

Д. А. П р и к а з ч и к о в,  
В. Я. Т о м а ш п о л ь с к и й

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КРАЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

*Исследована задача о вынужденных краевых колебаниях предварительно деформированных несжимаемых упругих тел со смешанными граничными условиями на лицевых поверхностях. Рассмотрены колебания полуполосы, а также соответствующие колебания трехмерного бруса прямоугольного сечения. В результате сравнения результатов для двумерного и трехмерного случаев отмечено, что предельный случай подавления явления краевого резонанса в случае плоской задачи для полуполосы не может иметь места в случае бруса.*

**E-mail: prikazchikovda@yandex.ru**

**Ключевые слова:** локализованные колебания, предварительно деформированный, граничные условия на лицевых поверхностях.

Краевые колебания и краевой резонанс находят многочисленные приложения в геодинамике, методах неразрушающего контроля и других областях науки и техники. Определение резонансных частот является одной из важнейших составляющих оптимизации динамических параметров элементов конструкций. Явление краевого резонанса было впервые отмечено в работе [1] и широко исследовалось [2–6]. В недавно вышедшей монографии [7] приведен фундаментальный обзор работ, посвященных исследованию явления краевого резонанса. Следует отметить аналитический подход, впервые примененный в работе [8], где в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях удалось выявить связь между собственными частотами краевых колебаний и скоростью поверхностной волны. Отметим, что новые аспекты задачи о краевых колебаниях проявились для предварительно деформированных упругих тел. Исследование свойств упругих волн в предварительно деформированных телах особенно активно стало развиваться во второй половине XX века [9–11].

В настоящей работе исследованы вынужденные краевые колебания в предварительно деформированных упругих телах, в частности в случае полубесконечной полосы, а также для полубесконечного бруса прямоугольного сечения. Работа является продолжением исследований, в которых была показана связь между скоростью поверхностной волны и краевым спектром в случае свободных колебаний предварительно деформированной упругой полуполосы [12], а также трехмерной задачи для полубесконечной пластины [15]. Проведенный в

настоящей работе анализ показал, что не все характерные черты вынужденных колебаний, имевшие место в плоской задаче, присутствуют в трехмерном случае. Возможность полностью исключить явление краевого резонанса для предварительно деформированной упругой полуполосы, отмеченная в работе [12], не может быть реализована в случае вынужденных колебаний бруса. В то же время предельный случай, связанный с неограниченным ростом плотности краевого спектра при определенном сочетании параметров предварительной деформации, присутствует и в трехмерном случае.

**Основные соотношения.** Рассматривается модель предварительно деформированного упругого несжимаемого изотропного тела. Из начального состояния под действием значительной статической нагрузки тело переходит в состояние равновесия, на которое накладываются перемещения малой амплитуды, являющиеся предметом изучения. Геометрия полуполосы задается условиями  $-h \leq x_1 \leq h$ ,  $0 \leq x_2 < \infty$ , а в случае бруса  $-h_1 \leq x_1 \leq h_1$ ,  $-h_3 \leq x_3 \leq h_3$ ,  $0 \leq x_2 < \infty$ .

Как известно, ненулевые компоненты тензора упругости в случае несжимаемого изотропного предварительно деформированного материала имеют форму  $B_{iijj}$ ,  $B_{ijji}$  и  $B_{ijij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  [11]. Запишем уравнения движения и линеаризованное условие несжимаемости в виде

$$B_{jilk}u_{k,lj} - p^*_{,i} = \rho \ddot{u}_i, \quad u_{i,i} = 0. \quad (1)$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам;  $u_i$  — перемещения, а  $p^*$  — дополнительное давление. Компоненты линеаризованного тензора дополнительных напряжений имеют вид

$$\tau_i^{(j)} = B_{jilk}u_{k,l} + \bar{p}u_{j,i} - p^* \delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\bar{p}$  — конечное статическое давление.

**Вынужденные колебания полуполосы.** Краевые колебания полубесконечной полосы со смешанными граничными условиями на лицевых поверхностях были подробно изучены в работе [12], поэтому в настоящей работе приводятся лишь некоторые основные результаты.

