

УДК 531.01/534.112

**ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА СТЕРЖНЕЙ****А.М. Павлов, А.Н. Темнов**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: pavlov\_arseniy@mail.ru; antt45@mail.ru

*В вопросах динамики жидкостных ракет важную роль играет проблема устойчивости движения ракеты при возникновении продольных упругих колебаний. Появление таких колебаний может привести к установлению автоколебаний, которые в случае неустойчивости ракеты в продольном направлении могут привести к ее быстрому разрушению. Сформулирована задача о продольных колебаниях ракеты пакетной схемы, в качестве расчетной модели использован пакет стержней. Принято, что жидкость в баках ракеты “заморожена”, т.е. собственные движения жидкости не учтены. Сформулирован закон баланса полной энергии для рассматриваемой задачи и приведена ее операторная постановка. Приведен численный пример, для которого определены частоты, построены и проанализированы формы собственных колебаний.*

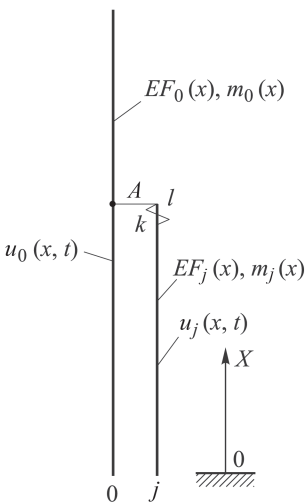
**Ключевые слова:** продольные колебания, частота и форма колебаний, пакет стержней, закон баланса полной энергии, самосопряженный оператор, спектр колебаний, POGO.

**SYSTEM OF RODS LONGITUDINAL VIBRATIONS****A.M. Pavlov, A.N. Temnov**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: pavlov\_arseniy@mail.ru; antt45@mail.ru

*In questions of dynamics of liquid fuel rockets the problem of motion stability for this rocket has an important role with the appearance of longitudinal elastic vibrations. An occurrence of such kind vibrations can evoke self-vibrations which may cause rapid destruction of the rocket in case of rocket instability within longitudinal direction. The problem on longitudinal vibrations of the liquid fuel rocket based on the packet scheme has been formulated using package rods as computational model. It is assumed that the liquid in the rocket tanks is “frozen”, i.e. proper motions of the liquid are not included. For this problem energy conservation principle was formulated and its operator staging is given. There is a numerical example, for which the frequencies have been determined, forms of Eigen vibration were built and analyzed.*

**Keywords:** longitudinal vibrations, eigen modes and frequencies, rods model, energy conservation principle, selfadjoint operator, vibration spectrum, POGO.

**Введение.** В настоящее время в России и за рубежом для вывода на требуемую орбиту полезного груза часто используют ракеты-носители (РН) пакетной компоновки с одинаковыми боковыми блоками, равномерно распределенными вокруг центрального блока.



**Рис. 1. Схема центрального стержня**

В настоящей статье приведены теоретические и вычислительные результаты продольных колебаний пакета стержней, дополняющие исследование, выполненное А.А. Пожалостиным [8].

**Постановка задачи.** Рассмотрим другие продольные колебания пакета стержней, состоящего из центрального стержня длиной  $l_0$  и  $N$  боковых стержней одинаковой длины  $l_j = l$ , ( $l_0 > l_j$ ),  $j = 1, 2, \dots, N$ , скрепленных в точке  $A$  ( $x_A = l$ ) (рис. 1) с центральными пружинными элементами жесткостью  $k$ .

Введем неподвижную систему отсчета  $OX$  и предположим, что жесткость стержней  $EF_j(x)$ , распределенная масса  $m_j(x)$  и возмущение  $q(x, t)$  являются ограниченными функциями координаты  $x$ :

$$\begin{aligned} 0 < r_j \leq EF_j(x) \leq R_j; \\ 0 < m_j \leq m_j(x) \leq M_j; \\ 0 < q_j \leq q_j(x, t) \leq Q_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть при продольных колебаниях в сечениях стержней с координатой  $x$  возникают смещения  $u_j(x, t)$ , определяемые по уравнениям

$$m_j(x) \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EF_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = q_j(x, t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

