УДК 537.2

А. М. Макаров, Л. А. Лунёва,
К. А. Макаров

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В рамках классической электродинамики проанализировано физическое содержание основных понятий электростатики диэлектриков, в частности выявлены источники и физический смысл векторного поля $\vec{D}$, сформулировано корректное условие электронейтральности конечного объема диэлектрической среды. Проведено обсуждение различных вариантов вывода уравнений электростатики для непроводящей изотропной среды. Получено интегральное уравнение для вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля. Предложен метод получения интегральных уравнений для векторных полей напряженности $\vec{E}$, электрического смещения $\vec{D}$ и поляризованности среды $\vec{P}$.

E-mail: ANMAK2009@rambler.ru; Lunevala2008@rambler.ru

Ключевые слова: электростатическое поле, непроводящая изотропная среда, электрическое смещение, поляризованность среды, диэлектрик, связанный электрический заряд, поверхностная плотность заряда, электрический дипольный момент, электростатический потенциал, электронейтральность.

Содержание раздела “Электростатическое поле в непроводящей материальной среде” ряда известных учебников по электричеству и магнетизму в рамках курсов общей и теоретической физики, несмотря на давнюю историю вопроса, требует обсуждения как в научном, так и в методическом отношении.

Феноменологическое описание явлений электростатики в диэлектрической среде с использованием векторных полей напряженности электростатического поля $\vec{E}$, поляризованности среды $\vec{P}$ и вектора электрического смещения (вектора электрической индукции) $\vec{D}$ является общепринятым. Однако существуют различия в интерпретации физического содержания этих понятий, в определении числа и физического содержания источников рассматриваемых векторных полей, в определении понятия электронейтральности объема диэлектрика, в построении доказательства справедливости основных уравнений электростатики.

Например, в учебнике А.Н. Матвеева [1, с. 134] читаем: “...единственным источником $\vec{D}$ являются свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается”. В учебнике И.Е. Иродова [2, с. 83] написано: “Поле вектора $\vec{D}$ зависит, вообще говоря, как от сторонних, так и от связанных зарядов (как и поле вектора $\vec{E}$)”. В курсе общей физики И.В. Савельева читаем: “Источниками поля вектора $\vec{D}$ служат только сторонние заряды” [3, с. 86], а в его же “Основах теоретической физики” [4, с. 194] утверждается, что это не так.

Распространенное мнение о физической несостоятельности векторного поля $\vec{D}$ зафиксировано И.Е. Иродовым [2, с. 82]: “Заметим, что вектор $\vec{D}$ представляет собой сумму двух совершенно различных величин: $\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{P}$. Поэтому он действительно вспомогательный вектор, не имеющий какого-либо глубокого физического смысла”. Аналогичное утверждение можно найти и в классической монографии И.Е. Тамма [5, с. 84].

Поверхностная плотность связанных электрических зарядов σ' на поверхности S в учебнике И.Н. Мешкова и Б.В. Чирикова [6] рассматривается как алгебраическая сумма поверхностных плотностей связанных электрических зарядов с одной и другой стороны поверхности. В большинстве учебников, в том числе и учебников по теоретической физике, величина σ' выступает как единственный параметр поверхностного распределения связанных зарядов.

Во многих монографиях для доказательства справедливости локального соотношения $\operatorname{div}\vec{P} = -\rho'$ используется теорема Гаусса–Остроградского для произвольного объема диэлектрика, ограниченного замкнутой поверхностью S. Исходной посылкой при этом является утверждение, что электрический момент рассматриваемого объема можно описать выражением $\vec{p}_e = \int_V \vec{r}\cdot\rho'\,dV$ при выполнении условия электронейтральности $\int_V \rho'\,dV = 0$. Замечание Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [7] о том, что анализ написанных выше интегралов по объему необходимо дополнить исследованием предельного перехода, связанного с возможным нарушением непрерывности объемной плотности связанного электрического заряда на поверхности S, охватывающей объем V, практически является попыткой уклониться от вывода $\rho' \equiv 0$ внутри рассматриваемого произвольного объема. После более или менее сложных вычислений авторам различных учебников по теоретической физике приходится требовать, чтобы интеграл $\oint_S P_n dS$ по замкнутой поверхности S обратился в нуль, а для этого приходится провести рассматриваемую поверхность в вакууме, т.е. вне, а не внутри рассматриваемого объема [7–11]. Основой построения непротиворечивой системы физических представлений могут служить идея М. Фарадея [12] о двустороннем характере поверхности раздела двух сред и подробнейшее исследование свойств векторных полей Н.Е. Кочина [13].