Рассматривается плоское напряженно-деформированное состояние, т.е.  $u_3 \equiv 0$  и  $u_i = u_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2$ . Зададим граничные условия на лицевых поверхностях в виде

$$u_1 = \tau_2^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = \pm h, \quad (3)$$

ограничивающем продольные перемещения [12]. Обозначим

$$p_1 = \frac{\Lambda_1^n}{h}, \quad \Lambda_1^n = n\pi, \quad p_2 = \frac{\Lambda_2^n}{h}, \quad \Lambda_2^n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Существует два семейства решений задачи (1), (3) относительно перемещений  $u_i$  и дополнительного давления  $p^*$ :

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, p^*) &= (U \sin(p_1 x_1), V \cos(p_1 x_1), p_1 P \cos(p_1 x_1)) e^{q x_2} e^{i \omega t}; \\ (u_1, u_2, p^*) &= (U \cos(p_2 x_1), V \sin(p_2 x_1), p_2 P \sin(p_2 x_1)) e^{s x_2} e^{i \omega t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что с учетом (4) решения (5) удовлетворяют граничным условиям (3) автоматически. Приведем основные результаты для первого семейства решений (5). Анализ результатов в случае второго семейства полностью аналогичен.

Решения представляются в форме линейных комбинаций соответствующих экспонент, убывающих от края  $x_2 = 0$ , т.е.

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=1}^2 \hat{q}_k V^{(k)} e^{\hat{q}_k \Lambda_1^n \zeta} \sin(\Lambda_1^n \xi) e^{i \omega t}; \\ u_2 &= \sum_{k=1}^2 V^{(k)} e^{\hat{q}_k \Lambda_1^n \zeta} \cos(\Lambda_1^n \xi) e^{i \omega t}; \\ p^* &= \sum_{k=1}^2 p_1 \hat{q}_k V^{(k)} \mathcal{H}(\hat{q}_k, \hat{\Omega}) e^{\hat{q}_k \Lambda_1^n \zeta} \cos(\Lambda_1^n \xi) e^{i \omega t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$x_1 = h \xi; \quad x_2 = h \zeta; \quad \mathcal{H}(q, \Omega) = \Omega^2 + (B_{1122} + B_{1221} - B_{1111}) + q^2 B_{2121}; \quad (7)$$

$V^{(k)}$  — произвольные постоянные;  $\hat{q}_k$  — корни характеристического уравнения

$$\gamma \hat{q}^4 + \{ \hat{\Omega}^2 - 2\beta \} \hat{q}^2 + \{ \alpha - \hat{\Omega}^2 \} = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющие условию затухания  $\Re(\hat{q}_k) < 0$ ;

$$\begin{aligned} (\hat{q}, \hat{\Omega}) &= \frac{(q, \Omega) h}{\Lambda_1^n}; \quad \alpha = B_{1212}; \\ \beta &= \frac{B_{1111} + B_{2222}}{2} - B_{1122} - B_{1221}; \quad \gamma = B_{2121}. \end{aligned} \quad (9)$$

Известно, что скорость поверхностной волны  $c_R$  действительна в интервале устойчивости нормального напряжения  $\sigma_2$

$$\gamma - \sqrt{\gamma \alpha} - \sqrt{2(\beta \sqrt{\gamma \alpha} + \gamma \alpha)} < \sigma_2 < \gamma - \sqrt{\gamma \alpha} + \sqrt{2(\beta \sqrt{\gamma \alpha} + \gamma \alpha)} \quad (10)$$

и определяется из кубического уравнения [13]. Как показано в работе [12], краевой спектр полуполосы связан со скоростью поверхностной волны и имеет вид

$$\Omega^{(n)} = \frac{\Lambda_1^n c_R}{h}. \quad (11)$$

Запишем граничные условия на краю ( $x_2 = 0$ )

$$\tau_1^{(2)} = f(x_1) \equiv 0; \quad \tau_2^{(2)} = g(\xi) = \sigma_0 \left( \frac{1}{3} - \xi^2 \right) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

В работе [13] получены решения для компонент перемещений и дополнительного давления, соответствующих  $n$ -й гармонике:

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= \sum_{m=1}^2 -\hat{q}_m V_n^{(m)} e^{\hat{q}_m \Lambda_1^n \zeta} \sin(\Lambda_1^n \xi) e^{i\omega t}; \\ u_2^{(n)} &= \sum_{m=1}^2 V_n^{(m)} e^{\hat{q}_m \Lambda_1^n \zeta} \cos(\Lambda_1^n \xi) e^{i\omega t}; \\ p^{*(n)} &= \sum_{m=1}^2 p_1 \hat{q}_m V_n^{(m)} \mathcal{H}(\hat{q}_m, \hat{\Omega}) e^{\hat{q}_m \Lambda_1^n \zeta} \cos(\Lambda_1^n \xi) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$V_n^{(1)} = \frac{4\sigma_0 h \mathcal{M}(\hat{q}_2) (-1)^n}{(\Lambda_1^n)^3 \mathcal{S}(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{\Omega})}; \quad V_n^{(2)} = \frac{4\sigma_0 h \mathcal{M}(\hat{q}_1) (-1)^{n+1}}{(\Lambda_1^n)^3 \mathcal{S}(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{\Omega})}; \quad (14)$$

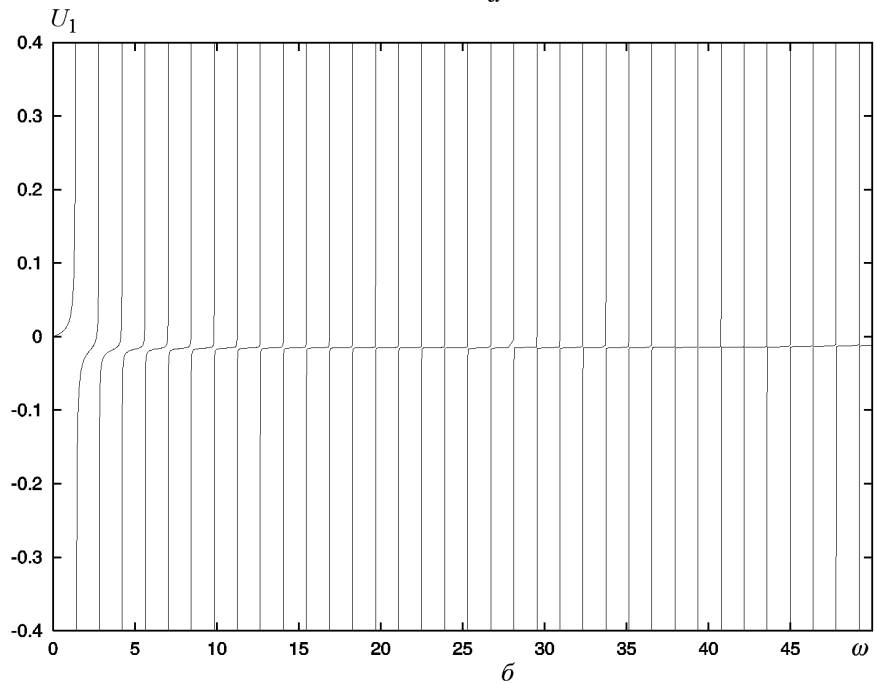
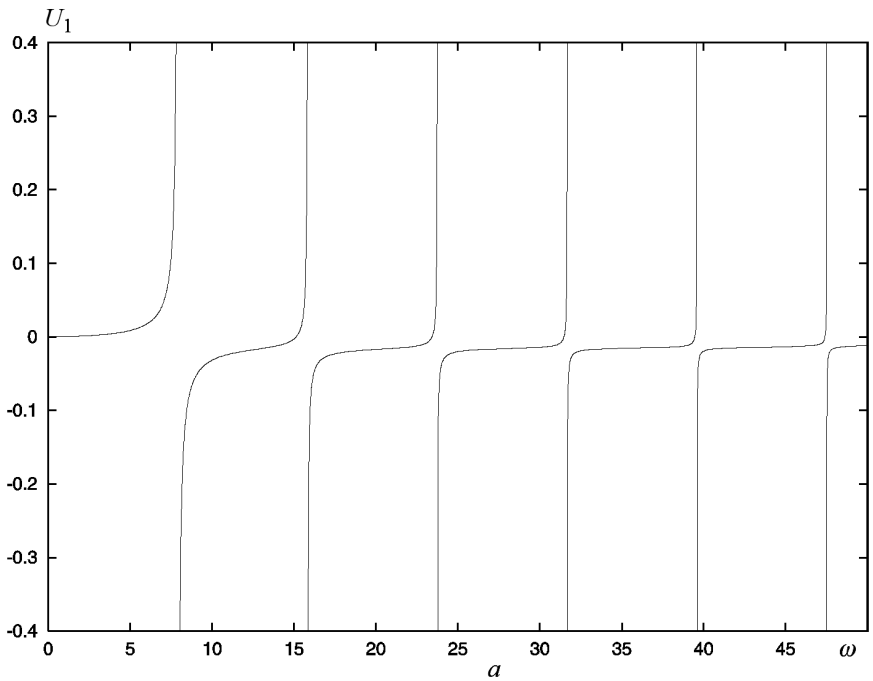
$$\begin{aligned} \mathcal{M}(q) &= \gamma q^2 + (\gamma - \sigma_2); \quad \mathcal{N}(q, \Omega) = -q (\Omega^2 + (\sigma_2 - 2\beta - \gamma) + \gamma q^2); \\ \mathcal{S}(q_1, q_2, \Omega) &= \mathcal{M}(q_1) \mathcal{N}(q_2, \Omega) - \mathcal{M}(q_2) \mathcal{N}(q_1, \Omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Как отмечено в работе [13], существуют два предельных случая. Первый имеет место при стремлении скорости поверхностной волны к нулю, что может быть достигнуто с помощью выбора соответствующих параметров предварительной деформации. При этом плотность краевого спектра неограниченно растет. Второй предельный случай соответствует переходу поверхностной волны в сдвиговую, вследствие чего не выполняется условие затухания. При этом нарушается локализация колебаний и амплитуда всплеска стремится к нулю.