граничными условиями отсутствия нормальных сил на концах стержней

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad x = l_0; \end{aligned} \quad (3)$$

условиями равенства нормальных сил, возникающих в стержнях,

силам упругости пружинных элементов

$$\begin{aligned} EF_j \frac{\partial u_j}{\partial x} &= F_{\text{пр}j}, \quad x = l_j; \\ F_{\text{пр}j} &= k (u_0(x_A) - u_j(l_j)); \\ EF_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} (x_A - 0) - EF_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} (x_A + 0) &= -NF_{\text{пр}j}, \quad x = x_A; \end{aligned} \quad (4)$$

условием равенства перемещений в точке  $x_A$  центрального стержня

$$u_0(x_{A-0}) = u_0(x_{A+0})$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} u_j(x, 0) &= u_j^0(x); \\ \dot{u}_j(x, 0) &= u_j^1(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\dot{u}_j(x, 0) = \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0)$ .

**Закон баланса полной энергии.** Умножим уравнение (2) на  $\dot{u}_j(x, t)$ , проинтегрируем по длине каждого стержня и сложим результаты, используя граничные условия (3) и условие согласования (4). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k \delta(x - l_j) (u_0 - u_j)^2 dx \right\} = \\ = \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} q_j(x, t) \dot{u}_j(x, t) dx, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $\delta(x - l_j)$  — дельта-функция Дирака. В уравнении (6) первое слагаемое в фигурных скобках представляет собой кинетическую энергию  $T(t)$  системы, второе — потенциальную энергию  $\Pi_F(t)$ , обусловленную деформацией стержней, а третье — потенциальную энергию  $\Pi_k(t)$  пружинных элементов, которая при наличии упругих деформаций стержней может быть записана в виде

$$\Pi_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} c_j(l_j) \delta(x - l_j) EF_j(l_j) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x}(l_j) \right)^2 dx, \quad c_j = \frac{EF_j}{kl_j}.$$

Уравнение (6) показывает, что изменение полной энергии в единицу времени рассматриваемой механической системы равно мощности

внешнего воздействия. При отсутствии внешнего возмущения  $q(x, t)$  получаем закон сохранения полной энергии:

$$T(t) + \Pi_F(t) + \Pi_k(t) = T(0) + \Pi_F(0) + \Pi_k(0).$$

**Операторная постановка.** Закон баланса энергии показывает, что для любого момента времени  $t$  функции  $u_j(x, t)$  можно рассматривать как элементы гильбертова пространства  $L_{2j}([0, l_j]; m_j(x))$ , определенные на длине  $l_j$  скалярным произведением

$$(u_s, \bar{v}_k)_j = \int_0^{l_j} m_j(x) u_s \bar{v}_k dx$$

и соответствующей нормой.

Введем гильбертово пространство  $H$ , равное ортогональной сумме  $L_{2j}$ ,  $H = L_{20} \oplus L_{21} \oplus \dots \oplus L_{2N}$ , вектор-функцию  $U = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$  и оператор  $A$ , действующий в пространстве  $H$  согласно соотношению

$$AU = \text{diag}(A_{00}u_0, A_{11}u_1, \dots, A_{NN}u_N).$$

Здесь  $A_{jj} = -\frac{1}{m_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( EF_j \frac{\partial}{\partial x} \right)$  — операторы, определенные на множестве  $D(A_{jj}) \subset H$  функций, удовлетворяющих условиям (3) и (4).

Исходная задача (1)–(5) вместе с начальными условиями запишется в виде

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + AU = f(t), \quad U(0) = U^0, \quad \dot{U}(0) = U^1, \quad (7)$$

где  $f(t) = (q_0(t), q_1(t), \dots, q_N(t))^T$ .

