одной функции из набора  $F = \{f_1, \dots, f_K\}$ , то знаки  $X_i, \dots, X_{i+l+s-1}$  образуют  $F$ -рекуррентную цепочку длиной  $s$ . Очевидно при  $K = 1$  определения  $f$ -рекуррентной и  $F$ -рекуррентной цепочек совпадают.

Так, пусть  $N = 2$ ,  $A_2 = \{0, 1\}$  и  $F = \{f\}$ , где  $f : A_2^2 \rightarrow A_2$ ,  $f(a, b) = a \oplus b$  — сложение по модулю 2,  $a, b \in A_2$ . Тогда знаки  $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$  образуют  $F$ -рекуррентную цепочку.

Далее  $f$ - и  $F$ -рекуррентные цепочки будем называть сплошными  $f$ - и  $F$ -рекуррентными цепочками.

В настоящей работе рассмотрим более общую постановку задачи. Напомним, что знаки  $X_1, X_2, \dots, X_s$  образуют плотную 1-цепочку длиной  $s$ , если  $1 \in \{X_i, X_{i+1}\}$ ,  $i = 1, \dots, s - 1$  [2–4]. По аналогии с понятием “плотная цепочка” определим понятие “плотная  $F$ -рекуррентная цепочка”.

Будем утверждать, что знаки  $X_i, \dots, X_{i+s+l-1}$  образуют плотную  $F$ -рекуррентную цепочку длиной  $s$ , если при всех  $k = 0, 1, \dots, s - 2$  найдутся такие функции  $f_k, g_k \in F$ , что имеет место хотя бы одно из равенств

$$X_{i+l+k} = f_k(X_{i+k}, \dots, X_{i+l+k-1})$$

или

$$X_{i+l+k+1} = g_k(X_{i+k+1}, \dots, X_{i+l+k}).$$

Началом  $F$ -рекуррентной цепочки  $X_i, \dots, X_{i+s+l-1}$  будем считать знак  $X_{i+l}$ .

Пусть  $N = 2$ ,  $A_2 = \{0, 1\}$  и  $F = \{f\}$ , где  $f$  — сложение по модулю 2. Тогда знаки  $1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0$  не образуют сплошную  $F$ -рекуррентную цепочку (курсивом выделен знак, на котором нарушается свойство  $F$ -рекуррентности), но формируют плотную  $F$ -рекуррентную цепочку.

Пусть  $N = 3$ ,  $A_3 = \{0, 1, 2\}$  и  $F = \{f_1, f_2\}$ , где  $f_i : A_3^2 \rightarrow A_3$ ,  $f_i(a, b) = i$ ,  $a, b \in A_3$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть  $1, 2, 1, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 0$  — первые 10 знаков реализации случайной последовательности  $X_1, X_2, \dots$ . Первые девять знаков, выделенные курсивом, образуют плотную  $F$ -рекуррентную цепочку. Однако в нее нельзя включить последний знак. Отметим также, что выделенные знаки не образуют сплошную  $F$ -рекуррентную цепочку, так как на пятом месте нарушается свойство  $F$ -рекуррентности (прообразом знака 0 при любом отображении из  $F$  будет  $\emptyset$ ).

В настоящей работе будет доказана многомерная предельная теорема Пуассона для чисел плотных  $F$ -рекуррентных серий в после-

довательности независимых случайных величин с оценками скорости сходимости.

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_r$  — неотрицательные целочисленные случайные величины. Многомерная предельная теорема Пуассона указывает условия, при которых для всех  $k_1, \dots, k_r \in \{0, 1, \dots\}$ :

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r\} \rightarrow \prod_{s=1}^r \left( \frac{\lambda_s^{k_s}}{k_s!} e^{-\lambda_s} \right),$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$  — параметры предельного пуассоновского распределения.

В работе [1] с помощью многомерной теоремы Севастьянова [5, 6] была доказана предельная теорема пуассоновского типа для чисел  $f$ -рекуррентных  $s$ -цепочек, а также для ряда связанных с ними случайных величин. В работе [7] распределения этих случайных величин были исследованы с использованием многомерного варианта метода Чена–Стейна [8–11]. Преимущество этого метода по сравнению с большинством классических методов доказательства предельных теорем пуассоновского типа для сумм зависимых случайных индикаторов заключается в том, что он позволяет получить оценки скорости сходимости в предельных теоремах. Для этого достаточно оценок для смешанных моментов второго порядка величин из набора случайных индикаторов (в отличие от других известных методов). Полученные оценки в некоторых случаях позволяют доказать асимптотическую нормальность (как результат сближения с пуассоновским распределением с возрастающим параметром).

**Оценки и предельные теоремы.** Пусть

$$E_t = \{X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-1}), f \in F\}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Тогда плотной  $F$ -рекуррентной цепочке в последовательности  $X_1, X_2, \dots, X_T, \dots$  соответствует плотная цепочка из единиц в последовательности  $I\{E_l\}, I\{E_{l+1}\}, \dots$  [2, 3].