Вопрос о том, что положить в основу построения феноменологической электростатики диэлектриков — связанные заряды, элементарные диполи или еще что-то — решается по-разному. По представлениям Фарадея и Дж.К. Максвелла, "...количество электричества определяется числом силовых трубок, идущих от этого тела... ". Электрический заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности, по теории Максвелла имеет лишь математическое определение: "величина, пропорциональная потоку индукции, выходящему из этой поверхности" [14]. Рассуждения Фарадея о поляризации диэлектрика "...в сущности, представляют собой перевод теории С.Д. Пуассона об индуцированном магнетизме на язык электростатики" [15]. Отметим, что в теории Пуассона "напряженность магнитного поля, которое создает тело во внешнем пространстве, эквивалентно напряженности, которую создало бы воображаемое (!?) распределение магнитной жидкости, состоящее из слоя на поверхности тела,...вместе с объемным распределением плотности по всему телу" [15]. "...В рамках макроскопической теории, рассматривающей диэлектрик как сплошную среду (континуум), для описания электрического состояния диэлектрика используется понятие электрического заряда..., осредненного по малому объему, содержащему достаточно большое число атомов" [16]. "Все среды, кроме вакуума, в микроскопических (атомных) масштабах могут обладать распределением электрических дипольных моментов, что приводит к возникновению электрического дипольного момента единицы объема среды, называемого диэлектрической поляризацией $\vec{P}$" [17].

В настоящей работе предпринята попытка устранить отмеченные выше противоречия в описании свойств основных векторных полей и погрешности вывода дифференциальных уравнений электростатики изотропной диэлектрической среды, установить непротиворечивое условие электронейтральности произвольного объема конечных размеров в неоднородной диэлектрической среде и получить интегральные уравнения для непосредственного определения векторных полей напряженности, поляризованности среды и электрической индукции.

Электростатическое поле в непроводящей изотропной не обязательно однородной материальной среде, произвольный объем которой в отсутствие сторонних электрических зарядов является электрически нейтральным [1], может быть описано в феноменологическом приближении с равным успехом либо с помощью гипотезы о распределении электрического дипольного момента по объему диэлектрика, либо с помощью гипотезы о существовании индуцированных (поляризационных или связанных) электрических зарядов, распределенных по объему диэлектрика и по внешней поверхности рассматриваемого объема [18, 5].

В первом случае электрический дипольный момент $d\vec{p}_e$ элементарного объема dV в окрестности точки пространства с декартовыми координатами (x, y, z) вводится соотношением

$$d\vec{p}_e = \vec{P}(x, y, z)\, dV, \tag{1}$$

где векторное поле $\vec{P}(x, y, z)$ — поле поляризованности среды — априори имеет реальный физический смысл: электрический дипольный момент единицы объема. В соответствии с приведенным выше определением либо из обработки экспериментальных результатов, либо из молекулярно-кинетических или квантово-механических представлений следует в линейном приближении материальное уравнение среды:

$$\vec{P}(x, y, z) = \varepsilon_0 \kappa(x, y, z) \vec{E}(x, y, z), \tag{2}$$

где ε_0 — электрическая постоянная; $\kappa = \varepsilon - 1$ — диэлектрическая восприимчивость; ε — диэлектрическая проницаемость среды; $\vec{E}$ — напряженность электрического поля в среде (для простоты далее не будем рассматривать неоднородную форму материального уравнения). Если материальное уравнение среды в форме (2) определяет в некоторой области непрерывное векторное поле $\vec{P}(x, y, z)$, то, естественно, становятся определенными и локальные объемные плотности источников рассматриваемого векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \operatorname{div} \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \kappa; \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \operatorname{rot} \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{grad} \kappa = -\varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{grad} \kappa. \tag{4}$$