**Лемма. 1.** Если выполнены первые два условия (1), то оператор  $A$  в эволюционной задаче (7) — неограниченный, самосопряженный, положительно определенный в пространстве  $H$  оператор

$$(AU, \bar{V})_H = (U, A\bar{V})_H, \quad (AU, U)_H \geq c^2 (U, U)_H.$$

2. Оператор  $A$  порождает энергетическое пространство  $H_A$  с нормой, равной удвоенному значению потенциальной энергии колебаний пакета стержней

$$\|U\|_A^2 = \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx + k \sum_{j=1}^N (u_0 - u_j)^2 = 2\Pi > 0. \quad (8)$$

◀ Оператор  $A$  неограничен в пространстве  $H$ , поскольку неограничен каждый диагональный элемент  $A_{jj}$ . Самосопряженность и положительная определенность оператора  $A$  проверяются непосредственно:

$$\begin{aligned}
(AU, \bar{V})_H &= \int_0^{l_0} m_0(x) \left( -\frac{1}{m_0(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( EF_0(x) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right) \right) \bar{v}_0(x) dx + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} m_j(x) \left( -\frac{1}{m_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( EF_j(x) \frac{\partial u_j(x)}{\partial x} \right) \right) \bar{v}_j(x) dx = \dots = \\
&= \int_0^{l_0} EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}'_0(x) dx - EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}_0(x) \Big|_0^{l_0} + \\
&+ \int_{l_{+0}}^{l_0} EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}'_0(x) dx - EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}_0(x) \Big|_{l_{+0}}^{l_0} + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u'_j(x) \bar{v}'_0(x) dx - \sum_{j=1}^N EF_j(x) u'_j(x) \bar{v}_j(x) \Big|_0^{l_j} = \\
&= \int_0^{l_0} EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}'_0(x) dx - EF_0(x_A - 0) u'_0(x_A - 0) \bar{v}_0(x_A) + \\
&+ EF_0(x_A + 0) u'_0(x_A + 0) \bar{v}_0(x_A) - \sum_{j=1}^N EF_j(l_j) u'_j(l_j) \bar{v}_j(l_j) + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u'_j(x) \bar{v}'_j(x) dx = \int_0^{l_0} EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}'_0(x) dx + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u'_j(x) \bar{v}'_j(x) dx + \\
&+ \bar{v}_0(x_A) [EF_0(x_A + 0) u'_0(x_A + 0) - EF_0(x_A - 0) u'_0(x_A - 0)] - \\
&- \sum_{j=1}^N EF_j(l_j) u'_j(l_j) \bar{v}'_j(l_j) = \int_0^{l_0} EF_0(x) u'_0(x) \bar{v}'_0(x) dx + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u'_j(x) \bar{v}'_j(x) dx + \\
&+ \sum_{j=1}^N k(u_0(x_A) - u_j(l_j)) (\bar{v}_0(x_A) - \bar{v}_j(l_j)) = (U, A\bar{V})_H ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AU, U)_H &= \dots = \int_0^{l_{-0}} EF_0(x) u_0'^2(x) dx - EF_0(x) u_0'(x) u_0(x) \Big|_0^{l_{-0}} + \\
&+ \int_{l_{+0}}^{l_0} EF_0(x) u_0'^2(x) dx - EF_0(x) u_0'(x) u_0(x) \Big|_{l_{+0}}^{l_0} + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u_j'^2(x) dx - \sum_{j=1}^N EF_j(x) u_j'(x) u_j(x) \Big|_0^{l_j} = \\
&= \int_0^{l_{-0}} EF_0(x) u_0'^2(x) dx + \int_{l_{+0}}^{l_0} EF_0(x) u_0'^2(x) dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u_j'^2(x) dx - \\
&- \sum_{j=1}^N k(u_0(l) u_j(l) - u_j^2(l)) + u_0(l) \sum_{j=1}^N k(u_0(l) - u_j(l)) = \\
&= \int_0^{l_{-0}} EF_0(x) u_0'^2(x) dx + \int_{l_{+0}}^{l_0} EF_0(x) u_0'^2(x) dx + \\
&+ \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u_j'^2(x) dx + k \sum_{j=1}^N (u_0(l) - u_j(l))^2 \geq c^2 (U, U)_H.
\end{aligned}$$

Из приведенных результатов следует, что энергетическая норма оператора  $A$  выражается формулой (8). ►

**Разрешимость эволюционной задачи.** Сформулируем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия

$$U^0 \in D(A^{1/2}), \quad U^0 \in H, \quad f(t) \in C([0, t]; H),$$

тогда задача (7) имеет единственное слабое решение  $U(t)$  на отрезке  $[0, t]$ , определяемое по формуле

$$U(t) = U^0 \cos(tA^{1/2}) + U^1 \sin(tA^{1/2}) + \int_0^t \sin((t-s)A^{1/2}) A^{-1/2} f(s) ds.$$