Если в последовательности индикаторов  $I\{E_l\}, I\{E_{l+1}\}, \dots$  возникает плотная цепочка из единиц (плотная 1-цепочка), то на каждом ее конце будет не более чем по одному нулю. Если к такой плотной 1-цепочке (с нулями на концах) приписать еще по одному нулю с двух сторон, то ее нельзя продлить ни в одну сторону. Эту цепочку принято называть плотной 1-серией [2, 3]. Поэтому будем утверждать, что знаки  $X_{i-2}, \dots, X_{i+l+s+1}$  образуют плотную  $F$ -рекуррентную серию длиной  $s$ , если знаки  $X_{i-1}, \dots, X_{i+l+s}$  образуют плотную  $F$ -рекуррентную цепочку наибольшей длины, лежащую внутри отрезка  $X_{i-2}, \dots, X_{i+l+s+1}$ . Началом серии будем называть знак  $X_{i+l}$ , а концом — знак  $X_{i+l+s-1}$ . Плотной  $F$ -рекуррентной серии длиной  $s$ , образованной знаками  $X_{i-2}, \dots, X_{i+l+s+1}$ , соответствует плотная 1-серия длиной  $s$ , сформированная случайными индикаторами  $I\{E_{i+l-2}\}, I\{E_{i+l-1}\}, \dots, I\{E_{i+l+s+1}\}$ .

Пусть событие  $B_{t,s}$  означает, что знаки  $X_{t-2}, X_2, \dots, X_T, \dots$  образуют плотную  $F$ -рекуррентную серию длиной  $s$ ; для любого события  $E$  при  $c \in \{0, 1\}$

$$E^c = \begin{cases} E, & c = 1; \\ \bar{E}, & c = 0. \end{cases}$$

Тогда событие  $B_{i,s}$  можно записать как

$$B_{i,s} = \bigcup_{a_1, \dots, a_{s-2}} E_{i+l-2}^0 E_{i+l-1}^0 E_{i+l}^1 E_{i+l+1}^{a_1} E_{i+l+2}^{a_2} \dots E_{i+l+s-2}^{a_{s-2}} \times \\ \times E_{i+l+s-1}^1 E_{i+l+s}^0 E_{i+l+s+1}^0, \quad (1)$$

где объединение ведется по всем числам  $a_1, \dots, a_{s-2} \in \{0, 1\}$ , которые образуют плотную цепочку из единиц, т.е.  $1 \in \{a_i, a_{i+1}\}, i = 1, \dots, s-3$ .

Пусть  $p_s = \mathbf{P}\{B_{t,s}\}$ . Определим вероятность появления плотной  $F$ -рекуррентной цепочки длиной  $s-2$  (объединение ведется по тем же наборам, что и в (1)):

$$q_{s-2} = \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{a_1, \dots, a_{s-2}} E_{i+l+1}^{a_1} E_{i+l+2}^{a_2} \dots E_{i+l+s-2}^{a_{s-2}} \right\}.$$

Пусть

$$Q_{s,r} = \sum_{s'=s}^{s+r} q_{s'}.$$

Введем событие  $\tilde{B}_{t,s}$ , состоящее в том, что в момент времени  $t$  в последовательности  $X_1, X_2, \dots, X_T, \dots$  началась плотная  $F$ -рекуррентная серия длиной не меньше  $s$ . Тогда

$$\tilde{p}_s = \mathbf{P}\{\tilde{B}_{t,s}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{B_{t,s+k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{s+k}.$$

Пусть  $\xi_{s,T} = \sum_{t=1}^T I\{B_{t,s}\}$  — число плотных  $F$ -рекуррентных серий длиной  $s$  и  $\tilde{\xi}_{s,T} = \sum_{t=1}^T I\{\tilde{B}_{t,s}\}$  — число плотных  $F$ -рекуррентных серий длиной не меньше  $s$ .

В соответствии с определениями  $\lambda_s = \mathbf{E}\xi_{s,T} = Tp_s, \tilde{\lambda}_s = \mathbf{E}\tilde{\xi}_{s,T} = T\tilde{p}_s$ .

Пусть

$$\Xi = \left( \xi_{s_0,T}, \xi_{s_0+1,T}, \dots, \xi_{s_0+r-1,T}, \tilde{\xi}_{s_0+r,T} \right);$$

$$\Pi = \left( \pi_{s_0}, \pi_{s_0+1}, \dots, \pi_{s_0+r-1}, \tilde{\pi}_{s_0+r} \right),$$

где  $\pi_{s_0}, \pi_{s_0+1}, \dots, \pi_{s_0+r-1}, \tilde{\pi}_{s_0+r}$  — независимые случайные величины, каждая из которых распределена по закону Пуассона с параметром

$\lambda_{s_0}, \lambda_{s_0+1}, \dots, \lambda_{s_0+r-1}, \tilde{\lambda}_{s_0+r}$  соответственно, т.е. при  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\mathbf{P}\{\pi_{s_0+k} = n\} = \frac{\lambda_{s_0+k}^n}{n!} e^{-\lambda_{s_0+k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Распределение вектора  $\Pi$  принято называть сопровождающим пуассоновским распределением для вектора  $\Xi$ .

Через  $\rho(X, Y)$  обозначим расстояние по вариации между распределениями случайных величин  $X$  и  $Y$  [12]. Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , принимающих значения из счетного множества  $\mathcal{C}$ , оно определяется по формуле

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} |\mathbf{P}\{X = c\} - \mathbf{P}\{Y = c\}|.$$

**Теорема 1.** При  $1 \leq l < s_0$ ,  $r \geq 1$ ,  $N \geq 2$

$$\rho(\Xi, \Pi) = 2T\tilde{p}_{s_0}((l + s_0 + r + 2, 5)\tilde{p}_{s_0} + (l + 2)Q_{s_0-l, r}). \quad (2)$$

**Замечание 1.** Теорема 1 содержит как частный случай теорему, приведенную в работе [7], в которой была получена оценка для вектора из чисел сплошных  $f$ -рекуррентных серий. Оценка, данная в работе [7], незначительно отличается от оценки (2) вследствие некоторых различий в доказательстве.