Рассмотрим эти предельные случаи на примере энергетического потенциала Варги (Varga)

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \quad (16)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — главные значения предварительной деформации [11]. На рис. 1, 2 приведены зависимости безразмерного перемещения  $U_1 = \frac{u_1}{h}$  от частоты  $\omega$ ,  $c^{-1}$ , для потенциала Варги. Главные значения предварительной деформации приняты равными  $\lambda_1 = 2,8$  и  $\lambda_2 = 2,795$ , тогда из условия несжимаемости  $\lambda_3 = 0,128$ . На рис. 1 приведена зависимость безразмерного перемещения  $U_1$  от частоты  $\omega$  для первого предельного случая, когда нормальное напряжение Коши  $\sigma_2$  стремится к критическому значению, при котором



**Рис. 1. Перемещение  $U_1$  в случае устремления скорости поверхностной волны к нулю:**

$a - c_R = 4,305$ ;  $b - c_R = 1,405$

скорость поверхностной волны стремится к нулю. В этом случае в соответствии с выражением (11) резонансные частоты сгущаются и в пределе плотность краевого спектра неограниченно растет.

На рис. 2 приведен второй предельный случай, когда  $\sigma_2 = \alpha + \sqrt{\alpha\gamma} + \delta$  стремится к критическому значению, соответствующему переходу поверхностной волны в сдвиговую. Видно, как убывает амплитуда колебаний, что соответствует потере локализации в краевой зоне.

Таким образом, в случае полубесконечной полосы параметры предварительной деформации могут оказывать весьма существенное влияние на явление краевого резонанса. В первом предельном случае неограниченно увеличивается плотность краевого спектра, вследствие чего краевой резонанс может возникать почти на любой частоте воздействия. Во втором предельном случае явление краевого резонанса не может иметь места, поскольку теряется эффект локализации колебаний вблизи края.