В соотношении (4) учтен потенциальный характер векторного поля напряженности $\vec{E}$ электростатического поля. При построении системы основных уравнений электростатики [19] соотношение (4) практически не используется, как правило, основное внимание уделяется выявлению физического смысла правой части соотношения (3). Следуя известной монографии И.Е. Тамма [5], рассмотрим скалярный потенциал $\varphi(M)$ электростатического поля (M — точка наблюдения), образованный элементарными дипольными электрическими моментами $d\vec{p}_e$ в произвольном объеме V, ограниченном замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S в непрерывной диэлектрической среде, не содержащей сторонних электрических зарядов. Ниже для определенности будем предполагать, что на рассматриваемой поверхности S нет специфического поверхностного распределения электрических дипольных моментов. В этом случае с учетом определения (1) справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\vec{P}(M')\cdot\vec{R}(M,M')}{R^3(M,M')}dV(M') = \\
= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \vec{P}(M')\cdot \mathrm{grad}'\left(\frac{1}{R(M,M')}\right)dV(M') = \\
= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \left(-\frac{\mathrm{div}'\vec{P}(M')}{R(M,M')} + \mathrm{div}'\left(\frac{\vec{P}(M')}{R(M,M')}\right)\right)dV(M') = \\
= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \left(-\frac{\mathrm{div}'\vec{P}(M')}{R(M,M')}\right)dV(M') + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\limits_S \frac{\vec{P}(M')\cdot\vec{n}(M')}{R(M,M')}dS(M'),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где M' — точка пространства, в которой расположен источник скалярного потенциала; $\vec{R}(M,M')$ — вектор, проведенный из точки M' в точку пространства M; $R(M,M')$ — расстояние между этими точками (штрихом помечены дифференциальные операции по координатам точки M'); $\vec{n}(M')$ — единичный вектор внешней по отношению к объему V нормали к элементу поверхности $dS'(M')$. В соотношениях (5) использованы известное выражение для скалярного потенциала электрического диполя, известные дифференциальные векторные тождества и математическая теорема Гаусса–Остроградского. Сравнивая окончательную форму соотношений (5) с зависимостью в вакууме для потенциала электростатического поля, образованного электрическими зарядами, распределенными по объему с объемной плотностью $\rho(x,y,z)$ и по поверхности S с поверхностной плотностью $\sigma(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$, выражению $\mathrm{div}\vec{P}$ можно приписать физический смысл объемной плотности индуцированных (связанных) зарядов, взятой с обратным знаком:

$$
\mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho', \tag{6}
$$

а выражению $\vec{P}\cdot\vec{n} = P_n$ — физический смысл поверхностной плотности индуцированных (связанных) зарядов на внутренней стороне рассматриваемой замкнутой поверхности S:

$$
P_n = \sigma'_{in}. \tag{7}
$$

Обратим внимание на то, что соотношение (7) получено для внутренней стороны замкнутой поверхности S, проведенной в области непрерывности диэлектрической среды. Общепринятое мнение, что на такой поверхности не может находиться распределенный связанный заряд, требует уточнения.

Пусть замкнутая поверхность S, ограничивающая объем V, полностью лежит внутри замкнутой поверхности S_0, а диэлектрическая восприимчивость κ в объеме V не отличается от диэлектрической восприимчивости среды κ_0 в объеме V_0, расположенном между рассматриваемыми поверхностями. В этом случае поверхность S является внешней поверхностью относительно объема V, а поверхность $S \cup S_0$ — внешней по отношению к объему V_0. Записывая соотношения (5) для объема $V \cup V_0$ в целом, получаем

$$4\pi\varepsilon_0\varphi(M) = \int\limits_{V\cup V_0} \left(-\frac{\mathrm{div}'\vec{P}(M')}{R(M,M')}\right) dV(M') + \\ + \oint\limits_{S_0} \frac{\vec{P}(M')\cdot\vec{n}(M')}{R(M,M')} dS_0(M'). \quad (8)$$

Рассматривая объемы V и V_0 по отдельности и суммируя результаты, приходим к выражению

$$4\pi\varepsilon_0\varphi(M) = \int\limits_{V} \left(-\frac{\mathrm{div}'\vec{P}(M')}{R(M,M')}\right) dV(M') + \\ + \int\limits_{V_0} \left(-\frac{\mathrm{div}'\vec{P}(M')}{R(M,M')}\right) dV(M') + \oint\limits_{S} \frac{\vec{P}(M')\vec{n}(M')}{R(M,M')} dS(M') + \\ + \oint\limits_{S\cup S_0} \frac{\vec{P}(M')\cdot\vec{n}(M')}{R(M,M')} dS(M'). \quad (9)$$

Видно, что интегралы по объемам V и V_0 в полученном выражении равны интегралу по совокупному объему $V \cup V_0$ предыдущего выражения, а сумма поверхностных интегралов сводится к интегралу по поверхности S_0, поскольку имеет место равенство

$$\oint\limits_{S} \frac{\vec{P}(M')\cdot\vec{n}(M')}{R(M,M')} dS(M') + \oint\limits_{S} \frac{\vec{P}(M'')\cdot\vec{n}(M'')}{R(M,M'')} dS(M'') = 0. \quad (10)$$