**Замечание 2.** Частный случай теоремы 1 — оценка, приведенная в работе [2] (формула (8)) для плотных  $a$ -серий. Оценка (2) несколько лучше. Это объясняется тем, что в работе [2] метод Чена – Стейна применялся для вывода оценки для вектора  $(\xi_{s_0, T}, \xi_{s_0+1, T}, \dots, \xi_{s_0+r-1, T})$ , а затем из нее получали оценку для вектора  $\Xi = (\xi_{s_0, T}, \xi_{s_0+1, T}, \dots, \xi_{s_0+r-1, T}, \tilde{\xi}_{s_0+r, T})$ . В настоящей работе метод Чена – Стейна использован для вектора  $\Xi$ .

Обозначим через  $\eta_{s, T}$  число плотных  $F$ -рекуррентных цепочек длиной  $s$ , которые начались до момента  $T$ .

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq l < s_0$ ,  $r \geq 1$ ,  $N \geq 2$ , и  $T, s_0 \rightarrow \infty$  так, что

$$\lambda_{s_0+k} \rightarrow \lambda_k \in (0, \infty), \quad k = 0, 1, \dots, r-1; \quad (3)$$

$$\tilde{\lambda}_{s_0+r} \rightarrow \tilde{\lambda}_r \in (0, \infty), \quad Q_{s_0-l, r} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Тогда

1) случайные величины  $\xi_{s_0, T}, \xi_{s_0+1, T}, \dots, \xi_{s_0+r-1, T}, \tilde{\xi}_{s_0+r, T}$  асимптотически независимы в совокупности и распределены в пределе по закону Пуассона с параметрами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \tilde{\lambda}_r$  соответственно;

2) распределение случайной величины  $\eta_{s_0, T}$  совпадает в пределе с распределением выражения  $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\pi_j$ , где  $\pi_0, \dots, \pi_m, \dots$  — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_m, \dots$  соответственно.

**Доказательства.** Доказательство теоремы 1. Пусть

$$I_{t,s} = B_{t,s}, \quad s = s_0, \dots, s_0 + r - 1, \quad I_{t,s_0+r} = \tilde{B}_{t,s_0+r};$$

$$U = \{(t, s) : t = 1, 2, \dots, s = s_0, \dots, s_0 + r\};$$

$$W = \{I_{t,s}\}_{(t,s) \in U}; \quad \pi = \{\pi_{t,s}\}_{(t,s) \in U},$$

и случайные величины  $\pi_{t,s}$  независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами  $\mathbf{E}\pi_{t,s} = \mathbf{P}\{I_{t,s}\}$ .

Определим окрестности при  $s_0 \leq s \leq s_0 + r - 1$ :

$$O(i, s) = \{(j, s') :$$

$$s_0 \leq s' \leq s_0 + r - 1, \max\{1, i - l - s' - 3\} \leq j \leq i + l + s + 3\} \cup$$

$$\cup \{(j, s_0 + r) : \max\{1, i - l - s_0 - r - 1\} \leq j \leq i + l + s + 3\};$$

$$O(i, s_0 + r) = \{(j, s') : s_0 \leq s' \leq s_0 + r - 1, \max\{1, i - l - s' - 3\} \leq$$

$$\leq j \leq i + l + s_0 + r + 1\} \cup \{(j, s_0 + r) :$$

$$\max\{1, i - l - s_0 - r - 1\} \leq j \leq i + l + s_0 + r + 1\}.$$

Построенные окрестности обладают тем свойством, что случайный индикатор  $I_{i,s}$  не зависит от набора  $I_{j,s'}$ ,  $(j, s') \in O(i, s)$ . С учетом этого многомерный вариант метода Чена – Стейна (теорема 10.А, см. работу [8]) дает оценку расстояния по вариации между наборами  $W$  и  $\pi$  следующего вида:

$$\rho(W, \pi) \leq S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum_{(i,s) \in U} \sum_{(j,s') \in O(i,s)} \mathbf{P}\{I_{i,s}\} \mathbf{P}\{I_{j,s'}\}; \quad (5)$$

$$S_2 = \sum_{(i,s) \in U} \sum_{(j,s') \in O(i,s) \setminus \{(i,s)\}} \mathbf{P}\{I_{i,s} I_{j,s'}\}. \quad (6)$$

