

О. Ю. Ч и г и р ё в а

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗОГРЕВА ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА ДВИЖУЩИМСЯ КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛОТЫ

*Предложена математическая модель процесса разогрева двухслойного цилиндра движущимся кольцевым источником теплоты. Построен алгоритм расчета нестационарного температурного поля, учитывающий термическое сопротивление контактной поверхности, а также зависимость теплофизических свойств материалов от температуры. Приведен пример численного расчета.*

**E-mail:** k\_fn12@bmstu.ru

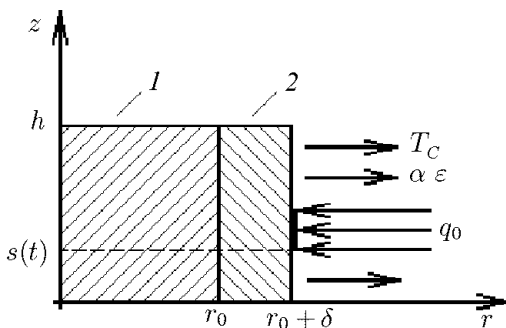
**Ключевые слова:** двухслойный цилиндр, движущийся источник теплоты, процесс разогрева, температурное поле, термическое сопротивление.

Важное практическое значение в современном машиностроении имеет применение лазерных технологий. Использование лазеров с высокой плотностью мощности излучения при термообработке поверхностей деталей позволяет существенно сократить время нагрева, обеспечивая скорость обработки, сравнимую со скоростью протекания физических процессов в материале. Кроме того, лазерное излучение обладает таким важным свойством, как безынерционность.

Одним из широко применяемых методов поверхностной лазерной обработки металлов является лазерная закалка (термоупрочнение) [1]. При таком виде термообработки локальный участок обрабатываемой поверхности нагревают с помощью излучения до высоких температур. После прекращения действия излучения происходит охлаждение этого участка поверхности с большой скоростью в результате теплопроводности во внутренние слои металла, а также теплоотдачи с поверхности. Процесс лазерной закалки проводят таким образом, чтобы нагреть поверхность металла до заданной предельной температуры с целью получения максимальной глубины зоны лазерного воздействия, не допустив при этом оплавления. Поэтому для анализа размеров зоны термического влияния и свойств упрочненной поверхности [2] необходима информация о тепловом состоянии металла в процессе разогрева.

**Постановка задачи и математическая модель процесса.** Рассмотрим процесс разогрева металлического цилиндра радиусом  $r_0$  и высотой  $h$ , на боковую поверхность которого нанесен слой поглощающего покрытия [2] толщиной  $\delta$  (рис. 1). Разогрев цилиндра проводится кольцевым источником теплоты с плотностью теплового потока  $q_0$ , совершающим импульсное движение по боковой поверхности цилиндра от нижнего основания к верхнему по закону

$$s(t) = (i - 1)\beta l, \quad (i - 1)\Delta t < t \leq i\Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, I,$$



**Рис. 1. Осевое сечение двухслойного цилиндра:**  
 1 – металлический цилиндр; 2 – поглощающее покрытие

где  $t$  – время;  $\Delta t$  – продолжительность одного импульса;  $I$  – число импульсных шагов;  $l$  – ширина теплового контакта;  $\beta$  – безразмерный параметр. При  $0 < \beta < 1$  положения теплового контакта на  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м импульсных шагах частично перекрываются. В момент времени  $t_* = \Delta t \cdot I$ , когда тепловой контакт достигает верхнего основания цилиндра, процесс нагревания прекращается ( $q_0 \equiv 0$  при  $t > t_*$ ) и начинается стадия остывания.

Вне зоны теплового контакта происходит отвод теплоты во внешнюю среду по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ , а также за счет лучистого теплообмена; торцевые поверхности цилиндра теплоизолированы. В начальный момент времени температура постоянна и равна температуре внешней среды  $T_C$ .

В данной постановке задачи предполагается, что контактная поверхность между металлическим цилиндром и поглощающим покрытием обладает термическим сопротивлением  $R$  [3], а теплофизические свойства материалов зависят от температуры.