Здесь одним штрихом помечены величины, являющиеся предельными при приближении к поверхности S из объема V, а двумя штрихами — при приближении к той же самой поверхности S из объема V_0. В силу предположения о непрерывном характере векторного поля $\vec{P}(M)$ в совокупной области изменения координат (x, y, z) имеем $\vec{P}(M') = \vec{P}(M'')$ при совпадении точек M' и M''. Кроме того, $\vec{n}(M') = -\vec{n}(M'')$, поскольку внешняя нормаль по отношению к объему V_0 при совпадении точек M' и M'' является, очевидно, внутренней нормалью по отношению к объему V.

Физическая интерпретация полученных результатов сводится к утверждению, что на поверхности S следует различать ее внутреннюю сторону (по отношению к объему V), на которой имеет место поверхностная плотность индуцированных зарядов σ'_{in}, и ее внешнюю сторону (по отношению к объему V), на которой имеет место поверхностная плотность индуцированных зарядов $\sigma'_{out} = -\vec{P}(M'') \cdot \vec{n}(M')$. Общепринятое толкование выражения “поверхностная плотность индуцированных зарядов” относится к алгебраической сумме введенных распределений индуцированного заряда по поверхности:

$$\sigma' = \sigma'_{in} + \sigma'_{out} = P_n(M') - P_n(M''). \tag{11}$$

Если в объеме V и объеме V_0 в окрестности поверхности S нормальные компоненты векторного поля $P_n(M')$ и $P_n(M'')$ поляризованности среды не различаются, то, действительно, суммарная поверхностная плотность индуцированных зарядов на рассматриваемой поверхности обращается в нуль, в противном случае (рассматривается поверхность раздела двух диэлектриков) суммарная поверхностная плотность индуцированных зарядов на рассматриваемой поверхности определяется разностью нормальных компонент поляризованности среды с внутренней и наружной сторон поверхности S. Если объем V граничит с вакуумом или с проводником (в обоих случаях $P_n(M'') = 0$), то

$$\sigma' = P_n(M'). \tag{12}$$

Возможность (или необходимость) рассматривать поверхность S как двусторонний объект исторически восходит к Фарадею и Максвеллу [12]. В работе [12] с помощью этого приема рассмотрено объяснение непрерывности нормальных компонент вектора электрической индукции при переходе через поверхность, расположенную в непрерывной диэлектрической среде. В учебнике И.Н. Мешкова и Б.В. Чирикова [6] представления о σ'_{in} и σ'_{out} использованы непосредственно. В известной монографии Н.Е. Кочина [13] двустороннее представление о замкнутой поверхности, ограничивающей некоторый объем в области непрерывности произвольного векторного поля, использовано при обсуждении теоремы Гаусса–Остроградского.

Таким образом, представление об электрически нейтральной системе диполей в рассматриваемом объеме привело к тому, что внутри объема выявлена объемная плотность индуцированных электрических зарядов как объемный источник векторного поля поляризованности среды, а на внутренней поверхности рассматриваемого объема — поверхностная плотность индуцированных зарядов, которую можно рассматривать в качестве поверхностного источника того же поля. При этом установлено условие электронейтральности произвольного объема диэлектрической среды:

$$\int_V \rho' dV + \oint_S \sigma'_{in} dS = 0, \tag{13}$$

которое должно выполняться, в частности, и для произвольного объема, расположенного в диэлектрической среде с непрерывными параметрами. Именно это условие является математической формой физического требования электронейтральности произвольного объема диэлектрика вне зависимости от того, рассматривается ли тело конечных размеров в вакууме, или объем конечных размеров в непрерывной диэлектрической среде. Только с использованием приведенного условия при доказательстве справедливости соотношений (6) и (7) удается избежать привлечения не связанных с существом рассматриваемой проблемы векторных тождеств и интегрирования по поверхности, охватывающей рассматриваемый объем и при этом целиком лежащей в вакууме [7–10, 13].

Предположение о существовании индуцированных (поляризационных или связанных) электрических зарядов, распределенных по объему диэлектрика и по внешней поверхности объема конечных размеров в диэлектрической среде, приводит к аналогичным результатам. Рассмотрим произвольный объем V с боковой поверхностью S, выделенный в непрерывной диэлектрической среде. Пусть в объеме V имеется объемная плотность ρ' связанного электрического заряда, а на его замкнутой боковой поверхности S имеется (односторонняя, внутренняя) поверхностная плотность σ'_{in} связанного электрического заряда. Пусть указанные распределения связаны соотношением электронейтральности (13).