**Вынужденные колебания бруса.** Рассмотрим вынужденные колебания полубесконечного предварительно деформированного бруса прямоугольного сечения. Зададим смешанные граничные условия на лицевых поверхностях в виде

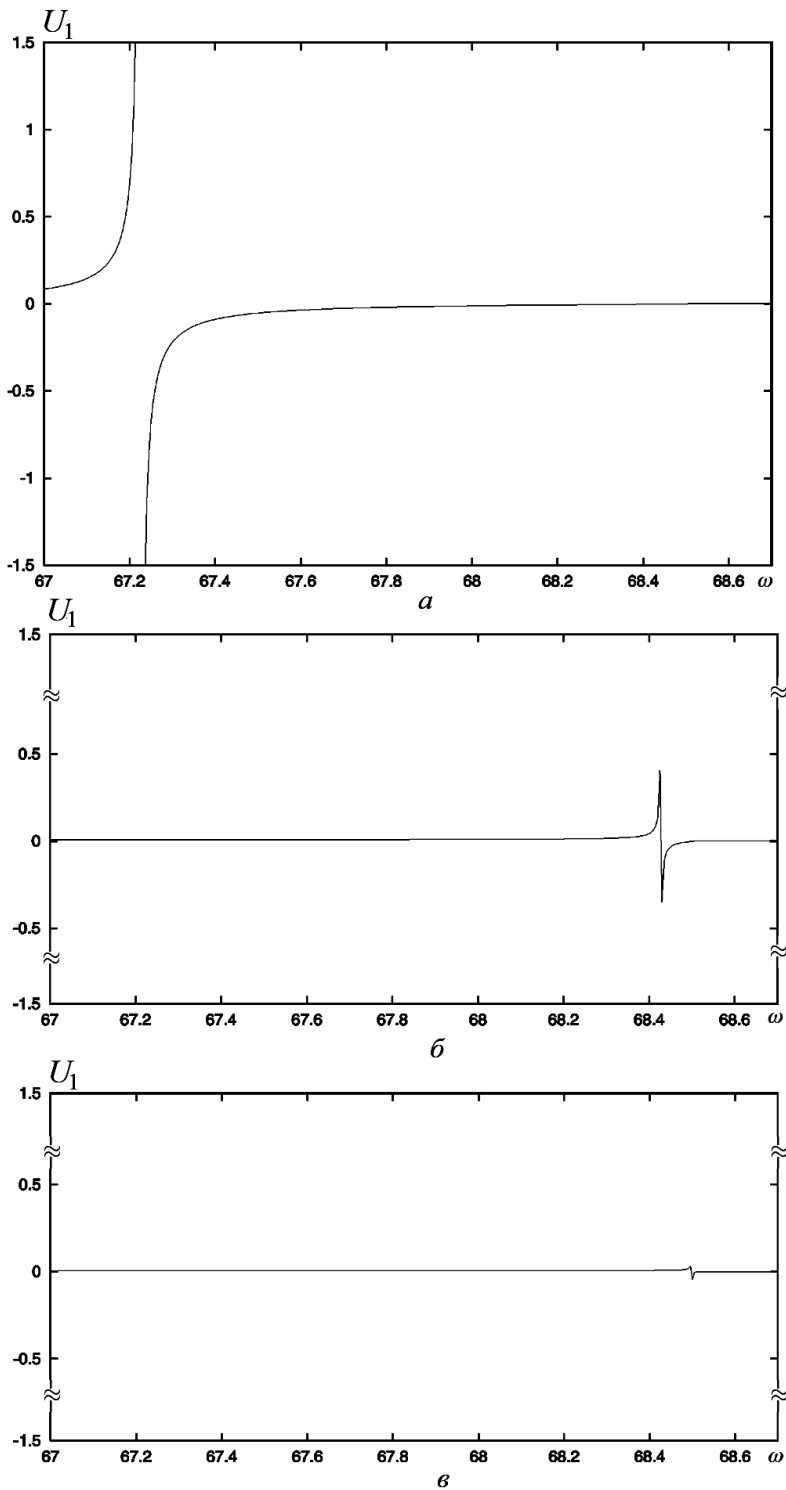
$$\begin{aligned} u_1 = 0, \quad \tau_2^{(1)} = 0, \quad \tau_3^{(1)} = 0, \quad \text{при } x_1 = \pm h_1; \\ u_3 = 0, \quad \tau_2^{(3)} = 0, \quad \tau_1^{(3)} = 0, \quad \text{при } x_3 = \pm h_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Этот тип граничных условий допускает следующую физическую интерпретацию: брус, окруженный жестким покрытием, моделирующий вставку. При этом возможны лишь продольные перемещения (вдоль оси  $Ox_2$ ). Отметим, что это не единственный способ задания граничных условий, позволяющих найти точное решение для перемещений и дополнительного давления. По аналогии с [13] могут быть рассмотрены случаи нерастяжимой мембраны, а также различные сочетания данных типов граничных условий на лицевых поверхностях бруса. Процедура решения в этом случае полностью аналогична, поэтому в данной работе мы ограничимся рассмотрением случая жесткого покрытия (17). По аналогии с решением для полуполосы решения могут быть найдены в форме четырех семейств, описываемых соответствующими тригонометрическими функциями переменных  $x_1, x_3$ . Рассмотрим первое семейство решений