Цель исследований – определение глубины зоны локального прогрева металлического цилиндра до заданной предельной температуры  $T_{\Pi}$  в зависимости от значений параметров  $q_0$  и  $\beta$ , определяющих интенсивность воздействия источника теплоты.

В соответствии с изложенной физической постановкой задачи математическая модель процесса имеет вид

$$\rho_1 c_1 (T_1) \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_1 (T_1) r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_1 (T_1) \frac{\partial T_1}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$t > 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < h;$$

$$\rho_2 c_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_2 (T_2) r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$t > 0, \quad r_0 < r < r_0 + \delta, \quad 0 < z < h;$$

$$T_1(r, z, 0) = T_C, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq h; \quad (3)$$

$$T_2(r, z, 0) = T_C, \quad r_0 \leq r \leq r_0 + \delta, \quad 0 \leq z \leq h; \quad (4)$$

$$\lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta} = \begin{cases} q_1(z, t), & 0 < t \leq t_*; \\ q_2(z, t), & t > t_*; \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0, z=h} = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=0, z=h} = 0, \quad t > 0, \quad r_0 \leq r \leq r_0 + \delta; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \frac{1}{R} (T_2(r_0, z, t) - T_1(r_0, z, t)) = \\ &= \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad t > 0, \quad 0 \leq z \leq h. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь приняты следующие обозначения: индекс 1 соответствует металлическому цилиндру, 2 — поглощающему покрытию;  $r$  — пространственная координата вдоль радиуса цилиндра;  $z$  — пространственная координата вдоль оси цилиндра;  $T_j(r, z, t)$  — искомые температурные поля;  $\rho$ ,  $c$  и  $\lambda$  — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности соответственно.

В граничном условии (5)

$$q_1(z, t) = \begin{cases} q_0, & z \in [s(t), s(t) + l]; \\ \alpha(T_C - T_W(z, t)) + \\ + \sigma \varepsilon (T_C^4 - T_W^4(z, t)), & z \in [0, h] \setminus [s(t), s(t) + l]; \end{cases}$$

$$q_2(z, t) = \alpha(T_C - T_W(z, t)) + \sigma \varepsilon (T_C^4 - T_W^4(z, t)), \quad z \in [0, h],$$

где  $T_W(z, t) = T_2(r_0 + \delta, z, t)$ ;  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана;  $\varepsilon$  — степень черноты излучающей поверхности.

**Построение алгоритма приближенного решения.** Для нахождения приближенного аналитического решения задачи (1)–(8) воспользуемся модификацией [4] метода, предложенного в работах [5, 6].

Введем функции

$$C_j(T_j, r) = \rho_j r c_j(T_j), \quad \Lambda_j(T_j, r) = r \lambda_j(T_j), \quad j = 1, 2,$$

и запишем уравнения (1), (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1(T_1, r) \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \operatorname{div}(\Lambda_1(T_1, r) \operatorname{grad} T_1), \\ t > 0, \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < z < h; \end{aligned} \quad (9)$$

$$C_2(T_2, r) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \operatorname{div}(\Lambda_2(T_2, r) \operatorname{grad} T_2), \quad (10)$$

$$t > 0, \quad r_0 < r < r_0 + \delta, \quad 0 < z < h.$$

Затем проведем дискретизацию временной переменной  $t$  системой точек  $t_k = k\tau$ ,  $k = 1, 2, \dots$  с достаточно малым шагом  $\tau > 0$  и заменим в уравнениях (9), (10) производные по времени конечно-разностными отношениями

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} \approx \frac{T_j^{(k)}(r, z) - T_j^{(k-1)}(r, z)}{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2,$$

где  $T_j^{(k)}(r, z)$  — приближенные значения функций  $T_j(r, z, t)$  при  $t = t_k$ .