Электрический момент $d\vec{p}_V$ элементарного объема dV в окрестности точки пространства M' с декартовыми координатами x', y', z' относительно точки наблюдения $M(x, y, z)$ вводится соотношением

$$d\vec{p}_V = -\vec{R}(M, M')\, \rho'(M')\, dV(M'), \tag{14}$$

где $\vec{R}(M, M')$ — вектор, проведенный из точки расположения элементарного объема dV в точку наблюдения. Электрический момент связанных электрических зарядов элементарной площади поверхности dS в окрестности точки $M'(x', y', z')$ относительно точки наблюдения $M(x, y, z)$ можно ввести аналогичным образом:

$$d\vec{p}_S = -\vec{R}(M, M')\, \sigma'_{in}(M')\, dS(M'); \tag{15}$$

при этом имеется в виду внутренняя сторона поверхности и внутренняя поверхностная плотность связанных (индуцированных) электрических зарядов на этой стороне поверхности. Суммарный электрический момент рассмотренных зарядов, распределенных по объему V с плотностью ρ' и распределенных по его боковой поверхности S с плотностью σ'_{in}, относительно точки наблюдения, естественно, определяется выражением

$$\vec{p}_e = -\int_V \vec{R}(M, M')\,\rho'(M')\,dV(M') - \\ - \oint_S \vec{R}(M, M')\,\sigma'_{in}(M')\,dS(M'). \quad (16)$$

Отметим, что рассматриваемое выражение, очевидно, справедливо для точек пространства $M(x, y, z)$, расположенных как внутри замкнутой поверхности S, так и снаружи. Отметим также, что выражение для электрического момента $\vec{p}_e$ системы индуцированных зарядов в силу описанного выше условия электронейтральности системы рассматриваемых индуцированных зарядов (13) не зависит от выбора точки наблюдения. Из выражения (16) следует, что при вычислении дипольного момента рассматриваемой системы зарядов в пересчете на единицу объема необходимо учитывать не только вклад объемной плотности индуцированных электрических зарядов, что чаще всего и делается в учебной литературе, но и влияние их поверхностного распределения.

Запишем выражение для электростатического потенциала $\varphi(M)$ произвольной точки пространства M, считая величины $\rho' dV$ и $\sigma'_{in} dS$ элементарными сосредоточенными зарядами:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho'(M')\,dV(M')}{R(M, M')} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma'_{in}(M')\,dS(M')}{R(M, M')}. \quad (17)$$

Скалярное поле $\varphi(x, y, z)$, согласно соотношению (17), имеет своими источниками объемную плотность ρ' и поверхностную плотность индуцированных зарядов σ'_{in}. Введем в рассмотрение (пока формально) неявно определенное векторное поле $\vec{P}(M)$:

$$\rho'(M) = -\operatorname{div}\vec{P}(M). \quad (18)$$

Предположим, что непрерывное в объеме V векторное поле $\vec{P}(x, y, z)$ удовлетворяет предельному граничному условию

$$P_n(M') = \sigma'_{in}(M'), \quad M' \in S. \quad (19)$$

Далее необходимо установить физический смысл векторного поля $\vec{P}(x, y, z)$. Выражение для скалярного потенциала (17) электростатического поля с учетом введенных определений (18) и (19) приобретает вид

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{(-\operatorname{div}' \vec{P}(M')) \cdot dV(M')}{R(M, M')} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{P_n(M') \cdot dS(M')}{R(M, M')}; \quad (20)$$

здесь и ниже дифференциальные операции, помеченные штрихом, выполняются по координатам точки M'. Преобразуем соотношение (20) с помощью теоремы Гаусса–Остроградского:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \left(\operatorname{div}' \left(\frac{P(M')}{R(M, M')} \right) - \frac{\operatorname{div}' \vec{P}(M')}{R(M, M')} \right) dV(M'). \quad (21)$$

Используем в выражении (21) векторное тождество

$$\frac{\vec{P}(M') \cdot \vec{R}(M, M')}{R^3(M, M')} \equiv \vec{P}(M') \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{R(M, M')} \right) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{div}' \left(\frac{P(M')}{R(M, M')} \right) - \frac{\operatorname{div}' \vec{P}(M')}{R(M, M')}. \quad (22)$$

В итоге приходим к соотношению

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \vec{P}(M') \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{R(M, M')} \right) dV(M') =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\vec{P}(M') \cdot \vec{R}(M, M')}{R^3(M, M')} dV(M'), \quad (23)$$

позволяющему приписать векторному полю $\vec{P}(x, y, z)$ физический смысл электрического дипольного момента единицы объема или векторного поля поляризованности среды. После установления этого факта становится определенным материальное уравнение среды в форме (2) и уточняются локальные объемные плотности источников векторного поля поляризованности среды в форме (3) и (4).