Теперь необходимо оценить сверху суммы  $S_1$  и  $S_2$ . Начнем с оценки суммы  $S_1$ , найденной по (5). С учетом определения окрестностей  $O(i, s)$  имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^T \sum_{s=s_0}^{s_0+r} \sum_{(j,s') \in O(i,s)} \mathbf{P}\{I_{i,s}\} \mathbf{P}\{I_{j,s'}\} = \\ &= \sum_{i=1}^T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{(j,s') \in O(i,s)} \mathbf{P}\{I_{i,s}\} \mathbf{P}\{I_{j,s'}\} + \sum_{(j,s') \in O(i,s_0+r)} \mathbf{P}\{I_{i,s_0+r}\} \mathbf{P}\{I_{j,s'}\} \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \left( \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i-l-s'-3}^{i+l+s+3} \mathbf{P}\{B_{i,s}\} \mathbf{P}\{B_{j,s'}\} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=i-l-s_0-r-1}^{i+l+s+3} \mathbf{P}\{B_{i,s}\} \mathbf{P}\{\tilde{B}_{j,s_0+r}\} \Big) + \\
& + \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i-l-s'-3}^{i+l+s_0+r+1} \mathbf{P}\{\tilde{B}_{i,s_0+r}\} \mathbf{P}\{B_{j,s'}\} + \sum_{j=i-l-s_0-r-1}^{i+l+s_0+r+1} \mathbf{P}\{\tilde{B}_{i,s_0+r}\} \mathbf{P}\{\tilde{B}_{j,s_0+r}\} \Big) = \\
& = \sum_{i=1}^T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \left( \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i-l-s'-3}^{i+l+s+3} p_s p_{s'} + \tilde{p}_{s_0+r} \sum_{j=i-l-s_0-r-1}^{i+l+s+3} p_s \right) + \right. \\
& \left. + \tilde{p}_{s_0+r} \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i-l-s'-3}^{i+l+s_0+r+1} p_{s'} + \sum_{j=i-l-s_0-r-1}^{i+l+s_0+r+1} (\tilde{p}_{s_0+r})^2 \right).
\end{aligned}$$

Во всех внутренних суммах слагаемые не зависят от индекса  $j$ , тогда

$$\begin{aligned}
S_1 & \leq T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \left( \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} (2l+s+s'+7)(p_s p_{s'}) + (2l+s+s_0+r+5)p_s \tilde{p}_{s_0+r} \right) + \right. \\
& \left. + \tilde{p}_{s_0+r} \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} p_{s'} (2l+s_0+r+s'+5) + (2(l+s_0+r)+3)(\tilde{p}_{s_0+r})^2 \right) \leq \\
& \leq T(2(l+s_0+r-1)+7) \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} p_s p_{s'} + 2\tilde{p}_{s_0+r} \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} p_s + \tilde{p}_{s_0+r}^2 \right) \leq \\
& \leq 2T(l+s_0+r+2,5) \left( (rp_{s_0})^2 + 2rp_{s_0}\tilde{p}_{s_0+r} + (\tilde{p}_{s_0+r})^2 \right) = \\
& = 2T(l+s_0+r+2,5) \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} p_s + \tilde{p}_{s_0+r} \right)^2 = \\
& = 2T(l+s_0+r+2,5) \tilde{p}_{s_0}^2. \quad (7)
\end{aligned}$$

Перейдем к оценке суммы  $S_2$ , определяемой по (6). Отметим, что

$$\begin{aligned}
S_2 & \leq 2 \sum_{(i,s) \in U} \sum_{(j,s') \in O(i,s) \setminus \{(i,s)\}, j>i} \mathbf{P}\{I_{i,s} I_{j,s'}\} = \\
& = 2 \sum_{i=1}^T \sum_{s=s_0}^{s_0+r} \sum_{(j,s') \in O(i,s), j>i} \mathbf{P}\{I_{i,s} I_{j,s'}\} = \\
& = 2 \sum_{i=1}^T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{(j,s') \in O(i,s), j>i} \mathbf{P}\{I_{i,s} I_{j,s'}\} + \sum_{(j,s') \in O(i,s_0+r), j>i} \mathbf{P}\{I_{i,s_0+r} I_{j,s'}\} \right) \leq \\
& \leq 2 \sum_{i=1}^T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \left( \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i+1}^{i+l+s+3} \mathbf{P}\{B_{i,s} B_{j,s'}\} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=i+1}^{i+l+s+3} \mathbf{P}\{B_{i,s}\tilde{B}_{j,s_0+r}\} + \\
& + \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i+1}^{i+l+s_0+r+1} \mathbf{P}\{\tilde{B}_{i,s_0+r}B_{j,s'}\} + \sum_{j=i+1}^{i+l+s_0+r+1} \mathbf{P}\{\tilde{B}_{i,s_0+r}\tilde{B}_{j,s_0+r}\}.
\end{aligned}$$

При  $(j, s') \in O(i, s) = O(i, s)$ ,  $s_0 \leq s$ ,  $s' \leq s_0 + r - 1$ ,  $j > i$ , события  $B_{i,s}$  и  $B_{j,s'}$  совместны, если

$$j = i + s + 2, i + s + 3, \dots, i + s + l + 3$$

и произведение событий  $B_{i,s}B_{j,s'}$  означает, что знаки  $X_{i-2}, X_{i-1}, \dots, X_{i+s+1}$  и  $X_{j-2}, X_{j-1}, \dots, X_{j+s'+1}$  образуют плотные  $F$ -рекуррентные цепочки. Используя обозначения, введенные ранее, запишем

$$\begin{aligned}
B_{i,s}B_{j,s'} & \subset B_{i,s} \left( \bigcup_{b_1, \dots, b_{s-2}} E_{j+l}^1 E_{j+l+1}^{b_1} \dots E_{j+l+s'-2}^{b_{s'-2}} E_{j+l+s'-1}^1 \right) \subset \\
& \subset B_{i,s} \left( \bigcup_{b_{i-j+l+s+2}, \dots, b_{s'-2}} E_{i+2l+s+2}^{b_{i-j+l+s+2}} \dots E_{j+l+s'-2}^{b_{s'-2}} E_{j+l+s'-1}^1 \right) \subset \\
& \subset B_{i,s} \left( \bigcup_{a_1, \dots, a_{s'-l}} E_{i+2l+s+2}^{a_1} \dots E_{i+s+2+l+s'-1}^{a_{s'-l}} \right),
\end{aligned}$$