В отсутствие внешнего возмущения  $f(t)$  выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{dU}{dt} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|A^{1/2} U\|_H^2 = \frac{1}{2} \left\| \frac{dU^0}{dt} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|A^{1/2} U^0\|_H^2.$$

◀ Эволюционная задача (7) — это стандартная задача Коши для дифференциального операторного уравнения гиперболического типа, для которого выполнены все условия теоремы о разрешимости [9]. ▶

**Собственные колебания пакета стержней.** Примем, что на стержневую систему не действует поле внешних сил:  $f(t) = 0$ . В этом случае движения стержней будем называть свободными. Свободные движения стержней, зависящие от времени  $t$  по закону  $\exp(i\omega t)$ , назовем собственными колебаниями. Приняв в уравнении (7)  $U(x, t) = U(x) e^{i\omega t}$ , получим спектральную задачу для оператора  $A$ :

$$AU - \lambda EU = 0, \quad \lambda = \omega^2. \quad (9)$$

Свойства оператора  $A$  позволяют сформулировать теорему о спектре и свойствах собственных функций [10].

**Теорема 2.** *Спектральная задача (9) о собственных колебаниях пакета стержней имеет дискретный положительный спектр*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty$$

*и систему собственных функций  $\{U_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , полную и ортогональную в пространствах  $H$  и  $H_A$ , при этом выполнены следующие формулы ортогональности:*

$$\begin{aligned} (U_k, U_s)_H &= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m(x)_j u_{kj} u_{sj} dx = \delta_{ks}; \\ (U_k, U_s)_{H_A} &= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) \left( \frac{du_{kj}}{dx} \right) \left( \frac{du_{sj}}{dx} \right) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^N k (u_{k0} - u_{kj}) (u_{s0} - u_{sj}) = \lambda_k \delta_{ks}. \end{aligned}$$

**Исследование спектральной задачи в случае однородного пакета стержней.** Представив функцию перемещений  $u_j(x, t)$  в виде  $u_j(x, t) = u_j(x) e^{i\omega t}$ , после разделения переменных получим спектральные задачи для каждого стержня:

$$\frac{EF_j}{m_j} \frac{d^2 u_j}{dx^2} + \lambda u_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

которые запишем в матричной форме

$$\tilde{A} \frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda U = 0,$$

где

$$\tilde{A} = \text{diag} \left( \frac{EF_0}{m_0}, \frac{EF_1}{m_1}, \frac{EF_2}{m_2}, \dots, \frac{EF_N}{m_N} \right);$$

$$U = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_N)^T.$$

**Решение и анализ полученных результатов.** Обозначим функции перемещения для центрального стержня на участке  $[0, l]$  как  $u_{01}$  и на участке  $[l, l_0]$  как  $u_{02}(x)$ . При этом для функции  $u_{02}$  начало координат перенесем в точку с координатой  $l$ . Для каждого стержня представим решение уравнения (10) в виде

$$u_0 = \begin{cases} u_{01} = C_{01} \cos \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right) + C_{02} \sin \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right), \\ u_{02} = C_{03} \cos \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right) + C_{04} \sin \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right); \end{cases}$$

$$u_1 = C_{11} \cos \left( \left( \tilde{A}_{11}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right) + C_{12} \sin \left( \left( \tilde{A}_{11}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right);$$

$$u_2 = C_{21} \cos \left( \left( \tilde{A}_{22}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right) + C_{22} \sin \left( \left( \tilde{A}_{22}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right);$$

...

$$u_N = C_{N1} \cos \left( \left( \tilde{A}_{NN}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right) + C_{N2} \sin \left( \left( \tilde{A}_{NN}^{-1} \lambda \right)^{1/2} x \right). \quad (11)$$

Для нахождения неизвестных констант в (11) воспользуемся сформулированными выше граничными условиями. Из однородных граничных условий можно определить некоторые константы, а именно:  $C_{02} = C_{12} = C_{22} = C_{32} = C_{42} = \dots = C_{N2} = 0$ .