Для описания основных закономерностей электростатики изотропных диэлектриков удобно ввести векторное поле $\vec{D} = \vec{D}(x, y, z)$ — поле электрической индукции или поле электрического смещения. С этой целью рассмотрим некоторый произвольный объем V с боковой поверхностью S в непроводящей среде. Пусть сторонний электрический заряд в объеме V непрерывно распределен с объемной плотностью ρ и в рассматриваемом объеме отлично от нуля непрерывное векторное поле поляризованности $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z)$. Запишем выражение для потенциала электростатического поля для произвольной точки наблюдения M

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho(M') \cdot dV(M')}{R(M, M')} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\vec{P}(M') \cdot \vec{R}(M, M') \cdot dV(M')}{R^3(M, M')}. \quad (24)$$

Выражением (24) зависимость $\varphi(M)$ определена полностью в том смысле, что нет физически обоснованной необходимости учитывать какие-либо дополнительные источники рассматриваемого скалярного поля. Преобразуем подынтегральное выражение во втором слагаемом правой части соотношения (24):

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho(M') \cdot dV(M')}{R(M, M')} -$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\operatorname{div}' \vec{P}(M') \cdot dV(M')}{R(M, M')} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{P_n(M') \cdot dS(M')}{R(M, M')}. \quad (25)$$

В соотношении (25) выражение P_n является проекцией вектора поляризованности среды на направление внешней нормали по отношению к объему V.

По соотношению (25) вычислим выражение для дивергенции вектора напряженности электростатического поля в предположении возможности провести дифференцирование "по параметру" (по координатам точки наблюдения) под знаком интеграла:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\Delta\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \rho(M') \, \Delta \left(\frac{1}{R(M, M'} \right) dV(M') +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \operatorname{div}' \vec{P}(M') \, \Delta \left(\frac{1}{R(M, M'} \right) dV(M') -$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_S \vec{P}(M') \cdot \vec{n}(M') \, \Delta \left(\frac{1}{R(M, M'} \right) dS(M'). \quad (26)$$

Используя известное соотношение математического анализа $\Delta(1/R) = -4\pi\delta(M, M')$ и свойства дельта-функции Дирака для внутренних точек объема V, не являющихся особыми, получаем

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(M) = \rho(M) - \operatorname{div} \vec{P}(M), \quad (27)$$

что позволяет определить вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (28)$$

для которого выполняется уравнение

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho. \tag{29}$$

Отметим, что сложить две физические величины (соотношение (28)) можно при выполнении нескольких условий: эти величины должны иметь одно и то же физическое содержание, иметь одну и ту же физическую размерность и подчиняться одним и тем же правилам преобразования при переходе от одной системы координат к другой, т.е. являться тензорными величинами одного и того же типа. Если величина ρ в соотношении (29) есть объемная плотность стороннего электрического заряда, то дивергенцию поляризованности среды, взятую с обратным знаком, нужно интерпретировать как объемную плотность связанных зарядов.

В качестве объемных плотностей источников непрерывного векторного поля выступают распределения дивергенции и ротора этого векторного поля. Плотность скалярного источника векторного поля $\vec{D}$ установлена выше — это объемная плотность сторонних электрических зарядов. Плотность векторного источника векторного поля $\vec{D}$ совпадает с плотностью соответствующего векторного источника векторного поля поляризованности среды:

$$\operatorname{rot}\vec{D} = \operatorname{rot}\vec{P} = -\varepsilon_0\vec{E} \times \operatorname{grad}\varepsilon. \tag{30}$$

Таким образом, объемные плотности источников векторного поля $\vec{D}$ полностью определены.