где  $1 \in \{b_i, b_{i+1}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $1 \in \{a_i, a_{i+1}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Поскольку событие  $B_{i,s}$  определяется случайными величинами  $X_{i-2}, \dots, X_{i+s+1}$ , а произведение событий  $E_{i+2l+s+2}^{a_1} \dots E_{i+s+2+l+s'-1}^{a_{s'-l}}$  — случайными величинами  $X_{i+s+l+2}, \dots, X_{i+s+1+l+s'}$ , в силу однородности последовательности  $X_1, \dots, X_T, \dots$  можем написать оценку:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{B_{i,s}B_{j,s'}\} & \leq \mathbf{P}\{B_{1,s}\} \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{a_1, \dots, a_{s'-l}} E_{i+2l+s+2}^{a_1} \dots E_{i+s+2+l+s'-1}^{a_{s'-l}} \right\} = \\
& = p_s \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{a_1, \dots, a_{s'-l}} E_1^{a_1} \dots E_{s'-l}^{a_{s'-l}} \right\} = p_s q_{s'-l},
\end{aligned}$$

где объединение ведется по всем числам  $a_1, \dots, a_{s'-l} \in \{0, 1\}$ ,  $1 \in \{a_i, a_{i+1}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s' - l - 1$ .

Аналогично можно показать, что при  $j = i + s + 2, i + s + 3, \dots, i + s + l + 3$

$$\mathbf{P}\{B_{i,s}\tilde{B}_{j,s_0+r}\} \leq p_s q_{s_0+r-l};$$



$$\mathbf{P}\{\tilde{B}_{i,s_0+r}B_{j,s'}\} \leq \tilde{p}_{s_0+r}q_{s'-l};$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{B}_{i,s_0+r}\tilde{B}_{j,s_0+r}\} \leq \tilde{p}_{s_0+r}q_{s_0+r-l}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 2 \sum_{i=1}^T \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \left( \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i+s+2}^{i+l+s+3} p_s q_{s'-l} + \sum_{j=i+s+2}^{i+l+s+3} p_s q_{s_0+r-l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \sum_{j=i+s+2}^{i+l+s_0+r+1} \tilde{p}_{s_0+r} q_{s'-l} + \sum_{j=i+s+2}^{i+l+s_0+r+1} \tilde{p}_{s_0+r} q_{s_0+r-l} \right) = \\ &= 2T(l+2) \left( \sum_{s=s_0}^{s_0+r-1} \left( \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} p_s q_{s'-l} \right) + p_s q_{s_0+r-l} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} \tilde{p}_{s_0+r} q_{s'-l} + \tilde{p}_{s_0+r} q_{s_0+r-l} \right) = \\ &= 2T(l+2) \tilde{p}_{s_0} \sum_{s'=s_0}^{s_0+r-1} q_{s'-l} = 2T(l+2) \tilde{p}_{s_0} Q_{s_0-l}. \quad (8) \end{aligned}$$

Из формул (7) и (8) получим

$$\begin{aligned} \rho(W, \pi) &\leq 2T(l+s_0+r+2, 5) \tilde{p}_{s_0}^2 + 2T(l+2) \tilde{p}_{s_0} Q_{s_0-l} = \\ &= 2T \tilde{p}_{s_0} ((l+s_0+r+2, 5) \tilde{p}_{s_0} + (l+2) Q_{s_0-l}). \end{aligned}$$

Следует отметить, что случайные векторы  $\Xi$  и  $\Pi$  получаются из наборов  $W$  и  $\pi$  в результате применения к ним одной и той же функции, поэтому

$$\rho(\Xi, \Pi) \leq \rho(W, \pi).$$

Теорема 1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Условия (3) и (4) эквивалентны тому, что правая часть оценки (2) стремится к нулю в условиях теоремы. Это доказывает п. 1.

Согласно п. 1, при любом натуральном значении  $r$  распределение случайной величины  $\sum_{j=0}^{r-1} (j+1) \xi_{s_0+j-2, T}$  сходится к распределению случайной величины  $\sum_{k=0}^{r-1} (j+1) \pi_j$ .

При  $r \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \eta_{s_0, T} \neq \sum_{j=0}^{r-1} (j+1) \xi_{s_0+j-2, T} \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \xi_{s_0+j-2, T} \geq 1 \right\} = \\ &= \mathbf{P} \{ \tilde{\xi}_{s_0+r-2, T} \geq 1 \} \leq \mathbf{E} \tilde{\xi}_{s_0+r-2, T}. \quad (9) \end{aligned}$$

В силу условия (4)

$$\mathbf{E}\tilde{\xi}_{s_0+r,T} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\xi_{s_0+r+k} \rightarrow \tilde{\lambda}_r,$$

тогда правая часть (9) стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Теорема 2 доказана.

**Оценки для равновероятного алфавита.** Обратимся к вычислению вероятностей  $p_s$ . События  $E_{l+1}, E_{l+2}, E_{l+3}, \dots$  зависимы. Поэтому выписывание вероятности  $p_s$  в явном виде в общем случае невозможно.

Далее ограничимся случаем, когда знаки  $X_1, X_2, \dots$  распределены на алфавите  $A_N$  равновероятно.