$$\begin{aligned} u_1 &= U \sin(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) \exp\{-\beta x_2 + i\omega t\}; \\ u_2 &= V \cos(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) \exp\{-\beta x_2 + i\omega t\}; \\ u_3 &= W \cos(n_1 x_1) \sin(k_1 x_3) \exp\{-\beta x_2 + i\omega t\}; \\ p^* &= n_1 P \cos(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) \exp\{-\beta x_2 + i\omega t\}, \end{aligned}$$

удовлетворяющее смешанным граничным условиям (17) при

$$n_1 = \frac{\Lambda_1^n}{h_1}, \quad k_1 = \frac{\Lambda_1^k}{h_3}. \quad (18)$$



**Рис. 2.** Перемещение  $U_1$  в случае устремления нормального напряжения к критическому значению, соответствующему переходу поверхностной волны в сдвиговую:

$$a - \delta = 10^{-1}; \quad b - \delta = 10^{-2}; \quad c - \delta = 10^{-3}$$

Подставляя первое семейство решений в уравнения движения и условие несжимаемости (1), как и в плоском случае (см. (8)), получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \beta^6 \gamma_{21} \gamma_{23} + \beta^4 \{ \omega^2 [\gamma_{21} + \gamma_{23}] - a_1(n_1, k_1) \} + \\ & \quad + \beta^2 \{ \omega^4 - \omega^2 a_2(n_1, k_1) + a_3(n_1, k_1) \} - \\ & \quad - \{ \omega^2 - a_4(n_1, k_1) \} \{ \omega^2 [n_1^2 + k_1^2] - a_5(n_1, k_1) \} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(n, k) &= [\gamma_{21} \gamma_{13} + 2\beta_{12} \gamma_{23}] n^2 + [\gamma_{23} \gamma_{31} + 2\beta_{23} \gamma_{21}] k^2; \\ a_2(n, k) &= [\gamma_{23} + \gamma_{13} + 2\beta_{12}] n^2 + [\gamma_{21} + \gamma_{31} + 2\beta_{23}] k^2; \\ a_3(n, k) &= [\gamma_{12} \gamma_{23} + 2\beta_{12} \gamma_{13}] n^4 + [\gamma_{21} \gamma_{32} + 2\beta_{23} \gamma_{31}] k^4 + \\ & \quad + [\gamma_{12} \gamma_{21} + \gamma_{13} \gamma_{31} + \gamma_{23} \gamma_{32} + 4\beta_{12} \beta_{23} - \mu_{13}^2] n^2 k^2; \\ a_4(n, k) &= \gamma_{12} n^2 + \gamma_{32} k^2; \quad a_5(n, k) = \gamma_{13} n^4 + \gamma_{31} k^4 + 2\beta_{13} n^2 k^2; \\ \gamma_{ij} &= B_{ijij}, \quad \beta_{ij} = \frac{B_{iiii} + B_{jjjj}}{2} - B_{iijj} - B_{ijji}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu_{ik} = \beta_{ik} - \beta_{ij} - \beta_{jk}.$$

Решения относительно перемещений и дополнительного давления представляются в виде линейных комбинаций экспоненциально затухающих функций