В учебной литературе по электростатике можно встретить утверждение, что вектор напряженности электростатического поля и вектор поляризованности среды имеют разный физический смысл и даже отличаются физической размерностью, при этом вектор электрического смещения оказывается лишенным физического содержания. Вспомним, что поляризованность среды является электрическим дипольным моментом единицы объема. Рассмотрим выражение для величины $\varepsilon_0\vec{E}$ в вакууме, если электростатическое поле образовано сосредоточенным зарядом q:

$$\varepsilon_0\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{R}(M,M')}{R^3(M,M')} = \frac{\vec{p}_e(q,M,M')}{3V_{R(M,M')}}. \tag{31}$$

Числитель правой части выражения (31) — это электрический момент заряда q с точностью до знака относительно точки наблюдения, а знаменатель — утроенный объем шара радиуса $R(M,M')$. Таким образом, в выражении (28) складываются физические величины одного физического содержания, одной физической размерности и одинаковых трансляционных свойств. Следствием этого является установление определенного физического содержания понятия “вектор $\vec{D}$”.

Замечание авторов учебника [6] о том, что “система единиц СИ менее «физична» по сравнению с гауссовой системой единиц, поскольку векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ отличаются не только по величине, но и по размерности, хотя векторное поле $\vec{D}$ является частью векторного поля $\vec{E}$”, на наш взгляд, нуждается в уточнении. Из определения (28) с очевидностью следует, что обсуждаемые векторы действительно разные по своему физическому содержанию: $\vec{E}$ — силовая характеристика поля, а $\vec{D}$ — объемная плотность электрического дипольного момента. В гауссовой системе единиц определение вектора $\vec{D}$ имеет вид

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \tag{32}$$

Общее заключение, что векторное поле $\vec{D}$ является частью векторного поля $\vec{E}$, при строгом рассмотрении неправомерно. Соотношение (31) в гауссовой системе приобретает вид

$$\vec{E}(M) = \frac{q\vec{R}(M,M')}{R^3(M,M')} = \frac{\vec{p}_e(q,M,M')}{\dfrac{3}{4\pi}V_{R(M,M')}}, \tag{33}$$

не изменяя своего физического содержания. В этом случае определение (32) устанавливает связь между объемными плотностями электрических моментов, описываемых соответственно векторными полями $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$, но не наделяет векторное поле $\vec{D}$ свойством силовой характеристики электростатического поля, поскольку физическое содержание второго слагаемого правой части определения (32) — векторного поля $\vec{P}$ — полностью определено. Форма записи для векторного поля $\vec{D}$ в виде соотношения (32) в гауссовой системе единиц порождает иллюзию существования у этого векторного поля несуществующих в действительности физических свойств. С этой точки зрения система СИ более последовательна.

Решение краевых задач электростатики изотропной неоднородной диэлектрической среды сопряжено с определенными математическими трудностями. В подобной ситуации могут оказаться полезными интегральные уравнения для непосредственного определения векторных полей напряженности, поляризованности среды и электрического смещения электростатического поля.

Для произвольного непрерывного векторного поля $\vec{a}$ в безграничном пространстве имеет место известное тождество векторного анализа [13]

$$4\pi\vec{a}(M) = -\,\mathrm{grad}\int\limits_{\infty}\frac{\mathrm{div}'\vec{a}(M')}{R(M,M')}dV(M') + \mathrm{rot}\int\limits_{\infty}\frac{\mathrm{rot}'\vec{a}(M')}{R(M,M')}dV(M'). \tag{34}$$

Для непрерывного векторного поля в ограниченном объеме правая часть рассматриваемого тождества должна быть дополнена слагаемым, учитывающим условия на внешней границе рассматриваемого объема [13]. В целом это известная математическая проблема восстановления векторного поля по распределению в объеме и на внешней поверхности объема источников этого поля (граничные условия в математической физике понимаются как “предельные”, предельный переход выполняется “из объема к граничной поверхности”).

Если в неограниченном пространстве известно распределение объемной плотности сторонних электрических зарядов, обеспечивающее возможность существования векторного поля электрического смещения, то тождество векторного анализа (34) позволяет записать интегральное уравнение для непосредственного определения векторного поля $\vec{D} = \vec{D}(x, y, z)$:

$$4\pi\vec{D}(M) - \operatorname{rot}\int\limits_{\infty} \frac{\operatorname{rot}'\vec{D}(M')}{R(M,M')}dV(M') = -\operatorname{grad}\int\limits_{\infty} \frac{\rho(M')}{R(M,M')}dV(M'). \tag{35}$$

Если применить тождество (34) к непрерывному векторному полю $\vec{D}$ и использовать соответствующие материальные уравнения среды, можно получить интегральное уравнение, например, для непосредственного определения векторного поля $\vec{E}$:

$$\vec{E}(M) + \frac{1}{4\pi\varepsilon(M)}\operatorname{rot}\int\limits_{\infty} \frac{\vec{E}(M') \times \operatorname{grad}'\varepsilon(M')}{R(M,M')}dV(M') =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(M)}\operatorname{grad}\int\limits_{\infty} \frac{\rho(M')}{R(M,M')}\,dV(M'). \tag{36}$$

Похожее по форме интегральное уравнение можно записать для векторного поля $\vec{P}$.