В итоге остается найти  $N + 3$  констант:  $C_{01}, C_{03}, C_{04}, C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41}, \dots, C_{N1}$ . Для этого решим  $N + 3$  уравнений относительно  $N + 3$  неизвестных.

Запишем полученную систему в матричной форме:  $(\Delta) \{C\} = \{0\}$ . Здесь  $\{C\} = \{C_{01}, C_{03}, C_{04}, C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41}, \dots, C_{N1}\}^T$  — вектор неизвестных;  $(\Delta)$  — характеристическая матрица,

$$(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \sin(\Lambda(l_0 - l)) & \Lambda \cos(\Lambda(l_0 - l)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\Lambda l) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EF_0 \Lambda \sin(\Lambda l) + \\ + N\beta & 0 & EF_0 \Lambda & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \beta & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (12)$$



где

$$\alpha = k \cos \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right);$$

$$\beta = -k \cos \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right);$$

$$\gamma = -EF \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} \sin \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right) + k \cos \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right);$$

$$\Lambda = \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2}; \tilde{A}_{jj}: j \neq 0.$$

Для нахождения нетривиального решения в качестве переменной примем константу  $C_{01} \in \mathbb{R}$ . Имеем два варианта:  $C_{01} = 0$ ;  $C_{01} \neq 0$ .

Пусть  $C_{01} = 0$ , тогда  $C_{03} = C_{04} = 0$ . В этом случае нетривиальное решение может быть получено, если  $\gamma = 0$  из (12) при выполнении дополнительного условия

$$\sum_{j=1}^N C_{j1} = 0, \quad (13)$$

которое может быть получено из третьего уравнения системы (12).

В итоге получаем простое частотное уравнение

$$\begin{aligned} -EF \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} \sin \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right) + \\ + k \cos \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right) = 0, \quad j \in [1, 2, \dots, N], \end{aligned}$$

совпадающее с частотным уравнением для стержня упруго закрепленного на одном конце, который можно рассматривать как первую парциальную систему.

В этом случае все возможные комбинации движений боковых стержней, удовлетворяющих условию (13), можно условно разделить на группы, соответствующие различным комбинациям фаз (в рассматриваемом случае фаза определяется знаком  $C_{j1}$ ). Если принять боковые стержни идентичными, то имеем два варианта:

1)  $C_{j1} \neq 0$ , тогда число таких комбинаций  $n$  для различных  $N$  можно вычислить по формуле  $n = N \operatorname{div} 2$ , где  $\operatorname{div}$  — функция деления без остатка;

2) какая-либо (или какие-либо) из констант  $C_{j1}$  равны 0, тогда число возможных комбинаций возрастает и может быть определено по формуле

$$n = \sum_{m=0}^{N-2} [(N - m) \operatorname{div} 2].$$

Пусть  $C_{01} \neq 0$ , тогда  $C_{11} = C_{21} = C_{31} = C_{41} = \dots = C_{N1} = C_{01} (-\beta/\gamma)$ , где  $\beta$  и  $\gamma$  – комплексы, входящие в (12). Из системы (12) также имеем:  $C_{03} = C_{01} \cos(\Lambda l)$ ;  $C_{04} = C_{03} \operatorname{tg}(\Lambda(l_0 - l)) = C_{01} \cos(\Lambda l) \times \operatorname{tg}(\Lambda(l_0 - l))$ , т.е. все константы выражены через  $C_{01}$ . Частотное уравнение принимает вид