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^3 \frac{\beta^{(m)} n_1 \mathcal{U}(\beta^{(m)}, \omega) V^{(m)}}{\mathcal{V}(\beta^{(m)}, \omega)} \sin(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}; \\ u_2 &= \sum_{m=1}^3 V^{(m)} \cos(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}; \\ u_3 &= \sum_{m=1}^3 \frac{\beta^{(m)} k_1 \mathcal{W}(\beta^{(m)}, \omega) V^{(m)}}{\mathcal{V}(\beta^{(m)}, \omega)} \cos(n_1 x_1) \sin(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}; \\ p^* &= \sum_{m=1}^3 \frac{\beta^{(m)} \mathcal{P}(\beta^{(m)}, \omega) V^{(m)}}{\mathcal{V}(\beta^{(m)}, \omega)} \cos(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $V^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , — произвольные постоянные;  $\beta^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , — корни характеристического уравнения (19), удовлетворяющие условию затухания  $\Re(\beta^{(m)}) < 0$ , а величины  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{W}$  и  $\mathcal{P}$  определяются из



следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}(\beta, \omega) &= \omega^2 + \gamma_{23}\beta^2 - \gamma_{13}n_1^2 + \mu_{12}k_1^2; \\
 \mathcal{W}(\beta, \omega) &= \omega^2 + \gamma_{21}\beta^2 - \gamma_{31}k_1^2 + \mu_{23}n_1^2; \\
 \mathcal{V}(\beta, \omega) &= \mathcal{U}(\beta, \omega)n_1^2 + \mathcal{W}(\beta, \omega)k_1^2; \\
 \mathcal{P}(\beta, \omega) &= \mathcal{U}(\beta, \omega)\mathcal{W}(\beta, \omega) + n_1^2\mathcal{U}(\beta, \omega) \times \\
 &\quad \times [B_{2233} + B_{2332} - B_{1133} - B_{1331}] + \\
 &\quad + k_1^2\mathcal{W}(\beta, \omega) [B_{1122} + B_{1221} - B_{1133} - B_{1331}].
 \end{aligned} \tag{22}$$

По аналогии с плоским случаем в работе [15] была установлена связь между краевым спектром бруса и скоростью поверхностной волны в соответствующей задаче для полупространства:

$$\omega(n_1, k_1) = c_R(n_1, k_1)\sqrt{n_1^2 + k_1^2}. \tag{23}$$

В случае предварительно деформированного изотропного несжимаемого упругого полупространства скорость поверхностной волны находится из соотношения, включающего зависимость от нормального напряжения  $\sigma_2$  и угла распространения волны, в нашем случае сформированного волновыми числами  $n_1$  и  $k_1$  [15].

Отметим, что в случае изотропного упругого материала скорость поверхностной волны (волны Релея) постоянна  $c_R(n_1, k_1) = c_R$ , следовательно, выражение для краевого спектра бруса (23) с учетом (4), (18) примет вид

$$\omega_{nk} = \pi c_R \sqrt{\frac{n^2}{h_1^2} + \frac{k^2}{h_3^2}}. \tag{24}$$

Рассмотрим теперь граничные условия на краю ( $x_2 = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \tau_1^{(2)} &= \tau_3^{(2)} = 0; \\
 \tau_2^{(2)} &= \frac{\sigma_0}{h_1 h_2} \left( \frac{1}{3} - \frac{x_1^2}{h_1^2} \right) \left( \frac{1}{3} - \frac{x_3^2}{h_2^2} \right) e^{i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Записывая граничные условия (25) с учетом выражений (21), (2) и разлагая результат в двойной ряд Фурье, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных  $V_{nk}^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Полученные в результате собственные функции перемещений и дополнительного давления имеют вид

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{(m)} n_1 \mathcal{U}(\beta^{(m)}, \omega) V_{nk}^{(m)}}{\mathcal{V}(\beta^{(m)}, \omega)} \sin(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}; \\
u_2 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_{nk}^{(m)} \cos(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}; \\
u_3 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{(m)} k_1 \mathcal{W}(\beta^{(m)}, \omega) V_{nk}^{(m)}}{\mathcal{V}(\beta^{(m)}, \omega)} \cos(n_1 x_1) \sin(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}; \\
p^* &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{(m)} \mathcal{P}(\beta^{(m)}, \omega) V_{nk}^{(m)}}{\mathcal{V}(\beta^{(m)}, \omega)} \cos(n_1 x_1) \cos(k_1 x_3) e^{\beta^{(m)} x_2 + i\omega t}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Процесс получения собственных функций для оставшихся семейств решений и в случае других типов смешанных граничных условий на лицевых поверхностях, допускающих разделение переменных, полностью аналогичен рассмотренному ранее.