Пронумеруем функции в наборе  $F = \{f_1, \dots, f_K\}$ . Пусть при фиксированном значении  $j = 1, \dots, K$ :

$$E_{t,j} = \{X_t = f_j(X_{t-1}, \dots, X_{t-1})\}.$$

Тогда

$$E_t = \bigcup_{j=1}^K E_{t,j}.$$

Пусть для набора индексов  $\mathbf{i} = (i_{-1}, i_0, i_1, i_2, \dots, i_{s+2}), 1 \leq i_j \leq K$ , событие

$$C_{t,\mathbf{i}} = \bigcup_{a_1, \dots, a_{s-2}} E_{t-2, i_{-1}}^0 E_{t-1, i_0}^0 E_{t, i_1}^1 E_{t+1, i_2}^{a_1} \dots \dots E_{t+s-1, i_s}^{a_{s-2}} E_{t+s-1, i_s}^1 E_{t+s, i_{s+1}}^0 \bar{E}_{t+s+1, i_{s+2}}^0,$$

где объединение ведется по всем числам

$$a_1, \dots, a_{s-2} \in \{0, 1\}, 1 \in \{a_i, a_{i+1}\}, i = 1, 2, \dots, s-3.$$

Можно записать оценку

$$p_s = \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{\mathbf{i} \in \{1, \dots, K\}^{s+4}} C_{1,\mathbf{i}} \right\} \leq \sum_{\mathbf{i} \in \{1, \dots, K\}^{s+4}} \mathbf{P}\{C_{1,\mathbf{i}}\},$$

которая преобразуется в точное равенство, если при  $1 \leq i < j \leq K$

$$f_i(A_N) \cap f_j(A_N) = \emptyset,$$

так как в этом случае события  $C_{1,\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \{1, \dots, K\}^{s+4}$ , попарно несовместны.

В силу однородности последовательности  $X_1, X_2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{E_{t, i_1} E_{t+1, i_2} \dots E_{t+s-1, i_s}\} &= \mathbf{P}\{E_{l+1, i_1} E_{l+2, i_2} \dots E_{l+s, i_s}\} = \\ &= \mathbf{P}\{X_{l+1} = f_{i_1}(X_1, \dots, X_l), X_{l+2} = f_{i_2}(X_2, \dots, X_{l+1}), \dots, \\ &\dots, X_{l+s} = f_{i_s}(X_{s-1}, \dots, X_{l+s-1})\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c_1 \in A_N} \dots \sum_{c_l \in A_N} \mathbf{P}\{X_1 = c_1\} \dots \mathbf{P}\{X_l = c_l\} \times \\
&\times \mathbf{P}\{X_{l+1} = f_1(c_1, \dots, c_l), X_{l+2} = f_2(c_2, \dots, c_l, f_1(c_1, \dots, c_l)), \dots\} = \\
&= N^l \frac{1}{N^{l+s}} = \frac{1}{N^s}.
\end{aligned}$$

Это означает, что события  $E_{t,i_1} E_{t+1,i_2} \dots E_{t+s-1,i_s}$  независимы в совокупности [1].

Тогда с учетом свойства, описанного в замечании 1, и результата, полученного в работе [2], имеем

$$\mathbf{P}\{C_{t,i}\} = c(q^s - q_1^s); \quad (10)$$

$$c = \frac{p(1-p)^4}{\sqrt{p(4-3p)}}; \quad q = \frac{1}{2} \left( p + \sqrt{p(4-3p)} \right); \quad q_1 = \frac{1}{2} \left( p - \sqrt{p(4-3p)} \right),$$

где  $p = N^{-1}$ . Поскольку

$$c < \frac{p}{\sqrt{p(4-3p)}} = \frac{1}{\sqrt{4N-3}},$$

то

$$p_s \leq K^{s+4} \mathbf{P}\{C_{t,i}\} \leq \frac{K^4}{\sqrt{4N-3}} ((Kq)^s - (Kq_1)^s); \quad (11)$$

$$q_s \leq \frac{1}{\sqrt{4N-3}} ((Kq)^{s-2} - (Kq_1)^{s-2}). \quad (12)$$

Оценки (11) и (12) для вероятностей содержательны при  $Kq < 1$ . При вычислении вероятностей  $p_s$  для заданного набора функций можно получить другие оценки. Однако они существенно зависят от этого набора, поэтому их выписывание в общем виде является очень трудоемкой задачей.

Подставляя оценки (11) и (12) в (8), получаем следующую оценку:

$$\rho(\Xi, \Pi) \leq \frac{8TK^4(Kq)^{2s_0-l-2}}{4N-3} ((l+s_0+r+2, 5)K^4(Kq)^{l+2} + l+2). \quad (13)$$

**Следствие 1.** Пусть случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_T, \dots$  независимы и распределены на алфавите  $A_N$  равномерно. Пусть  $1 \leq l < s_0$ ,  $r \geq 1$ ,  $N \geq 2$ ,  $qK < 1$ , и  $T, s_0 \rightarrow \infty$  так, что правая часть (13) стремится к нулю,

$$\lambda_{s_0+k} \rightarrow \lambda_k \in (0, \infty), \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad \tilde{\lambda}_{s_0+r} \rightarrow \tilde{\lambda} \in (0, \infty).$$

Тогда

1) случайные величины  $\xi_{s_0,T}, \xi_{s_0+1,T}, \dots, \xi_{s_0+r-1,T}, \tilde{\xi}_{s_0+r,T}$  асимптотически независимы в совокупности и распределены в пределе по закону Пуассона с параметрами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \tilde{\lambda}$  соответственно;

2) распределение случайной величины  $\eta_{s_0, T}$  совпадает в пределе с распределением выражения  $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\pi_j$ , где  $\pi_0, \dots, \pi_m, \dots$  — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_m, \dots$  соответственно.