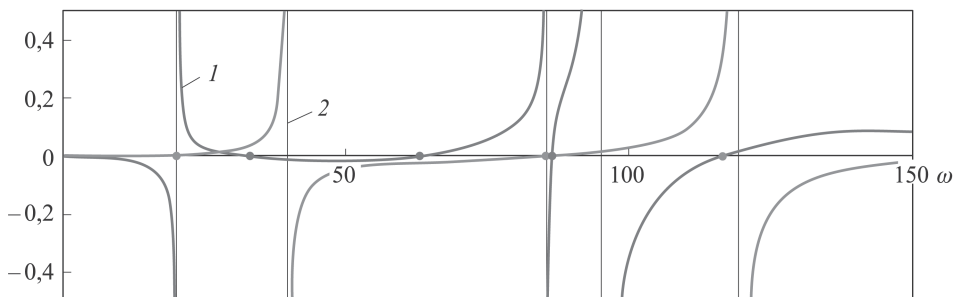
$$EF_0 \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} \operatorname{tg} \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right) - Nk + \\ + EF_0 \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} \operatorname{tg} \left( \left( \tilde{A}_{00}^{-1} \lambda \right)^{1/2} (l_0 - l) \right) - \\ - N \left( \frac{-k^2 \cos \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right)}{-EF \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} \sin \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right) + k \cos \left( \left( \tilde{A}_{jj}^{-1} \lambda \right)^{1/2} l \right)} \right) = 0.$$

В качестве примера рассмотрим систему с четырьмя боковыми стержнями. Кроме описанного выше способа для этого примера можно записать частотное уравнение для всей системы, вычислив определитель матрицы  $\Delta$  и приравняв его нулю. Приведем его вид

$$\gamma^4 (\Lambda \sin(\Lambda(l_0 - l)) \cos(\Lambda l) EF_0 \Lambda + \\ + \Lambda \cos(\Lambda(l_0 - l)) (EF_0 \Lambda \sin(\Lambda l) + 4\beta)) - \\ - 4\alpha\beta\gamma^3 \Lambda \cos(\Lambda(l_0 - l)) = 0.$$

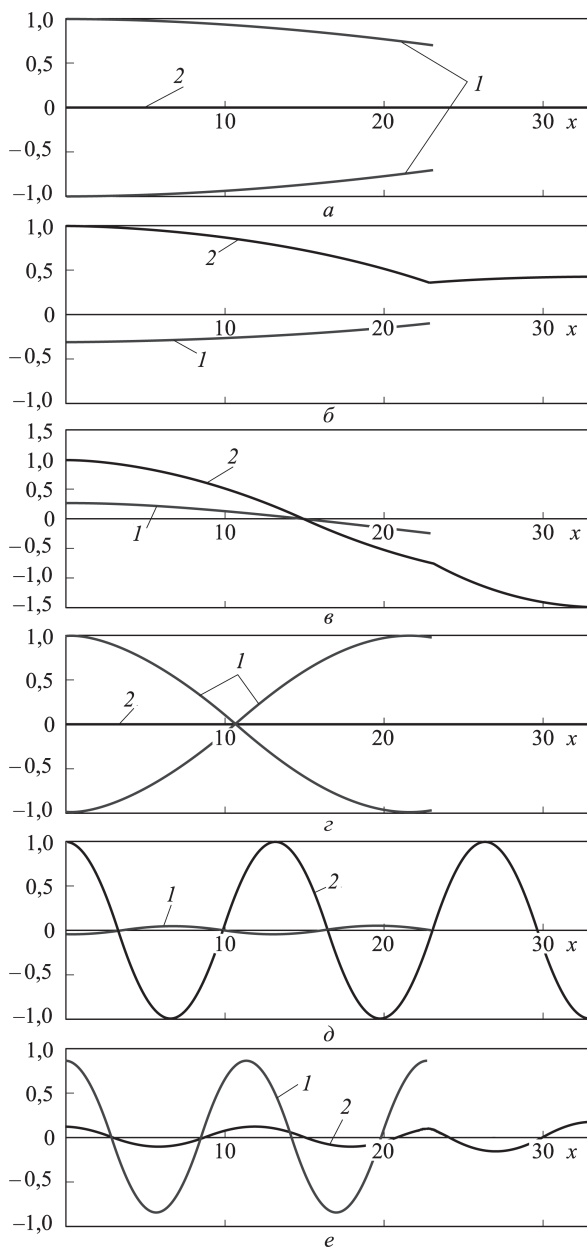
Графики трансцендентных частотных уравнений для рассмотренных выше случаев представлены на рис. 2. В качестве исходных данных были приняты следующие:  $EF = 2 \cdot 10^9$  Н;  $EF_0 = 2,2 \cdot 10^9$  Н;  $k = 7 \cdot 10^7$  Н/м;  $m = 5900$  кг/м;  $m_0 = 6000$  кг/м;  $l = 23$ ;  $l_0 = 33$  м. Значения первых трех частот колебаний рассматриваемой схемы приведены ниже:

$n$ .....	1	2	3
$\omega$ , рад/с .....	20,08	31,53	63,50



**Рис. 2.** Графики трансцендентных частотных уравнений для  $C_{01} \neq 0$  (1) и  $C_{01} = 0$  (2)

Приведем формы колебаний, соответствующие полученным решениям (в общем случае формы колебаний не нормированы). Формы колебаний, соответствующие первой, второй, третьей, четвертой, 13 и 14 частотам, приведены на рис. 3. При первой частоте колебаний боковые стержни колеблются с одинаковой формой, но попарно в противофазе



**Рис. 3.** Формы колебаний боковых (1) и центральных (2) стержней, соответствующие первой  $\nu = 3,20$  Гц (а), второй  $\nu = 5,02$  Гц (б), третьей  $\nu = 10,11$  Гц (в), четвертой  $\nu = 13,60$  Гц (г), 13-й  $\nu = 45,90$  Гц (д) и 14-й  $\nu = 50,88$  Гц (е) частотам

(рис. 3, а), при второй — центральный стержень совершает колебания, а боковые колеблются по одинаковой форме в фазе (рис. 3, б). Следует отметить, что первая и вторая частоты колебаний рассматриваемой стержневой системы соответствуют колебаниям системы, состоящей из твердых тел.

При колебании системы с третьей собственной частотой первый раз появляются узлы (рис. 3, в). Третья и последующие частоты (рис. 3, г) соответствуют уже упругим колебаниям системы. С возрастанием частоты колебаний, связанной с уменьшением влияния упругих элементов, частоты и формы колебаний стремятся к парциальным (рис. 3, д, е).

Кривые функций, точки пересечения которых с осью абсцисс являются решениями трансцендентных уравнений, представлены на рис. 4. Согласно рисунку, собственные частоты колебаний системы расположены вблизи парциальных частот. Как было отмечено выше, при увеличении частоты сближение собственных частот с парциальными усиливается. В результате частоты, при которых колеблется вся система, условно разделяются на две группы: близкие к парциальным частотам бокового стержня и частоты, близкие к парциальным частотам центрального стержня.

**Выводы.** Рассмотрена задача о продольных колебаниях пакета стержней. Описаны свойства поставленной краевой задачи и спектра ее собственных значений. Предложено решение спектральной задачи для произвольного числа однородных боковых стержней. Для численного примера найдены значения первых частот колебаний и построены соответствующие им формы. Также были выявлены некоторые характерные свойства построенных форм колебаний.

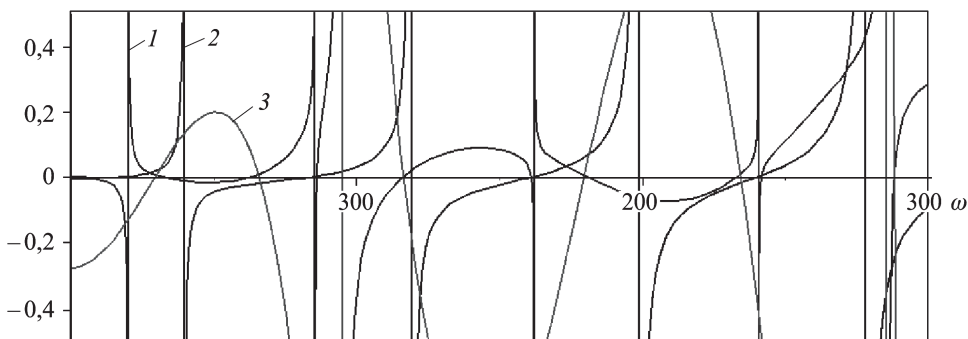


Рис. 4. Кривые функций, точки пересечения которых с осью абсцисс являются решениями трансцендентных уравнений, для  $C_{01} \neq 0$  (1),  $C_{01} = 0$  (2) совпадают с первой парциальной системой (боковой стержень, закрепленный на упругом элементе в точке  $x = l$ ) и второй парциальной системы (3) (центральный стержень, закрепленный на четырех упругих элементах в точке  $A$ )