Полагая на каждом временном слое  $t = t_k$  все нелинейности известными, вычисленными на предыдущем временном слое ( $t = t_{k-1}$ ), обозначим

$$C_j^{(k)}(r, z) = C_j\left(T_j^{(k-1)}(r, z), r\right),$$

$$\Lambda_j^{(k)}(r, z) = \Lambda_j\left(T_j^{(k-1)}(r, z), r\right), \quad j = 1, 2;$$

$$s^{(k)} = s(t_k);$$

$$Q_W^{(k)}(z) = \begin{cases} q_1^{(k)}(z), & 0 < t_k \leq t_*; \\ q_2^{(k)}(z), & t > t_*; \end{cases}$$

$$q_1^{(k)}(z) = \begin{cases} (r_0 + \delta) q_0, & z \in [s^{(k)}, s^{(k)} + l]; \\ (r_0 + \delta) (\alpha + 4\sigma\varepsilon T_C^3) \left(T_C - T_W^{(k-1)}(z)\right), & \\ z \in [0, h] \setminus [s^{(k)}, s^{(k)} + l]; \end{cases}$$

$$q_2^{(k)}(z) = (r_0 + \delta) (\alpha + 4\sigma\varepsilon T_C^3) \left(T_C - T_W^{(k-1)}(z)\right), \quad z \in [0, h];$$

$$Q_0^{(k)}(z) = \frac{r_0}{R} \left(T_2^{(k-1)}(r_0, z) - T_1^{(k-1)}(r_0, z)\right).$$

Далее запишем дифференциально-разностный аналог начально-краевой задачи (1)–(8) в виде итерационной схемы ( $k = 1, 2, \dots$ ) решения двух краевых задач для линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами:

$$-\operatorname{div}\left(\Lambda_1^{(k)}(r, z) \operatorname{grad} T_1^{(k)}(r, z)\right) + \frac{1}{\tau} C_1^{(k)}(r, z) T_1^{(k)}(r, z) =$$

$$= \frac{1}{\tau} C_1^{(k)}(r, z) T_1^{(k-1)}(r, z), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < z < h; \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \Lambda_1^{(k)}(r, z) \left. \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = Q_0^{(k)}(z), \quad 0 \leq z \leq h; \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial z} \right|_{\substack{z=0, \\ z=h}} = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} - \operatorname{div} \left( \Lambda_2^{(k)}(r, z) \operatorname{grad} T_2^{(k)}(r, z) \right) + \frac{1}{\tau} C_2^{(k)}(r, z) T_2^{(k)}(r, z) = \\ = \frac{1}{\tau} C_2^{(k)}(r, z) T_2^{(k-1)}(r, z), \quad r_0 < r < r_0 + \delta, \quad 0 < z < h; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Lambda_2^{(k)}(r, z) \left. \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = Q_0^{(k)}(z), \quad (15)$$

$$\Lambda_2^{(k)}(r, z) \left. \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial r} \right|_{r=r_0+\delta} = Q_W^{(k)}(z), \quad 0 \leq z \leq h;$$

$$\left. \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial z} \right|_{\substack{z=0, \\ z=h}} = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_0 + \delta. \quad (16)$$

Следует отметить, что на каждом временном слое  $t = t_k$  задачи (11)–(13) и (14)–(16) решаются независимо.

На первом шаге итерации, согласно начальным условиям (3) и (4),  $T_j^{(0)}(r, z) = T_C$ . На  $k$ -м шаге итерации функции  $T_j^{(k)}(r, z)$  будем искать в форме разложения в двойные тригонометрические ряды Фурье

$$T_j^{(k)}(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)} X_{j,mn}(r, z), \quad j = 1, 2,$$

где  $\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n$ ,  $\gamma_m = \begin{cases} 0,5, & m = 0, \\ 1, & m > 0, \end{cases}$  по полным и ортогональным [4] в областях  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ , системам функций  $\{X_{j,mn}(r, z)\}_{m,n=0}^{\infty}$ :

$$X_{1,mn}(r, z) = \cos(\mu_{1,m} r) \cos(\nu_n z), \quad \Omega_1 = (0, r_0) \times (0, h);$$

$$X_{2,mn}(r, z) = \cos(\mu_{2,m}(r - r_0)) \cos(\nu_n z), \quad \Omega_2 = (r_0, r_0 + \delta) \times (0, h).$$

$$\text{Здесь } \mu_{1,m} = \frac{m\pi}{r_0}, \mu_{2,m} = \frac{m\pi}{\delta}, \nu_n = \frac{n\pi}{h}.$$