**Замечание 3.** Можно показать, что условия следствия 1 выполнены, если, например,  $K = 1$  и

$$s_0 = - \left[ \frac{\ln T}{\ln q} \right] + O(1), \quad T \rightarrow \infty.$$

Так, пусть семейство  $F$  состоит из одной функции  $f : A_N \rightarrow A_N$  ( $K = 1$ ),  $N = 4$ ,  $r = 2$ ,  $T = 100\,000$ ,  $s_0 = 17$ . Тогда параметры сопровождающего пуассоновского распределения равны  $\lambda_{s_0} = 0,735$ ;  $\tilde{\lambda}_{s_0+1} = 0,998$ . Из оценки (13) определим

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = k, \tilde{\xi}_{s_0+1} = l\} - \frac{\lambda_{s_0}^k}{k!} e^{-\lambda_{s_0}} \frac{\tilde{\lambda}_{s_0}^l}{l!} e^{-\tilde{\lambda}_{s_0}} \right| < 0,016$$

при  $k, l = 0, 1, 2, \dots$ . В частности,

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 0, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 0\} - 0,177 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 0, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 1\} - 0,176 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 0, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 2\} - 0,088 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 1, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 0\} - 0,130 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 1, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 1\} - 0,130 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 1, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 2\} - 0,065 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 2, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 0\} - 0,048 \right| < 0,016;$$

$$\left| \mathbf{P}\{\xi_{s_0} = 2, \tilde{\xi}_{s_0+1} = 1\} - 0,048 \right| < 0,016.$$

**Следствие 2.** Пусть случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_T, \dots$  независимы и распределены на алфавите  $A_N$  равномерно. Пусть  $1 \leq l < s_0$ ,  $r \geq 1$ ,  $N \geq 2$ ,  $qK < 1$ , и  $T, s_0 \rightarrow \infty$  так, что правая часть (13) стремится к нулю,

$$\lambda_{s_0+k} \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad \tilde{\lambda}_{s_0+r} \rightarrow \infty.$$

Тогда случайные величины

$$\frac{\xi_{s_0, T} - \lambda_{s_0}}{\lambda_{s_0}}, \dots, \frac{\xi_{s_0+r-1, T} - \lambda_{s_0+r-1}}{\lambda_{s_0+r-1}}, \frac{\tilde{\xi}_{s_0+r, T} - \tilde{\lambda}_{s_0+r}}{\tilde{\lambda}_{s_0+r}}$$

асимптотически независимы в совокупности и одинаково распределены в пределе по стандартному нормальному закону.

**Замечание 4.** Условия следствия 2 выполнены, если, например,  $K = 1$  и

$$s_0 = - \left[ \frac{\ln T - \ln \ln T}{\ln q} \right] + O(1), \quad T \rightarrow \infty.$$

**Заключение.** Обратимся к схеме плотного вложения [13, 14]. Пусть знаки  $x_i, \dots, x_{i+l+s-1}$  образуют  $f$ -рекуррентную цепочку. Пусть  $y_1, y_2, \dots$  — последовательность знаков алфавита  $A_N$ . Согласно работе [14], знаки  $x_i, \dots, x_{i+l+s-1}$  плотно вкладываются в последовательность  $y_1, y_2, \dots$ , начиная с места  $j_0 \geq 1$ , если существуют такие числа

$$j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_{s+l-1},$$

$$j_u - j_{u-1} \in \{1, 2\}, \quad u = 1, 2, \dots, s + l - 1,$$

что  $y_{j_u} = x_{i+u}$ ,  $u = 0, 1, 2, \dots, s + l - 1$ .

Это означает, что

$$y_{j_{l+k}} = f(y_{j_k}, y_{j_{k+1}}, \dots, y_{j_{l+k-1}}), \quad k = 0, 1, 2, s - 1. \quad (14)$$

Рассмотрим набор  $F$  функций  $g$  вида  $g(y_1, \dots, y_{2l-1}) = f(y_{j_1}, \dots, y_{j_l})$ , где  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq 2l - 1$ ,  $j_u - j_{u-1} \in \{1, 2\}$ ,  $u = 2, 3, \dots, l$ . Тогда равенство (14) переписывается в виде

$$y_{j_{l+k}} = g(y_{j_{l+k}-2l+1}, \dots, y_{j_{l+k}-1}), \quad k = 0, 1, 2, s - 1, \quad g \in F.$$

Таким образом, знаки  $y_{j_0}, \dots, y_{j_s}$  образуют плотную  $F$ -рекуррентную цепочку.

Задача о свойствах распределений чисел плотных  $F$ -рекуррентных серий и цепочек рассматривается впервые. Она представляет интерес в связи с возможным применением этих статистик при проверке гипотез о свойствах случайных последовательностей. Например, для проверки основной гипотезы о том, что наблюдается последовательность независимых случайных величин с одинаковым равновероятным полиномиальным распределением, против альтернативы о том, что наблюдаемая последовательность получена как результат плотно-го вложения отрезков двух рекуррентных последовательностей.