Выводы. 1. Векторное поле напряженности электростатического поля в изотропной диэлектрической среде имеет своими источниками объемную плотность сторонних (некомпенсированных) электрических зарядов и объемную плотность связанных (индуцированных) электрических зарядов. Объемная плотность связанных зарядов фактически является проявлением неоднородности объемной плотности электрического дипольного момента молекул вещества в физически бесконечно малом элементе объема. Поверхностная плотность сторонних электрических зарядов на поверхности рассматриваемого объема, как правило, является известной из постановки задачи. Поверхностная плотность связанных (индуцированных) электрических зарядов на внутренней стороне боковой поверхности произвольного объема диэлектрической среды фактически является нормальной к элементу поверхности проекцией вектора поляризованности среды. Объемные источники и поверхностные источники векторного поля не могут быть заданы независимо друг от друга. Сформулированное выше условие электронейтральности является естественным следствием соответствующих теорем векторного анализа.

2. Основные дифференциальные уравнения электростатики изотропной диэлектрической среды выведены с использованием интегральных теорем векторного анализа в рамках их применимости.

3. Установлено физическое содержание векторного поля "электрическая индукция".

4. Получены интегральные уравнения для непосредственного определения векторных полей напряженности, поляризованности среды и электрической индукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.
2. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы. – 3-е изд., испр. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2000. – 352 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 2. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие для втузов. – М.: Астрель, 2005. – 336 с.
4. Савельев И. В. Основы теоретической физики: Учеб. руководство: Для вузов. В 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 496 с.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. – 10-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 504 с.
6. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Часть 1. Электричество и магнетизм.. – Новосибирск.: Наука. Сиб. отд-ние., 1987. – 272 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб.пособие. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 664 с.
8. Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика: Учеб. пособие / Под ред. И.Н. Топтыгина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 400 с.
9. Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. Часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе: Учеб. пособие. – М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. – 848 с.
10. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
11. Власов А. А. Макроскопическая электродинамика: Учеб. пособие для гос. университетов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 229 с.
12. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть 2: Пер. с немец. – Л.–М.: ОНТИ. Гл. ред. общетехнич. литературы, 1937. – 998 с.
13. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 9-е изд. – М.: Наука, 1965. – 427 с.

14. Л а н ж е в е н П. Избранные произведения. Статьи и речи по общим вопросам науки: Пер. с франц. – М.: ИЛ, 1949. – 439 с.
15. У и т т е к е р Э. История теории эфира и электричества. Классические теории. Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 512 с.
16. Ф и з и ч е с к а я энциклопедия / Под ред. А.М. Прохорова. Т 5. Стробоскопические приборы – Яркость. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 760 с.
17. П у л Ч. Справочное руководство по физике. Фундаментальные концепции, основные уравнения и формулы: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 461 с.
18. Ф р е н к е л ь Я. И. Собрание избранных трудов. Т. 1. Электродинамика (общая теория электричества). – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 371 с.
19. Ф и з и ч е с к а я энциклопедия / Под ред. А.М. Прохорова. Т. 1. Ааронова-Длинные. – М.: Сов. энцикл., 1988, 704 с.

Статья поступила в редакцию 21.06.2010

Анатолий Макарович Макаров родился в 1939 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, лауреат Государственной премии СССР в области науки и техники. Автор более 200 научных работ в области математического моделирования физических процессов.

A. M. Makarov (b. 1939) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. D. Sc. (Eng.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Winner of the State Prize of the USSR in Science and Technology. Author of more than 200 publications in the field of mathematical simulation of physical processes.

Любовь Александровна Лунёва родилась в 1948 г., окончила в 1971 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области математической физики.

L.A. Lunyova (b. 1948) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of mathematical physics.

Константин Анатольевич Макаров родился в 1968 г., окончил в 1991 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, и.о. доцента кафедры “Гидравлика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 20 научных работ в области гидродинамических процессов.

K.A. Makarov (b. 1968) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1991. Ph. D. (Eng.), acting assoc. professor of “Hydraulics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of hydro-dynamical processes.