Для нахождения коэффициентов  $a_{j,mn}^{(k)}$  этих разложений умножим уравнения (11) и (14) на функции  $X_{1,ps}(r, z)$  и  $X_{2,ps}(r, z)$  соответственно, а затем проинтегрируем полученные соотношения по областям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Используя граничные условия (12), (13) и (15), (16), приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов  $a_{j,mn}^{(k)}$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{j,psmn}^{(k)} \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)} = b_{j,ps}^{(k)}, \quad (17)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2,$$

где

$$A_{j,psmn}^{(k)} = \tau (\mu_{j,m}\mu_{j,p} + \nu_n\nu_s) \left( \xi_{j, (|m-p|, |n-s|)}^{(k)} - \xi_{j, (m+p, n+s)}^{(k)} \right) + \\ + \tau (\mu_{j,m}\mu_{j,p} - \nu_n\nu_s) \left( \xi_{j, (|m-p|, n+s)}^{(k)} - \xi_{j, (m+p, |n-s|)}^{(k)} \right) + \\ + \eta_{j, (|m-p|, |n-s|)}^{(k)} + \eta_{j, (m+p, |n-s|)}^{(k)} + \eta_{j, (|m-p|, n+s)}^{(k)} + \eta_{j, (m+p, n+s)}^{(k)};$$

$$b_{j,ps}^{(k)} = f_j^{(k)} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k-1)} \left( \eta_{j, (|m-p|, |n-s|)}^{(k)} + \right. \\ \left. + \eta_{j, (m+p, |n-s|)}^{(k)} + \eta_{j, (|m-p|, n+s)}^{(k)} + \eta_{j, (m+p, n+s)}^{(k)} \right);$$

$$f_1^{(k)} = \frac{8\tau}{r_0} (-1)^p \varphi_s^{(k)}; \quad f_2^{(k)} = \frac{8\tau}{\delta} ((-1)^p \psi_s^{(k)} - \varphi_s^{(k)});$$

$\xi_{j, (p,s)}^{(k)}$  и  $\eta_{j, (p,s)}^{(k)}$  — коэффициенты Фурье разложений функций  $C_j^{(k)}(r, z)$  и  $\Lambda_j^{(k)}(r, z)$  соответственно в двойные тригонометрические ряды по системам функций  $\{X_{j,ps}(r, z)\}_{p,s=0}^{\infty}$ ;  $\varphi_s^{(k)}$  и  $\psi_s^{(k)}$  — коэффициенты Фурье разложений функций  $Q_0^{(k)}(z)$  и  $Q_W^{(k)}(z)$  соответственно в тригонометрические ряды по системе функций  $\{\cos(\nu_s z)\}_{s=0}^{\infty}$ .

Системы вида (17) можно преобразовать [4] к стандартному виду

$$\sum_{w=1}^{\infty} D_{j,vw}^{(k)} \tilde{x}_{j,w}^{(k)} = \tilde{b}_{j,v}^{(k)}, \quad v = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \quad (18)$$

где  $\tilde{x}_{j,w}^{(k)}$  и  $\tilde{b}_{j,v}^{(k)}$  — одномерные массивы, составленные из элементов массивов  $x_{j,mn}^{(k)} \equiv \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)}$  и  $b_{j,ps}^{(k)}$  соответственно, а  $D_{j,vw}^{(k)}$  — двумерный массив, составленный из элементов многомерного массива  $A_{j,psmn}^{(k)}$ .

Решения бесконечных систем вида (18) могут быть найдены методом редукции [7, 8].

Следует отметить, что поскольку дифференциальные операторы в правых частях уравнений (9), (10) являются симметрическими положительно определенными, имеет место свойство  $A_{j,psmn}^{(k)} = A_{j,mnps}^{(k)}$ , то матрицы  $D_j^{(k)}$ ,  $j = 1, 2$ , — симметрические положительно определенные. Это позволяет для решения конечных систем, полученных из (18) усечением, применить метод Холецкого [9].