В настоящей работе с помощью функционального варианта метода Чена – Стейна получена многомерная предельная теорема Пуассона для вектора из чисел плотных  $F$ -рекуррентных серий заданных длин с оценками скорости сходимости (в метрике расстояния по вариации). Из этих оценок также выведена теорема пуассоновского типа для числа плотных  $F$ -рекуррентных цепочек.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00318А).  
Автор выражает глубокую признательность рецензенту за сделанные замечания и внимание к статье.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов В.Г. О предельной теореме Б.А. Севастьянова для сумм зависимых случайных индикаторов // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2003. Т. 10. Вып. 3. С. 571–578.
2. Меженная Н.М. Предельные теоремы для числа плотных серий в случайной последовательности // *Дискретная математика*. 2009. Т. 21. Вып. 1. С. 105–116.
3. Меженная Н.М. Предельная теорема Пуассона для числа плотных серий заданной длины и веса // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. вып.* 2011. С. 75–82.
4. Меженная Н.М. Предельные теоремы для числа  $(a, d)$ -серий заданного веса в последовательности независимых случайных величин // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. вып.* 2012. С. 20–28.
5. Севастьянов Б.А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин // *Теория вероятностей и ее применения*. 1972. Т. 17. Вып. 4. С. 733–738.
6. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 224 с.
7. Михайлов В.Г. Об асимптотических свойствах числа серий событий // *Труды по дискретной математике*. 2006. Т. 9. С. 152–163.
8. Barbour A.D., Holst L., Janson S. Poisson approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. 278 p.
9. Lecture note series. Institute of mathematical sciences, National institute of Singapore. In 5 vol. Vol. 4. An introduction to Stein's method / Barbour A.D., Chen L.H.Y. Singapore: Singapore University Press, 2005. 226 p.
10. Lecture note series. Institute of mathematical sciences, National institute of Singapore. In 5 volumes. Vol. 5. Stein's method and applications / Barbour A.D., Chen L.H.Y. Singapore: Singapore University Press, 2005, 297 pp.
11. Михайлов В.Г. Явные оценки в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Т. 1. Вып. 4. С. 580–617.
12. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.
13. Golic J.Dj. Constrained embedding probability for two binary strings // *SIAM J. on Discrete Math.* Vol. 9. No. 3. 1996. P. 360–364.
14. Михайлов В.Г., Меженная Н.М. Оценки для вероятности плотного вложения одной дискретной последовательности в другую // *Дискретная математика*. 2005. Т. 17. Вып. 3. С. 19–27.

## REFERENCES

- [1] Mikhailov V.G. On Sevast'yanov limit theorem for sums of dependent random indicators. *Obozrenie prikladnoy i promishlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2003, vol. 10, no. 3, pp. 571–578 (in Russ.).
- [2] Mezhennaya N.M. Limit theorems for the number of dense series in a random sequence. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics and Applications], 2009, vol. 19, no. 2, pp. 215–228 (in Russ.). DOI: 10.1515/DMA.2009.012
- [3] Mezhennaya N.M. Poisson limit theorem for a number of dense series of the given length and weight. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki., Spetsvyv.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci., Spec. Issue], 2011, pp. 75–82 (in Russ.).

- [4] Mezhennaya N.M. Limit theorems for the number of  $(a, d)$ -series of given weight in a Sequence of Independent Random Quantities. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii. El. n.-t. izdanie* [Engineering Journal: Science and Innovations], 2012, vol. 4, no. 4, p. 20–28 (in Russ.).
- [5] Sevast'yanov B.A. Poisson limit law for a scheme of sums of dependent random variables. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya* [Theory of Probability and its Applications], 1972, vol. 17, no. 4, pp. 695–699], 1972, vol. 17, no. 4, pp. 733–738 (in Russ.). DOI: 10.1137/1117082
- [6] Kolchin V.F., Sevastyanov B.A., Chistyakov V.P. Sluchainye razmescheniya. *Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika* [Random placements. Probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 223 p.
- [7] Mikhailov V.G. On asymptotic properties of numbers of event series. *Trudy po Diskretnoi Matematike* [Proceedings on discrete mathematics], 2006, vol. 9. pp. 152–163 (in Russ.).
- [8] Barbour A.D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. 278 p.
- [9] Barbour A.D., Chen L.H.Y., eds. Lecture note series. Institute of mathematical sciences, National institute of Singapore. In 5 volumes. Vol. 4. An introduction to Stein's method. Singapore: Singapore University Press. 2005. 226 p.
- [10] Barbour A.D., Chen L.H.Y., eds. Lecture note series. Institute of mathematical sciences, National institute of Singapore. In 5 volumes. Vol. 5. Stein's method and applications. Singapore: Singapore University Press, 2005. 297 p.
- [11] Mikhailov V.G. Explicit estimators in limit theorems for sums of random indicators. *Obozrenie prikladnoy i promishlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 1994, vol. 1, no. 4, pp. 580–617 (in Russ.).
- [12] Shiryayev A. N. Veroyatnost' [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 576 p.
- [13] Golic J.Dj. Constrained embedding probability for two binary strings. *SIAM J. Discrete Math.*, 1996, vol. 9, no. 3, pp. 360–364. DOI: 10.1137/S0895479894246917
- [14] Mikhailov V.G., Mezhennaya N.M. Bounds for the probability of a constrained embedding of one discrete sequence into another. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics and Applications], 2005, vol. 15, no. 4, pp. 377–386 (in Russ.). DOI: 10.1515/156939205774464864

Статья поступила в редакцию 25.09.2013

Наталья Михайловна Меженная — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных работ в области дискретных задач теории вероятностей, предельных теорем и их применения в математической статистике.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

N.M. Mezhennaya — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Applied mathematics” department of Bauman Moscow State Technical University. Author of 10 publications in the field of discrete problems of probability theory, limiting theorems and their application in mathematical statistics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.