Отметим, что интервал устойчивости нормального напряжения  $\sigma_2$ , в котором скорость поверхностной волны будет действительной при любом направлении распространения в плоскости  $x_1 x_3$ , будет отличаться от интервала устойчивости (10) в плоской задаче, соответствующего углу распространения  $\theta = 0$  (вдоль оси  $Ox_1$ ). Как показано в работе [15] при исследовании задачи о распространении поверхностных волн в трехмерном полупространстве, скорость поверхностной волны будет действительной при условии, что  $\sigma_2$  находится в интервале между двумя критическими значениями, зависящими от угла распространения. Обозначим эти критические значения  $\sigma_0^-(\theta)$  и  $\sigma_0^+(\theta)$ , тогда интервал устойчивости в трехмерной задаче имеет вид

$$\sup_{0 \leq \theta \leq 90^\circ} \sigma_0^-(\theta) < \sigma_2 < \inf_{0 \leq \theta \leq 90^\circ} \sigma_0^+(\theta). \tag{27}$$

Отметим, что нижняя и верхняя грани обычно достигаются при  $\theta = 0^\circ$  или  $\theta = 90^\circ$ .

Таким образом, как и в плоской задаче, на границах интервала устойчивости можно ожидать значительного роста плотности краевого спектра. Однако в случае, соответствующем переходу поверхностной волны в объемную, сдвиговую, картина существенно отличается от наблюдаемой в плоском случае. Поскольку для каждого угла распространения переход волны Релея в объемную соответствует различным

параметрам предварительной деформации, то невозможно указать параметры, для которых при любой частоте воздействия колебания перестают быть локализованными вблизи края для всех мод. Таким образом, вторая характерная черта краевых колебаний в плоском случае для полубесконечной полосы не может иметь места в трехмерной задаче для полубесконечного бруса.

*Исследования Д.А. Приказчикова выполнены при поддержке гранта Президента РФ МК-4234.2010.8.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shaw E. A. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – No. 28. – P/38–50.
2. Gazi S. D. Mindlin R. D. Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate // J. Appl. Mech. – 1960. – No. 27. – P. 541–547.
3. Roitberg I., Vassiliev D. and Weidl T. Edge resonances in an elastic semistrip // Quart J. Mech. Appl. Math. – 1998. – No. 51. – P. 1–13.
4. Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф. Явление высокочастотного резонанса в полугораниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. – 1990. – № 3. – С. 74–83.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. механика. – 1980. – № 16 (2). – С. 58–63.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981.
7. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. – М.: Физматлит, 2010.
8. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. and Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – No. 107. – P. 1383–1393.
9. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1986.
10. Ogden R. W. Non-linear elastic deformations. – Dover: Ellis Horwood, 1997.
11. Biot M. A. Mechanics of incremental deformations: theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain. – New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1965.
12. Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A. and Rogerson G. A. Edge vibration of a pre-stressed semi-infinite strip with traction-free edge and mixed face boundary conditions // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). – 2004. – No. 55. – P. 701–719.
13. Dowdall M. A. and Ogden R. W. On surface waves and deformations in a pre-stressed incompressible elastic solid // IMA J. Appl. Math. – 1990. – No. 44. – P. 261–284.
14. Rogerson G. A. and Sandiford K. J. Harmonic wave propagation along a non-principal direction in a pre-stressed elastic plate // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – No. 37. – P. 1663–1691.
15. Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A. and Rogerson G. A. On three-dimensional edge waves in pre-stressed incompressible elastic structures // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – No. 118 (5). – P. 2975–2983.

Статья поступила в редакцию 17.09.2010

Данила Александрович Приказчиков родился в 1978 г., окончил в 2000 г. Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор 20 научных работ в области локализованных колебаний и волн в упругих телах.

D.A. Prikazchikov (b. 1978) graduated from the Saratov State University n.a. N.G. Chernyshevskii in 2000. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of localized vibrations and waves in elastic solids.

Виктор Яковлевич Томашпольский родился в 1972 г., окончил в 1994 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор пяти научных работ в области нелинейных волн в упругих телах.

V.Ya. Tomashpolskii (b. 1972) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1994. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 5 publications in the field of nonlinear waves in elastic solids.