В результате построен алгоритм нахождения приближенного аналитического решения задачи (1)–(8) в форме тригонометрических многочленов

$$T_1(r, z, t_k) \approx \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-m} \gamma_{mn} a_{1,mn}^{(k)} \cos(\mu_{1,m} r) \cos(\nu_n z);$$

$$T_2(r, z, t_k) \approx \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{n=0}^{N_2-m} \gamma_{mn} a_{2,mn}^{(k)} \cos(\mu_{2,m}(r-r_0)) \cos(\nu_n z),$$

коэффициенты  $x_{j,mn}^{(k)} \equiv \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)}$  которых находят из конечных систем

$$\sum_{w=1}^{M_j} D_{j,vw}^{(k)} \tilde{x}_{j,w}^{(k)} = \tilde{b}_{j,v}^{(k)}, \quad v = 1, 2, \dots, M_j, \quad j = 1, 2.$$

Здесь  $M_j = (N_j + 1)(N_j + 2)/2$ , а  $N_j$  определяются на основе оценки Рунге [10].

При проведении численных расчетов выбор шага по временной переменной осуществлялся на основе сравнения в фиксированные моменты времени  $\tilde{t}$  распределений температуры на поверхности  $r = r_0$  при двух значениях шага ( $\tau$  и  $\tau/2$ ):

$$\frac{\|T_\tau(r_0, z, \tilde{t}) - T_{\tau/2}(r_0, z, \tilde{t})\|}{\|T_{\tau/2}(r_0, z, \tilde{t})\|} \leq \varepsilon_0,$$

где  $\varepsilon_0$  — заданное значение погрешности.

**Результаты численных расчетов.** Приведем пример отыскания глубины зоны локального прогрева металлического цилиндра до температуры  $T_{\text{п}}$ , не превышающей температуры плавления металла.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи:  $\rho_1 = 7780 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_2 = 3000 \text{ кг/м}^3$ ,  $T_C = 300 \text{ К}$ ;  $T_{\text{п}} = 1500 \text{ К}$ ;  $\alpha = 50 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ ;  $R = 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$ ;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  $\varepsilon = 0,8$ ;  $r_0 = 24 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $\delta = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $h = 120 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $l = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $\Delta t = 0,5 \text{ с}$ .

В табл. 1 и 2 приведены значения коэффициентов теплопроводности и удельных теплоемкостей материалов цилиндра и поглощающего покрытия в зависимости от температуры [11].

Таблица 1

**Теплофизические свойства материала цилиндра**

Свойства	Температура $T$ , К							
	300	400	600	800	1000	1200	1400	1600
$\lambda_1, \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$	48	47	41	37	32	23	21	20
$c_1, \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$	469	505	521	660	616	577	560	545

Таблица 2

**Теплофизические свойства материала поглощающего покрытия**

Свойства	Температура $T$ , К									
	300	400	600	800	1000	1200	1400	1800	2000	
$\lambda_2, \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$	32,0	28,0	20,0	16,0	7,5	6,4	5,6	5,2	5,0	
$c_2, \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$	860	875	943	1020	1086	1102	1140	1170	1178	

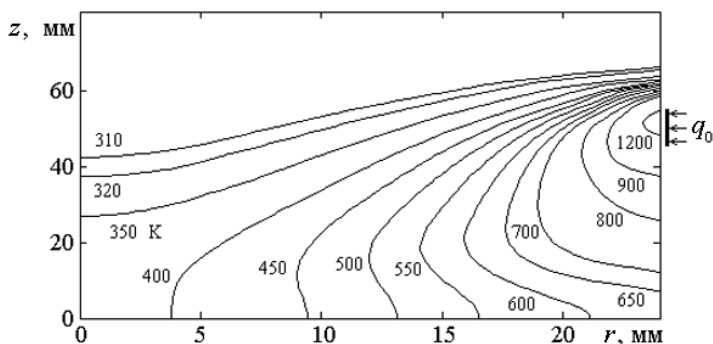
Варьируя параметры задачи  $q_0$  и  $\beta$  в интервалах значений  $q_0 = (1 \dots 5) \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$  и  $0 < \beta < 1$ , выбираем  $q_0 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$  и

$\beta = 0,5$ , при которых на боковой поверхности металлического цилиндра достигается предельная температура  $T_{п}$ , не превышающая температуры плавления металла.