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
2. Баллистические ракеты и ракеты-носители / О.М. Алифанов, А.Н. Андреев, В.Н. Гушин и др. М.: Дрофа, 2004. 511 с.
3. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. 396 с.
4. Parameter study on POGO stability of liquid rockets / Z. Zhao, G. Ren, Z. Yu, B. Tang, Q. Zhang // *J. of Spacecraft and Rockets*. 2011. Vol. 48. Is. 3. P. 537–541.
5. Балакирев Ю.Г. Методы анализа продольных колебаний ракет-носителей с жидкостным двигателем // *Космонавтика и ракетостроение*. 1995. № 5. С. 50–58.
6. Балакирев Ю.Г. Особенности математической модели жидкостной ракеты пакетной компоновки как объекта управления // *Избранные проблемы прочности современного машиностроения*. 2008. С. 43–55.
7. Докучаев Л.В. Совершенствование методов исследований динамики ракеты-носителя пакетной конструкции с учетом их симметрии // *Космонавтика и ракетостроение*. 2005. № 2. С. 112–121.
8. Пожалостин А.А. Разработка приближенных аналитических методов расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек с жидкостью: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2005. 220 с.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 464 с.
10. Мопачевский И.Д. Операторные методы математической физики. Симферополь: ООО “Форма”, 2008. 140 с.

## REFERENCES

- [1] Kolesnikov K.S. Dinamika raket [Rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p.
- [2] Alifanov O.N., Andreev A.N., Gushchin V.N., eds. Ballisticheskie rakety i rakety-nositeli [Ballistic missiles and launch vehicles]. Moscow, Drofa Publ., 2003. 511 p.
- [3] Rabinovich B.I. Vvedenie v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov [Introduction to the dynamics of launch vehicles of spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974. 396 p.
- [4] Zhao Z., Ren G., Yu Z., Tang B., Zhang Q. Parameter study on POGO stability of liquid fuel rocket. *J. Spacecraft and Rockets*, 2011, vol. 48, iss. 3, pp. 537–541.
- [5] Balakirev Yu.G. Methods of analysis of longitudinal vibrations of launch vehicles with liquid propellant engine. *Kosm. i raketost.* [Cosmonautics and rocketry], 1995, no. 5, pp. 50–58 (in Russ.).
- [6] Balakirev Yu.G. Osobennosti matematicheskoy modeli zhidkostnoy rakety paketnoy komponovki kak ob"ekta upravlenii [Features a mathematical model of liquid fuel rocket with packet layout as a controllable object]. *Sb. "Izbrannyye problemy prochnosti sovremennogo mashinostroeniya"* [Collect. Pap. "Selected problems of modern engineering resistance"]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 204 p. (cited pp. 43–55).
- [7] Dokuchaev L.V. Improvement of methods for studying the dynamics of clustered launch vehicle considering their symmetry. *Kosm. i raketost.* [Cosmonautics and rocketry], 2005, no. 2, pp. 112–121 (in Russ.).
- [8] Pozhalostin A.A. Razrabotka priblizhennykh analiticheskikh metodov rascheta sobstvennykh i vynuzhdennykh kolebaniy uprugikh obolochek s zhidkost'yu. Diss. doct. tekhn. nauk [Development of approximate analytical computation methods for natural and forced vibrations of elastic shells with liquid. Dr. tech. sci. diss.].

- [9] Kreyn S.G. Lineynye differentsial'nye uravneniya v Banakhovykh prostranstvakh [Linear differential equations in Banach spaces]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 464 p.
- [10] Kopachevskiy I.D. Operatornye metody matematicheskoy fiziki [Operational methods in mathematical physics]. Simferopol', Forma Publ., 2008. 140 p.

Статья поступила в редакцию 28.04.2014

Павлов Арсений Михайлович — студент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Специализируется в области ракетно-космической технологии.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Pavlov A.M. — student of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of rocket-and-space technology. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 20 научных работ в области механики жидкости и газа и ракетно-космической технологии.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Temnov A.N. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of fluid and gas mechanics and rocket-and-space technology.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.