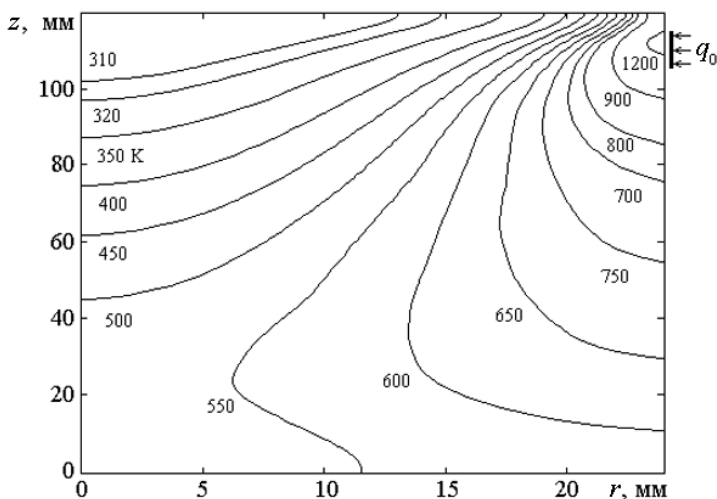
На рис. 2 и 3 представлены изотермы температурного поля ( $T$ , К) в осевом сечении металлического цилиндра в различные моменты времени.

Как показали результаты расчетов, глубина зоны локального прогрева металлического цилиндра до температуры  $1200 \dots 1500$  К при значениях параметров  $q_0 = 1,5 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup> и  $\beta = 0,5$  составляет приблизительно  $0,7$  мм, а ширина зоны прогрева не более  $7$  мм.

Очевидно, что того же порядка значения глубины и ширины зоны локального прогрева могут достигаться и при иных значениях параметров, определяющих интенсивность воздействия теплового источника, например при  $q_0 = 2,2 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup> и  $\beta = 0,75$ .



**Рис. 2.** Изотермы температурного поля в осевом сечении металлического цилиндра в момент времени  $t = 5,5$  с



**Рис. 3.** Изотермы температурного поля в осевом сечении металлического цилиндра в момент времени  $t = 11,5$  с



Предложенный в работе алгоритм расчета нестационарного температурного поля учитывает изменение теплофизических свойств материалов в условиях быстрого нагрева и охлаждения при лазерной обработке, нелинейность граничного условия, а также наличие термического сопротивления контактной поверхности. Кроме того, алгоритм позволяет решать задачу и в том случае, когда толщины слоев материалов отличаются на порядки ( $\delta \ll r_0$ ), что обычно создает затруднения при приближенных вычислениях численными методами, поскольку приходится учитывать условие сопряжения на контактной поверхности. Предложенная методика решения позволяет избежать этих трудностей, так как в каждом слое решение представлено в аналитическом виде в форме ряда Фурье.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьянц А. Г. Основы лазерной обработки материалов. – М.: Машиностроение, 1989.
2. Григорьянц А. Г., Сафонов А. Н. Основы лазерного термоупрочнения сплавов. – М.: Высш. шк., 1988.
3. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Чигирёва О. Ю. Математическое моделирование процесса разогрева цилиндрической поверхности движущимся интенсивным источником тепла // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 31–37.
5. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К. Приближенные методы решения краевых задач. – М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1989.
6. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К., Рогожин В. М. Математическое моделирование процессов теплопереноса при плазменном напылении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 1994. – № 3. – С. 3–16.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М-Л.: Физматгиз, 1962.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.
9. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченкова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высш. шк., 1994.
10. Чигирёва О. Ю. Расчет оптимальной толщины слоя термоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2005. – № 1. – С. 94–101.
11. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов: Справочник. – М.: Физматгиз, 1959.

Статья поступила в редакцию 25.02.2011

Ольга Юрьевна Чигирёва родилась в 1979 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2002 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области математической физики и математического моделирования.

O.Yu. Chigiryova (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of mathematical physics and mathematical simulation.